PROBLEMAS RESUELTOS DE ÁLGEBRA

Fernando Revilla Jiménez
http://www.fernandorevilla.es

Prólogo

Los contenidos de éste libro corresponden a parte de mi labor docente hasta el curso académico 2008/2009 como

(a) Profesor de Álgebra, Cálculo, Variable compleja y Ecuaciones diferenciales para Ingenierías y Facultades del distrito universitario de Madrid y que fueron impartidos en academias de enseñanza universitaria

(b) Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de Madrid.

(c) Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Madrid.

Dado que todos los problemas vienen resueltos, y en aras a la efectividad en el trabajo, se recomienda al lector que los trabaje previamente.

Madrid, a 24 de agosto de 2015.

Índice de problemas

Capítulo 1

Conjuntos

1.1. Concepto de conjunto

1. Escribir por extensión $A = \{x : x \text{ es raíz de } p(x) = x^2 - 7x + 12\}$.
2. Escribir por comprensión $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
3. Analizar si son iguales los siguientes pares de conjuntos
   (a) $A = \{a, 2, 3\}, \quad B = \{3, 3, 2, a\}$.
   (b) $C = \{\text{verde, rojo}\}, \quad D = \{x : x \text{ es color del arco iris}\}$.
4. Escribir por comprensión los conjuntos

$$A = \{-1, -3, -5, -7. - 9, \ldots\}, \quad B = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}.$$

5. Definir por extensión el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 = 0\}$.
6. Sean a, b, c, d elementos de un conjunto X. Demostrar que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ si y solamente si $a = c$ y $b = d$.

Solución. 1. Hallemos las raíces de la ecuación dada

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 4 \text{ o } x = 3.$$

Es decir, $A = \{3, 4\}$.

2. Los elementos de B son los números naturales mayores o iguales que 3 y menores o iguales que 7. Por tanto:

$$B = \{x : x \text{ es número natural con } 3 \leq x \leq 7\}.$$

3. (a) Todo elemento que pertenece a A, pertenece a B y todo elemento que pertenece a B, pertenece a A, lo cual implica que $A = B$. Nótese que es irrelevante el que se repita la escritura de algún elemento.

(b) Todo elemento que pertenece a C, pertenece a D. Sin embargo, no todo elemento que pertenece a D pertenece a C (por ejemplo, el color azul). Concluimos que $C \neq D$.

4. El conjunto A está formado por los números impares negativos y el B por los múltiplos de 4 positivos, por tanto:

$A = \{x : x \text{ es entero impar negativo}\},\ B = \{x : x \text{ es múltiplo positivo de } 4\}.$

5. Los elementos de S son los números reales que cumplen $x^3 - x^2 = 0$ o de forma equivalente $x^2(x-1) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$, $x = 1$. Por tanto $S = \{0, 1\}$.

6. Tenemos que demostrar

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = b \text{ y } b = d.$$

$\Leftarrow$) Si $a = b$ y $c = d$, trivialmente $\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\Rightarrow$) Por hipótesis

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}\,. \quad (1)$$

Analizamos dos casos:
Caso 1: $a \neq b$. En éste caso, $\{a\} \neq \{a, b\}$. Entonces, el conjunto de la derecha en (1) ha de tener dos elementos, lo cual implica que $c \neq d$. Sólo se puede verificar la igualdad (1) si $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$, por tanto $a = c$ y $b = d$.
Caso 2: $a = b$. En éste caso, $\{a\} = \{a, b\}$. Entonces, el conjunto de la derecha en (1) ha de tener un único elemento, es decir ha de ser $\{c\} = \{c, d\}$. Esto último implica que $c = d$.

1.2. Inclusión de conjuntos. Conjunto vacío

1. Se considera el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Escribir todos los subconjuntos de A.
2. Un subconjunto A de B se dice que es propio si existe al menos un elemento de B que no pertenece a A. Escribir todos los subconjuntos propios de $M = \{1, 2\}$.
3. Demostrar que el conjunto vacío es único.
4. Sea X un conjunto. Al conjunto $\emptyset_X = \{x \in X : x \neq x\}$ se le llama *subconjunto vacío de* X (y claramente no contiene elemento alguno). Demostrar que para dos conjuntos cualesquiera X e Y se verifica $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Solución. 1. El conjunto vacío y A son subconjuntos de A. Los subconjuntos de A con un elemento son $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$, y con dos elementos son $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ y $\{b,c\}$. Por tanto, todos los subconjuntos de A son:

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ A.$$

2. Los subconjuntos de M son $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $M = \{1,2\}$. De la definición dada, inmediatamente se deduce que los subconjuntos propios de M son $\emptyset$, $\{1\}$ y $\{2\}$.

3. Si $\emptyset$ y $\emptyset'$ son conjuntos vacíos, se verifica $\emptyset \subset \emptyset'$ y $\emptyset' \subset \emptyset$, luego $\emptyset = \emptyset'$.

4. Recordemos que si P y Q son dos proposiciones, $P \Rightarrow Q$ significa "no P y Q", en consecuencia, $P : x \in \emptyset_X$ (que es falso) implica $Q : x \in \emptyset_Y$, es decir $\emptyset_X \subset \emptyset_Y$. De manera análoga, $\emptyset_Y \subset \emptyset_X$.

1.3. Relaciones de inclusión y pertenencia

Analizar cuales de las siguientes fórmulas son ciertas para todo conjunto A
(1) $\emptyset \in \emptyset$. (2) $\emptyset \in \{\emptyset\}$. (3) $\emptyset \subset \emptyset$. (4) $\emptyset \in A$. (5) $\emptyset \subset A$. (6) $A \in A$. (7) $A \in \{A\}$. (8) $A \subset A$. (9) $A \in \mathcal{P}(A)$. (10) $A \subset \mathcal{P}(A)$.

Solución. (1) Falsa. $\emptyset$ no tiene elementos.
(2) Cierta. $\{\emptyset\}$ es un conjunto, y $\emptyset$ es elemento de $\{\emptyset\}$.
(3) Cierta. El vacío está contenido en todo conjunto, en particular $\emptyset \subset \emptyset$.
(4) Falsa. Basta considerar $A = \emptyset$ y aplicar el apartado (1).
(5) Cierta. El vacío está contenido en todo conjunto.
(6) Falsa. Basta considerar $A = \emptyset$ y aplicar el apartado (4).
(7) Cierta. $\{A\}$ es un conjunto, y A es elemento de $\{A\}$.
(8) Cierta. Si $x \in A$, entonces $x \in A$.
(9) Cierta. Al ser A es subconjunto de A, se verifica $A \in \mathcal{P}(A)$.
(10) Falsa. Si $A = \{1\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Se verifica $1 \in A$, pero $1 \notin \mathcal{P}(A)$. Por tanto A no está contenido en $\mathcal{P}(A)$.

1.4. Unión e intersección de conjuntos

1. Dados los conjuntos $A = \{a,b,c,7,4\}$, $B = \{b,1,5,c\}$, hallar $A \cup B$ y $A \cap B$.
2. Demostrar que $M = \{0,2\}$ y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ con } x^2 - 1 = 0\}$, son conjuntos disjuntos.
3. Todos los alumnos de una clase que practican natación o atletismo o ambos deportes, practican también tenis, natación o ambos deportes. Los

que practican natación y atletismo practican también natación y tenis. ¿ Es cierto que los que practican atletismo también practican tenis?

Solución. 1. De las definiciones de unión e intersección de conjuntos, deducimos inmediatamente que: $A \cup B = \{a, b, c, 7, 4, 1, 5\}$, $A \cap B = \{b, c\}$.

2. Dos conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$, es decir si no tienen elementos comunes. Los elementos del conjunto B son las soluciones de la ecuación $x^2 - 1 = 0$, es decir $B = \{-1, 1\}$, luego $M \cap B = \emptyset$. Por tanto, M y B son disjuntos.

3. Denotemos por N, A, T a los conjuntos de los alumnos de la clase que practica natación, atletismo y tenis respectivamente. La hipótesis todos los alumnos de la clase que practican natación o atletismo o ambos deportes, practican también tenis, natación o ambos deportes equivale a:

$$N \cup A \subset T \cup N \quad (1).$$

La hipótesis los que practican natación y atletismo practican también natación y tenis equivale a:

$$N \cap A \subset N \cap T \quad (2).$$

El aserto los que practican atletismo también practican tenis equivale a:

$$A \subset T \quad (3).$$

Veamos que se verifica (3), o equivalentemente que $x \notin T \Rightarrow x \notin A$. Tenemos:

$$x \notin T \Rightarrow x \notin T \cap N \Rightarrow \text{ (por (2)) } x \notin N \cap A.$$

Dado que $x \notin N \cap A$, o bien ocurre $x \notin A$ o bien $x \notin N$ (o ambos).
Caso 1: $x \notin A$. Ya estaría demostrado (3).
Caso 2: $x \notin N$. En éste caso, $x \notin T \cup N$ (por hipótesis $x \notin T$) y por (1), deducimos $x \notin N \cup A$ lo cual implica que $x \notin A$ (pues $x \notin N$). Concluimos pues que los que practican atletismo también practican tenis.

1.5. Propiedades de la unión e intersección

Demostrar las siguientes propiedades para conjuntos cualesquiera dados:
1. Asociativa de la unión: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
2. Asociativa de la intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Conmutativa de la unión: $A \cup B = B \cup A$.
4. Conmutativa de la intersección: $A \cap B = B \cap A$.

5. Idempotentes de la unión y de la intersección: $A \cup A = A,\ A \cap A = A$.
6. Elemento ínfimo para la unión e intersección: $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. Distributiva de la intersección respecto de la unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
8. Distributiva de la unión respecto de la intersección: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
9. Leyes de simplificación: (a) $(A \cup B) \cap A = A$. (b) $(A \cap B) \cup A = A$.

Solución. 1. Quedará demostrada la igualdad si demostramos los contenidos:

$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C). \quad (1)$$

$$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C. \quad (2)$$

Sea $x \in (A \cup B) \cup C$. Esto significa $x \in A \cup B$ o $x \in C$. Si ocurre lo primero, será $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, será $x \in A \cup (B \cup C)$; si $x \in B$ será $x \in B \cup C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cup C)$. Por último, si $x \in C$, será $x \in B \cup C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cup C)$. Hemos demostrado (1).

Sea $x \in A \cup (B \cup C)$. Esto significa $x \in A$ o $x \in B \cup C$. Si ocurre lo primero, será $x \in A \cup B$ y por tanto $x \in (A \cup B) \cup C$. Si $x \in B \cup C$, será $x \in B$ o $x \in C$. Si $x \in B$, será $x \in A \cup B$ y por tanto $x \in (A \cup B) \cup C$; si $x \in C$ será $x \in (A \cup B) \cup C$. Hemos demostrado (2).
2. Sea $x \in (A \cap B) \cap C$. Esto significa $x \in A \cap B$ y $x \in C$ y por tanto, $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$ lo cual implica que $x \in A$ y $x \in B \cap C$, es decir $x \in A \cap (B \cap C)$.

Sea $x \in A \cap (B \cap C)$. Esto significa $x \in A$ y $x \in B \cap C$ y por tanto, $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$ lo cual implica que $x \in A \cap B$ y $x \in C$, es decir $x \in (A \cap B) \cap C$. Del doble contenido demostrado, concluimos que

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Sea $x \in A \cup B$. Esto significa que $x \in A$ o $x \in B$ y, en cualquiera de los dos casos, $x \in B \cup A$. Hemos demostrado $A \cup B \subset B \cup A$.

Sea $x \in B \cup A$. Esto significa que $x \in B$ o $x \in A$ y, en cualquiera de los dos casos, $x \in A \cup B$. Hemos demostrado $B \cup A \subset A \cup B$. Podemos pues concluir que $A \cup B = B \cup A$.

4. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Sea $x \in A \cap B$. Esto significa que $x \in A$ y $x \in B$ lo cual implica que que $x \in B$ y $x \in A$, es decir $x \in B \cap A$. Hemos demostrado $A \cap B \subset B \cap A$.

Sea $x \in B \cap A$. Esto significa que $x \in B$ y $x \in A$ lo cual implica que que $x \in A$ y $x \in B$, es decir $x \in A \cap B$. Hemos demostrado $B \cap A \subset A \cap B$. Podemos pues concluir que $A \cap B = B \cap A$.

5. Sea A conjunto arbitrario. Si $x \in A \cup A$, será $x \in A$ o $x \in A$, y en ambos casos $x \in A$. Si $x \in A$, en virtud de la definición de unión, $x \in A \cup A$. Podemos pues concluir que $A \cup A = A$.
Si $x \in A \cap A$, será $x \in A$ y $x \in A$, y por tanto, $x \in A$. Si $x \in A$, en virtud de la definición de intersección, $x \in A \cap A$. Podemos pues concluir que $A \cap A = A$.

6. Si $x \in A \cup \emptyset$ entonces $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Dado que el conjunto vacío no tiene elementos, necesariamente $x \in A$. Si $x \in A$, por la definición de unión, se cumple $x \in A \cup \emptyset$. Es decir, $A \cup \emptyset = A$.
Un elemento x pertenece a $A \cap \emptyset$, si y sólo si $x \in A$ y $x \in \emptyset$. Ningún elemento x cumple las dos condiciones anteriores, por tanto $A \cap \emptyset = \emptyset$.

7. Veamos que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. En efecto, $x \in A \cap (B \cup C)$ implica $x \in A$ y $x \in B \cup C$, es decir o bien $x \in A$ y $x \in B$ o bien $x \in A$ y $x \in C$. En el primer caso $x \in A \cap B$ y en el segundo $x \in A \cap C$. En ambos casos, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Veamos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. En efecto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ implica $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. En el primer caso, $x \in A$ y $x \in B$, por tanto $x \in A$ y $x \in B \cup C$ lo cual implica $x \in A \cap (B \cup C)$. En el segundo caso, $x \in A$ y $x \in C$, por tanto $x \in A$ y $x \in B \cup C$ lo cual implica también $x \in A \cap (B \cup C)$.

8. Veamos que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. En efecto, $x \in A \cup (B \cap C)$ implica $x \in A$ o $x \in B \cap C$. En el primer caso, $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$ lo cual implica $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. En el segundo caso, $x \in B$ y $x \in C$. Es decir, $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, lo cual implica $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Veamos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. En efecto, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ implica $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \notin A$, al pertenecer a $A \cup B$ y a $A \cup C$, necesariamente $x \in B$ y $x \in C$. Es decir, $x \in B \cap C$ y por tanto, $x \in A \cup (B \cap C)$.

9. (a) Si $x \in (A \cup B) \cap A$, entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A$ lo cual implica trivialmente que $x \in A$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A$ lo cual implica $x \in (A \cup B) \cap A$.

(b) Si $x \in (A \cap B) \cup A$, entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A$, y en ambos casos, $x \in A$. Si $x \in A$, entonces $x \in (A \cap B) \cup A$.

1.6. Cardinal de la unión de tres conjuntos

Sea M un conjunto finito (es decir, con un número finito de elementos). Se denota por card M, por $\#(M)$ o bien por $|A|$ al cardinal de M. Sean ahora A, B, C tres conjuntos finitos. Demostrar las fórmulas:

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
(c) *Aplicación.* Calcular cuantos números naturales menores o iguales que 1000 existen que no sean múltiplos no de 3, ni de 5, ni de 7.

Solución. (a) Si escribimos $|A| + |B|$ estamos contando dos veces cada elemento de $A \cap B$, en consecuencia $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
(b) Usando las propiedad asociativa de la unión, el apartado (a) y la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|. \qquad (1) \end{aligned}$$

Usando el apartado (a) y las propiedades asociativa e idempotente de la intersección:

$$\begin{aligned} |(A \cap C) \cup (B \cap C)| &= |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \\ &= |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \qquad (2) \end{aligned}$$

Usando (1) y (2) queda:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

(c) Llamemos A_3, A_5 y A_7 los conjuntos de los múltiplos de 3, 5 y 7 respectivamente y que son menores o iguales que 1000. Entonces, $A_3 \cap A_5$, $A_3 \cap A_5$, $A_5 \cap A_7$, y $A_3 \cap A_5 \cap A_7$ son respectivamente los conjuntos cuyos elementos son los múltiplos de 15, 21, 35 y 105 respectivamente y que son menores o iguales que 1000. Tenemos:

$$\begin{cases} 1000 = 3 \cdot 333 + 1 \\ 1000 = 5 \cdot 200 \\ 1000 = 7 \cdot 142 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A_3| = 333 \\ |A_5| = 200 \\ |A_7| = 142, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 = 15 \cdot 66 + 10 \\ 1000 = 21 \cdot 47 + 13 \\ 1000 = 35 \cdot 28 + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A_3 \cap A_5| = 66 \\ |A_5 \cap A_7| = 47 \\ |A_5 \cap A_7| = 28, \end{cases}$$

$$1000 = 105 \cdot 9 + 55 \Rightarrow |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 9.$$

Aplicando la fórmula del cardinal de la unión de tres conjuntos

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543.$$

El conjunto $A_3 \cup A_5 \cup A_7$ está formado por los múltiplos de 3, o de 5, o de 7 y que son menores o iguales que 1000. Nos piden por tanto el cardinal de $(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c$. Entonces,

$$|(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c| = 1000 - 543 = 457$$

es el cardinal de los números naturales menores o iguales que 1000 existen que no son múltiplos ni de 3, ni de 5, ni de 7.

1.7. Partes de un conjunto, complementario y diferencia

1. Dado $U = \{a, b, c, d\}$, determinar $\mathcal{P}(U)$.
2. Determinar los conjuntos $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right)$.
3. En $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, determinar $\mathbb{Z}^c$ y $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$.
4. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Hallar el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$.
5. Dados dos conjuntos A y B su diferencia simétrica se define como el conjunto $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Demostrar que se verifica la igualdad

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

6. Para dos conjuntos A y B demostrar que $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ y que es una representación de A como unión de conjuntos disjuntos.
7. Siendo A, B, C subconjuntos de un conjunto universal U, demostrar que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
8. Demostrar que existe un único $A \in \mathcal{P}(C)$ tal que para todo $X \in \mathcal{P}(C)$, se verifica $A\Delta X = X\Delta A = X$.

Solución. 1. Escribamos los subconjuntos de U atendiendo a su número de elementos:
Con 0 elementos: $\emptyset$. Con 1 elemento: $\{a\}$, $\{b\}$,$\{c\}$,$\{d\}$. Con 2 elementos: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$,$\{b, d\}$, $\{c, d\}$. Con 3 elementos: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. Con 4 elementos: U. Por tanto

$$\mathcal{P}(U) = \{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\},$$
$$\{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, U\ \}.$$

2. Claramente $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ y $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. Para hallar con más claridad $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right)$, podemos considerar un conjunto $U=\{a,b\}$ y determinar $\mathcal{P}(U)$:

$$\mathcal{P}(U)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\,.$$

Ahora, basta sustituir a por $\emptyset$ y b por $\{\emptyset\}$:

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\,.$$

3. $\mathbb{Z}^c$ está formado por los elementos de $\mathbb{Q}$ que no están en $\mathbb{Z}$, es decir por los números racionales que no son enteros. Por tanto:

$$\mathbb{Z}^c=\{x\in\mathbb{Q}: x \text{ no es fracción entera}\}.$$

$\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ está formado por los elementos de $\mathbb{Z}$ que no están en $\mathbb{N}$, es decir por los números enteros negativos

$$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{-1,-2,-3,\ldots\}.$$

4. Contemos los subconjuntos de A, atendiendo al número de elementos. Hay $1=\binom{n}{0}$ subconjuntos con 0 elementos (el conjunto vacío). Hay $n=\binom{n}{1}$ subconjuntos con 1 elemento, $\binom{n}{2}$ con dos elementos, ... , $\binom{n}{k}$ con k elementos, ... , $1=\binom{n}{n}$ con n elementos (el conjunto A). Sumando y aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos el cardinal de $\mathcal{P}(A)$:

$$\begin{aligned}\text{card }\mathcal{P}(A)&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\\&=\binom{n}{0}1^n\cdot 1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1^1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n}1^0\cdot 1^n\\&=(1+1)^n=2^n=2^{\text{card }A}.\end{aligned}$$

5. Demostremos el doble contenido. Tenemos:

$$x\in A\Delta B\Rightarrow x\in(A-B)\cup(B-A)\Rightarrow\begin{cases}x\in A-B\\ \quad\text{o}\\ x\in B-A\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x\in A \text{ y } x\notin B\\ \qquad\text{o}\\ x\in B \text{ y } x\notin A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\cup B \text{ y } x\notin A\cap B\\ \qquad\qquad\text{o}\\ x\in A\cup B \text{ y } x\notin A\cap B\end{cases}\Rightarrow x\in(A\cup B)-(A\cap B).$$

Es decir, $A\Delta B\subset(A\cup B)-(A\cap B)$. Por otra parte:

$$x\in(A\cup B)-(A\cap B)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\cup B\\ \quad\text{y}\\ x\notin A\cap B\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Caso 1. } x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A - B \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ \text{Caso 2. } x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in B - A \end{cases} \Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A).$$

Es decir, $(A \cup B) - (A \cap B) \subset A \Delta B$.

6. Para demostrar la igualdad dada, podemos demostrar el doble contenido. Sin embargo, optaremos por considerar A y B contenidos en otro conjunto U que hace el papel de universal (por ejemplo, $U = A \cup B$). Entonces, usando conocidas propiedades:

$$\begin{aligned} &(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} &(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) \\ &= (A \cap A) \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Es decir, la unión es disjunta.

7. Usando las propiedades del complementario y la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$\begin{aligned} &A - (B - C) = A \cap (B - C)^c = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup (C^c)^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

8. La diferencia simétrica Δ es operación conmutativa. En efecto:

$$A \Delta X = A \cup X - A \cap X = X \cup A - X \cap A = X \Delta A.$$

por tanto, el problema equivale a demostrar que existe un único $A \in \mathcal{P}(C)$ tal que para todo $X \in \mathcal{P}(C)$, se verifica $A \Delta X = X$.
Unicidad. Si tal A existe, se ha de cumplir $A \Delta X = X$ para todo $X \in \mathcal{P}(C)$, en particular para $X = C$. Pero

$$A \Delta C = C \Leftrightarrow A \cup C - A \cap C = C \Leftrightarrow C - A = C,$$

y la última igualdad solamente se verifica si $A = \emptyset$.
Existencia. Si $A = \emptyset$, se verifica

$$A \Delta X = \emptyset \Delta X = \emptyset \cup X - \emptyset \cap X = X - \emptyset = X.$$

Queda pues demostrada la propiedad requerida.

1.8. Propiedades del complementario

En $\mathcal{P}(U)$ demostrar:
1. $\emptyset^c = U,\ U^c = \emptyset$.
2. $(A^c)^c = A$.
3. (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de Morgan). 4. $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
5. (a) $A \cup A^c = U$. $\quad (b)$ $A \cap A^c = \emptyset$.

Solución. 1. Tenemos $\emptyset^c = \{x \in U : x \notin \emptyset\}$. Pero todo elemento $x \in U$ no pertenece a $\emptyset$, en consecuencia $\emptyset^c = U$. Tenemos $U^c = \{x \in U : x \notin U\}$. Pero ningún elemento x puede a la vez pertenecer y no pertenecer a U, en consecuencia $U^c = \emptyset$.

2. Por una parte, $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c = \{y \in U : y \notin A\} \Rightarrow x \in A$, es decir, $(A^c)^c \subset A$. Por otra, $x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c$, es decir $A \subset (A^c)^c$.

3. (a) Demostramos directamente la igualdad escribiendo equivalencias:

$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ y $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ y $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

(b) Análogamente:

$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ o $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ o $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

4. Si $x \in B^c$, entonces $x \notin B$. Como por hipótesis $A \subset B$, se verifica $x \notin A$, es decir $x \in A^c$.

5. (a) Los conjuntos A y A^c están contenidos en U por las definiciones de conjunto universal y de complementario. Por tanto, si $x \in A \cup A^c$, o bien $x \in A$ o bien $x \in A^c$ y en ambos casos $x \in U$. Es decir, $A \cup A^c \subset U$. Si $x \in U$, o bien $x \in A$, o bien $x \notin A$. De forma equivalente, o bien $x \in A$ o bien $x \in A^c$ lo cual implica que $x \in A \cup A^c$. Es decir, $U \subset A \cup A^c$.
(b) Tenemos las equivalencias

$$x \in A \cap A^c \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in A^c \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \notin A.$$

No existe elemento alguno x tal que $x \in A$ y $x \notin A$, lo cual implica que $A \cap A^c = \emptyset$.

1.9. Simplificaciones en las partes de un conjunto

1. Siendo A, B, C subconjuntos de un conjunto universal U, determinar el complementario del conjunto $(A \cup B^c \cup C^c) \cap (A \cup B \cup C^c)$.

2. Demostrar que $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$ es el conjunto universal.
3. Simplificar la expresión $[(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap C^c] \cup (A^c \cap B)$.

Solución. 1. Llamemos D al conjunto dado. Usando reiteradamente las leyes de Morgan y la propiedad $(M^c)^c = M$:

$$D^c = (A \cup B^c \cup C^c)^c \cup (A \cup B \cup C^c)^c = (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C).$$

Reagrupando y usando la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$D^c = [(A^c \cap C) \cap B] \cup [(A^c \cap C) \cap B^c]$$

$$= (A^c \cap C) \cap (B \cup B^c) = (A^c \cap C) \cap U = A^c \cap C.$$

2. Llamemos C al conjunto dado. Por la propiedad asociativa de la unión:

$$C = [(A \cap B) \cup (A^c \cap B)] \cup [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)] .$$

Aplicando la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$C = [(A \cup A^c) \cap B] \cup [(A \cup A^c) \cap B^c] .$$

Por último, llamando U al conjunto universal, y aplicando conocidas propiedades del complementario:

$$C = (U \cap B) \cup (U \cap B^c) = B \cup B^c = U.$$

3. Llamemos D al conjunto dado y U al universal. Aplicando la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$[(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap C^c]$$

$$= (A \cap B) \cap (C \cup C^c) = (A \cap B) \cap U = A \cap B.$$

Es decir, $D = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$. Usando de nuevo la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$D = (A \cup A^c) \cap B = U \cap B = B.$$

1.10. Producto cartesiano

1. Dados $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2\}$ determinar $A \times B$ y $B \times A$.
2. Dados $A = \{1, 2\}, B = \{a\}, C = \{1, 3\}$ determinar $A \times B \times C$. 3. Demostrar que $A' \subset A, B' \subset B \Rightarrow A' \times B' \subset A \times B$.
4. Demostrar que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
5. Demostrar que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Solución. 1. De acuerdo con la definición de producto cartesiano:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}, B \times A = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}.$$

2. De acuerdo con la definición de producto cartesiano de varios conjuntos

$$A \times B \times C = \{(1,a,1),(1,a,3),(2,a,1),(2,a,3)\}.$$

3. Sea $(a,b) \in A' \times B'$. Por definición de producto cartesiano, $a \in A'$ y $b \in B'$. Como por hipótesis $A' \subset A$ y $B' \subset B$, también $a \in A$ y $b \in B$ lo cual implica que $(a,b) \in A \times B$.

4. Tenemos las equivalencias:

$$\begin{gathered}(a,b) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \text{ y } b \in B \cup C \Leftrightarrow a \in A \text{ y } (b \in B \text{ o } b \in C)\\ \Leftrightarrow (a \in A \text{ y } b \in B) \text{ o } (a \in A \text{ y } b \in C) \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B \text{ o } (a,b) \in A \times C\\ \Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C),\end{gathered}$$

lo cual demuestra la igualdad dada.

5. Tenemos las equivalencias:

$$\begin{gathered}(a,b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \text{ y } b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A \text{ y } (b \in B \text{ y } b \in C)\\ \Leftrightarrow (a \in A \text{ y } b \in B) \text{ y } (a \in A \text{ y } b \in C) \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B \text{ y } (a,b) \in A \times C\\ \Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C),\end{gathered}$$

lo cual demuestra la igualdad dada.

1.11. Unión e intersección generalizadas

1. Se considera el conjunto de índices $J = \{j : j \text{ es letra vocal}\}$. Escribir los conjuntos que componen la familia indexada $\{A_j\}$. Escribir de otra manera $\cup_j A_j$ y $\cap_j A_j$.

2. Sea $I = [0,1]$ y, para cada $i \in I$, sea $A_i = [0,i]$. Determinar $A_{1/3} \cup A_{2/3}$ y $A_{1/3} \cap A_{2/3}$.

3. Sea $B_n = (0, 1/n)$, donde $n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$. Hallar:

(i) $B_4 \cup B_9$. (ii) $B_5 \cap B_8$. (iii) $B_s \cup B_t$.
(iv) $B_s \cap B_t$. (v) $\bigcup_{i \in A \subset \mathbb{N}^*} B_i$. (vi) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} B_i$.

4. Demostrar que para cualquier clase de conjuntos $\{A_i\}$ y para cualquier conjunto B se verifica $B \cup (\cap_i A_i) = \cap_i (B \cup A_i)$ (propiedad distributiva de

la unión respecto de la intersección).

5. Demostrar que para cualquier clase de conjuntos $\{A_i\}$ y para cualquier conjunto B se verifica $B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$ (propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión).

6. Demostrar que para cualquier clase de subconjuntos $\{A_i\}$ de un universal U, se verifica la ley de Morgan: $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$.

7. Demostrar que para cualquier clase de subconjuntos $\{A_i\}$ de un universal U se verifica la ley de Morgan: $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$.

Solución. 1. Los conjuntos que forman la familia indexada son A_a, A_e, A_i, A_o y A_u. Podemos escribir

$$\cup_j A_j = A_a \cup A_e \cup A_i \cup A_o \cup A_u \cap_j A_j = A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u.$$

2. Tenemos $A_{1/3} = [0, 1/3]$ y $A_{2/3} = [0, 2/3]$, por tanto

$$A_{1/3} \cup A_{2/3} = [0, 2/3] = A_{2/3}\ , \quad A_{1/3} \cap A_{2/3} = [0, 1/3] = A_{1/3}.$$

3. (i) Como $4 < 9$, se verifica $1/9 < 1/4$ y por tanto $(0, 1/9) \subset (0, 1/4)$. Esto implica por la definición de los B_n que $B_9 \subset B_4$, en consecuencia $B_4 \cup B_9 = B_4$.

(ii) Como $5 < 8$, se verifica $1/8 < 1/5$ y por tanto $(0, 1/8) \subset (0, 1/5)$. Esto implica por la definición de los B_n que $B_8 \subset B_5$, en consecuencia $B_5 \cap B_8 = B_8$.

(iii) Llamemos $m = \text{mín}\{s, t\}$. Entonces, $1/s \leq 1/m$ y $1/t \leq 1/m$, lo cual implica que $B_s \subset B_m$ y $B_t \subset B_m$. Además, o bien $s = m$ o bien $t = m$, es decir $B_s = B_m$ o $B_t = B_m$. En consecuencia, $B_s \cup B_t = B_m$.

(iv) Llamemos $M = \text{máx}\{s, t\}$. Entonces, $1/M \leq 1/s$ y $1/M \leq 1/t$ lo cual implica que $B_M \subset B_s$ y $B_M \subset B_t$. Además, o bien $s = M$ o bien $t = M$, es decir $B_s = B_M$ o $B_t = B_M$. En consecuencia, $B_s \cap B_t = B_M$.

(v) Llamemos $a = \text{mín}\{i : i \in A\}$. Entonces, $1/i \leq 1/a$ y $1/i \leq 1/a$ para todo $i \in A$ lo cual implica que $B_i \subset B_a$ para todo $i \in A$. Además, A_a es uno de los A_i. En consecuencia, $\bigcup_{i \in A \subset \mathbb{N}^*} B_i = A_a$.

(vi) Si $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} B_i$, entonces $x \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, es decir $0 < x < 1/i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Ahora bien, $\lim_{i \to \infty} 1/i = 0$ con lo cual existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$

tal que $0 < 1/i_0 < x$. Esto quiere decir que $x \notin B_{i_0}$ y por tanto no puede estar en la intersección de todos los B_i. De ésta contradicción deducimos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} B_i = \emptyset$.

4. Veamos el contenido de izquierda a derecha:

$$x \in B \cup (\cap_i A_i) \Rightarrow (x \in B) \text{ o } (x \in \cap_i A_i) \Rightarrow (x \in B) \text{ o } (x \in A_i \ \ \forall i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in B \cup A_i \ \ \forall i & \text{si} \quad x \in B \\ x \in B \cup A_i \ \ \forall i & \text{si} \quad x \in A_i \ \ \forall i \end{cases} \Rightarrow x \in \cap_i (B \cup A_i).$$

Veamos el otro contenido:

$$x \in \cap_i (B \cup A_i) \Rightarrow x \in B \cap A_i \ \ \forall i \Rightarrow \begin{cases} x \in B \cup (\cap_i A_i) & \text{si} \quad x \in B \\ x \in A_i \ \ \forall i & \text{si} \quad x \notin B \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in B \cup (\cap_i A_i) & \text{si} \quad x \in B \\ x \in \cap_i A_i & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup (\cap_i A_i).$$

5. Por una parte:

$$x \in B \cap (\cup_i A_i) \Rightarrow (x \in B) \text{ y } (x \in \cup_i A_i)$$

$$\Rightarrow (x \in B) \text{ y } (\exists i_0 : x \in A_{i_0}) \Rightarrow x \in B \cap A_{i_0} \Rightarrow x \in \cup_i (B \cap A_i)$$

es decir, $B \cap (\cup_i A_i) \subset \cup_i (B \cap A_i)$. Veamos ahora la otra inclusión:

$$x \in \cup_i (B \cap A_i) \Rightarrow \exists i_0 : x \in B \cap A_{i_0}$$

$$\Rightarrow \exists i_0 : x \in B \text{ y } x \in A_{i_0} \Rightarrow x \in B \text{ y } x \in \cup_i A_i \Rightarrow x \in B \cap (\cup_i A_i),$$

es decir, $\cup_i (B \cap A_i) \subset B \cap (\cup_i A_i)$. Hemos demostrado la igualdad dada.

6. Para todo x elemento de U tenemos las equivalencias:

$$x \in (\cup_i A_i)^c \Leftrightarrow x \notin \cup_i A_i \Leftrightarrow x \notin A_i \ \ \forall i \Leftrightarrow x \in A_i^c \ \ \forall i \Leftrightarrow x \in \cap_i A_i^c.$$

Es decir, $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$.

7. Para todo x elemento de U tenemos las equivalencias:

$$x \in (\cap_i A_i)^c \Leftrightarrow x \notin \cap_i A_i \Leftrightarrow \exists i : x \notin A_i \Leftrightarrow \exists i : x \in A_i^c \Leftrightarrow x \in \cup_i A_i^c,$$

es decir, $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$.

1.12. Función característica

Sea X un conjunto y $M \subset X$. La función característica de M se define como la función $\mathbf{1}_M : X \to \{0,1\}$

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M \\ 0 & \text{si } x \notin M. \end{cases}$$

Demostrar que para todo A, B subconjuntos de X se verifica:
(i) $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \Leftrightarrow A = B$
(ii) $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$.
(iii) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.
(iv) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.
(v) $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

Solución. (i) $\Rightarrow$) Si $x \in A$, entonces $\mathbf{1}_A(x) = 1$. Por hipótesis, $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, luego $\mathbf{1}_B(x) = 1$ lo cual implica que $x \in B$. Hemos demostrado que $A \subset B$. Razonamiento análogo para $B \subset A$.
$\Leftarrow$) Por hipótesis $A = B$. Si $x \in A = B$, entonces $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1$. Si $x \notin A = B$, entonces $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 0$. Como $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x)$ para todo $x \in X$, concluimos que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

(ii) Tenemos:

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow \mathbf{1}_A(x) = 1 \text{ y } \mathbf{1}_{A^c}(x) = 0 \Rightarrow \mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$$
$$x \notin A \Rightarrow x \in A^c \Rightarrow \mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ y } \mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 \Rightarrow \mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x).$$

Como $\mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$ para todo $x \in X$, concluimos que $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$.

(iii) Se verifica:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1 \text{ y } \mathbf{1}_A(x) = 1 \text{ y } \mathbf{1}_B(x) = 1.$$

Es decir, si $x \in A \cap B$ entonces, $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$. Por otra parte,

$$x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B \Rightarrow \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0 \text{ y } \left(\mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ o } \mathbf{1}_B(x) = 0\right).$$

Por tanto, si $x \notin A \cap B$, también $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$. Concluimos que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

(iv) Si $x \in A \cup B$, entonces $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 1$. Según los distintos casos tenemos:

$$x \in A \cap B \Rightarrow \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1$$
$$x \in A \text{ y } x \notin B \Rightarrow \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1$$
$$x \notin A \text{ y } x \in B \Rightarrow \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x) = 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1.$$

Si $x \notin A \cup B$, entonces $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 0$. Dado que $x \notin A$ y $x \notin B$:

$$\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $\forall x \in X$ se verifica $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(x)$ lo cual implica que $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

(v) Para todo $x \in X$ se verifica $\mathbf{1}_\emptyset(x) = 0$ pues $x \notin \emptyset$. Es decir, $\mathbf{1}_\emptyset = \mathbf{0}$ (función nula). Por los apartados (iii) y (iv), $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$ y si $A \cap B = \emptyset$ queda $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
La diferencia simétrica $A\Delta B$ es igual a $(A - B) \cup (B - A)$ siendo ésta unión disjunta, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{A-B} + \mathbf{1}_{A-B} = \mathbf{1}_{A\cap B^c} + \mathbf{1}_{B\cap A^c} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{B^c} + \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{A^c} \\ &= \mathbf{1}_A \cdot (1 - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B \cdot (1 - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.\end{aligned}$$

1.13. Asociatividad de la diferencia simétrica

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto universal X. Usando propiedades de la función característica, demostrar la propiedad asociativa de la diferencia simétrica, es decir $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Solución. Para cualquier par de subconjuntos M y N de X, sabemos que $M = N$ si y sólo si $\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_N$. Bastará pues demostrar que

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}. \quad (1)$$

Sabemos también que

$$\mathbf{1}_{M\Delta N} = \mathbf{1}_M + \mathbf{1}_N - 2 \cdot \mathbf{1}_M \cdot \mathbf{1}_N.$$

Desarrollemos separadamente $\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ y $\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbf{1}_{(A\Delta B)} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{(A\Delta B)} \cdot \mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\,(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B) \cdot \mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C + 4 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{(B\Delta C)} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(B\Delta C)} \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_A\,(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C + 4 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C.\end{aligned}$$

Se verifica (1), por tanto $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

1.14. Partes de uniones e intersecciones

Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto E. Demostrar que:
(a) $\mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$.
(b) $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \subset \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.
(c) Poner un contraejemplo que demuestre que en general no se verifica la igualdad en el apartado (b).

Solución. (a) Tenemos las equivalencias:

$$\begin{gathered} A \in \mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow A \subset \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow A \subset A_i \ \ \forall i \in I \\ \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(A_i) \ \ \forall i \in I \Leftrightarrow A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i), \end{gathered}$$

es decir, $\mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$.

(b) Tenemos las implicaciones:

$$\begin{gathered} A \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \Rightarrow \exists i_0 \in I : A \in \mathcal{P}(A_{i_0}) \\ \Rightarrow A \subset A_{i_0} \Rightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow A \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), \end{gathered}$$

lo cual demuestra la inclusión pedida.

(c) Elijamos $E = \{a, b\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$. Entonces:

$$\begin{gathered} \mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{a\}\}, \quad \mathcal{P}(A_2) = \{\emptyset, \{b\}\} \\ \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \end{gathered}$$

y $\mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \neq \mathcal{P}(A_1 \cup A_2)$.

1.15. Cardinales de las σ-álgebras contables

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra contable en X, es decir card $(\mathcal{A}) \leq \aleph_0$. Entonces, $\mathcal{A}$ es finita. Además, existe un n natural tal que card $(\mathcal{A}) = 2^n$.

Solución. Definimos en X la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \ \wedge \ y \in A) \Rightarrow x \in \mathcal{A}.$$

Es decir $x \sim y$ si y sólo si todo conjunto medible que contiene a y también contiene a x. Veamos que esta relación es de equivalencia en X.
(a) Reflexiva. Si un conjunto medible contiene a x, trivialmente contiene a x, es decir $x \sim x$.
(b) Simétrica. Sea $x \sim y$. Si ocurriera $y \not\sim x$, existiría un $B \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B, y \in B^c$. Ahora bien, $B^c \in \mathcal{A}$, $y \in B^c$ y $x \notin B^c$ lo cual contradice la hipótesis $x \sim y$.

(c) Transitiva. Supongamos $x \sim y$ e $y \sim z$ Si A es medible y contiene a z, entonces también contiene a y por ser $y \sim z$. Por contener a y, y ser $x \sim y$ también contiene a x. Es decir, $x \sim z$.

Veamos ahora que la clase $[x]$ a la que pertenece un elemento x de X es:

$$[x] = \bigcap \{A : A \in \mathcal{A} \ \wedge \ x \in A\}. \qquad (1)$$

En efecto, si $u \in [x]$, entonces $u \sim x$ con lo cual todo A medible que contiene a x también contiene a u y por tanto $u \in \bigcap \{A : A \in \mathcal{A} \ \wedge \ x \in A\}$. Recíprocamente, si $u \in \bigcap \{A : A \in \mathcal{A} \ \wedge \ x \in A\}$, todo conjunto medible que contiene a x también contiene a u y por tanto, $u \sim x$ o equivalentemente, $u \in [x]$. Esto demuestra (1). Por otra parte, es claro que para todo $A \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$A = \bigcup_{\{x \in A\}} [x]. \qquad (2)$$

Por hipótesis, $\mathcal{A}$ es σ-álgebra contable lo cual implica por (1) que las clases de equivalencia de $\sim$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Veamos ahora que el número de clases de equivalencia $[x_i]$ es finito.
En efecto, si fuera infinito tendría que ser necesariamente numerable y por formar estas clases una partición, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [x_k]$ (unión disjunta). Cada par de subconjuntos distintos N_1, N_2 de $\mathbb{N}$ darían lugar a los conjuntos distintos de $\mathcal{A} : A_1 = \bigcup_{i \in N_1} [x_i]$ y $A_2 = \bigcup_{j \in N_2} [x_j]$. Esto implicaría que el cardinal de $\mathcal{A}$ sería al menos $2^{\aleph_0}$ lo cual es absurdo por ser $\mathcal{A}$ numerable.

Sea pues $C = \{[a_1], \ldots, [a_n]\}$ el conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Por (2), todo elemento de $\mathcal{A}$ es unión de clases de equivalencia y cada par de subconjuntos distintos C_1, C_2 de C dan lugar a los conjuntos distintos de $\mathcal{A} : B_1 = \bigcup_{i \in N_1} [a_i]$ y $B_2 = \bigcup_{j \in N_2} [a_j]$. Es decir, el número de elementos de $\mathcal{A}$ es

$$\text{card } (\mathcal{A}) = \text{card } (\mathcal{P}(C)) = 2^{\text{card } (C)} = 2^n.$$

Capítulo 2

Relaciones

2.1. Concepto de relación binaria

1. Analizar si son reflexivas las relaciones en $A = \{a, b, c\}$:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a)\}, \quad S = \{(a, b), (b, b), (c, a)\}.$$

2. Analizar si son simétricas las relaciones:
a) En el conjunto de las rectas del plano, $rRs \Leftrightarrow r$ es perpendicular a s.
b) En $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$.

3. Analizar si son transitivas las relaciones:
a) En $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$.
b) En $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 1)\}$.

4. Analizar si son antisimétricas las relaciones:
a) En $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$.
b) En $\mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$.

5. En el conjunto $\mathcal{P}(U)$ (partes de U), se define la relación $ARB \Leftrightarrow A \subset B$. Estudiar cuales de las siguientes propiedades cumple: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica.

6. En el conjunto $\mathbb{R}$ se define la relación $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$. Estudiar cuales de las siguientes propiedades cumple: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica.

7. Sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ una relación definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Estudiar cuales de las siguientes propiedades cumple: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica.

Solución. 1. La relación R es reflexiva pues para todo $x \in A$ se verifica xRx. Sin embargo, la relación S no es reflexiva pues por ejemplo $a \not R a$.

2. a) Es simétrica, pues si r es perpendicular a s entonces s es perpendicular a r. Es decir, rRs. implica sRr.
b) No es simétrica, pues por ejemplo $0R1$, pero $1 \not R 0$.

3. a) Es transitiva pues si xRy e yRz, entonces $x \leq y$ e $y \leq z$ y por tanto $x \leq z$. Es decir xRz.
b) No es transitiva pues por ejemplo $1R2$, $2R3$, y $1 \not R 3$.

4. a) Es antisimétrica pues si xRy e yRx, entonces $x \leq y$ e $y \leq x$ y por tanto $x = y$.
b) No es antisimétrica, pues por ejemplo $(-1)R1$, $1R(-1)$ y sin embargo, $-1 \neq 1$.

5. Reflexiva. Se cumple, pues para todo $A \in \mathcal{P}(U)$ se verifica $A \subset A$.
Simétrica. No se verifica, si $A \subset B$ con $A \neq B$, entonces $B \not\subset A$.
Transitiva. Se cumple, si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.
Antisimétrica. Se cumple, si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$.

6. Reflexiva. Se cumple, pues para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $|x| = |x|$.
Simétrica. Se cumple, pues si $|x| = |y|$ entonces $|y| = |x|$.
Transitiva. Se cumple, pues si $|x| = |y|$ y $|y| = |z|$ entonces $|x| = |z|$.
Antisimétrica. No se verifica, por ejemplo $|-1| = |1|$, $|1| = |-1|$ y sin embargo $-1 \neq 1$.

7. Reflexiva. No se verifica, pues $4 \not R 4$.
Simétrica. No se verifica, pues $2R3$ pero $3 \not R 2$.
Transitiva. No se verifica, pues $1R2$ y $2R3$ pero $1 \not R 3$.
Antisimétrica. No se verifica, pues $1R2$, $2R1$ pero $1 \neq 2$.

2.2. Relaciones de equivalencia (1)

A. En $\mathbb{R}$ se define la relación $aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$.

(*a*) Demostrar que R es relación de equivalencia.
(*b*) Determinar la clase a la que pertenece 5.
(*c*) Determinar el conjunto cociente $\mathbb{R}/R$.

B. En el conjunto $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación: $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Demostrar que R es relación de equivalencia y determinar el conjunto cociente E/R.

C. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se considera la relación de equivalencia $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$. Determinar el conjunto cociente A/R.

Solución. A. (a) *Reflexiva.* Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica $a^2 - a^2 = a - a$, en consecuencia aRa.
Simétrica. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

$$aRb \Rightarrow a^2 - b^2 = a - b \Rightarrow b^2 - a^2 = b - a \Rightarrow bRa.$$

Transitiva. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a - b \\ b^2 - c^2 = b - c \end{cases} \Rightarrow \text{(sumando) } a^2 - c^2 = a - c \Rightarrow aRc.$$

La relación R es por tanto de equivalencia.

(b) La clase a la que pertenece 5 es:

$$C[5] = \{x \in \mathbb{R} : xR5\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5^2 = x - 5\}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 5^2 = x - 5 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) = (x - 5)$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) - (x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ o } x = -4.$$

La clase pedida es por tanto $C[5] = \{5, -4\}$.

(c) Sea $a \in \mathbb{R}$. La clase a la que pertenece a es:

$$C[a] = \{x \in \mathbb{R} : xRa\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - a^2 = x - a\}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow (x + a)(x - a) = (x - a)$$

$$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) - (x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x + a - 1) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ o } x = 1 - a.$$

Es decir, $C[a] = \{a, 1 - a\}$, y el conjunto cociente es:

$$\mathbb{R}/R = \{\{a, 1 - a\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Nótese que cada clase tiene dos elementos, salvo en el caso $a = 1 - a$ (es decir, $a = 1/2$) que sólo tiene un elemento: $C[1/2] = \{1/2\}$.

B. *Reflexiva.* Para todo $(x, y) \in E$ se verifica $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, en consecuencia $(x, y)R(x, y)$.
Simétrica. Para todo $(x, y), (z, t) \in E$:

$$(x, y)R(z, t) \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \Rightarrow z^2 + t^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (z, t)R(x, y).$$

Transitiva. Para todo $(x, y), (z, t), (u, v) \in E$:

$$\begin{cases} (x, y)R(z, t) \\ (z, t)R(u, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \\ z^2 + t^2 = u^2 + v^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow (x, y)R(u, v).$$

La relación R es por tanto de equivalencia. Determinemos una clase genérica, para ello elijamos $(x_0, y_0) \in E$ fijo. La clase a la que pertenece (x_0, y_0) es:

$$C[(x_0, y_0)] = \{(x, y) \in E : (x, y)R(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in E : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}.$$

Dado que $x_0^2 + y_0^2 \geq 0$, la clase $C[(x_0, y_0)]$ representa una circunferencia de centro el origen y radio $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. En consecuencia,

$$E/R = \{C_r : r \geq 0\} \quad (C_r \text{ circunf. de centro } (0, 0) \text{ y radio } r).$$

Nótese que para $r = 0$, la circunferencia consta de un único punto: el $(0, 0)$.

C. Sea $a \in \mathbb{R}$. La clase de equivalencia determinada por a es:

$$[a] = \{x \in \mathbb{R} : xRa\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = |a|\} = \{-a, a\}$$

por tanto, el conjunto cociente es: $A/R = \{\{-a, a\} : a \in \mathbb{R}\}$.

2.3. Relaciones de equivalencia (2)

A. Sea X el conjunto de todas funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dadas $x(t), y(t) \in X$ se define la relación:

$$x(t)Ry(t) \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{x(t) - y(t)}{t^2} = 0.$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia.

B. En el conjunto $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x = z$. Demostrar que R es relación de equivalencia e identificar geométricamente el conjunto cociente E/R.

C. Sea X el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dadas $x, y \in X$ se define la relación $xRy \Leftrightarrow \exists c > 0 : x(t) = y(t)$ para $|t| < |c|$. Demostrar que R es una relación de equivalencia.

Solución. A. *Reflexiva.* Para todo $x(t) \in X$ se verifica:

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(t) - x(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

es decir, $x(t)Rx(t)$.

Simétrica. Para todo $x(t), y(t) \in X$ se verifica:

$$\begin{aligned} x(t)Ry(t) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - y(t)}{t^2} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{y(t) - x(t)}{t^2} \\ = -\lim_{t\to 0} \frac{x(t) - y(t)}{t^2} = -0 = 0 \Rightarrow y(t)Rx(t). \end{aligned}$$

Transitiva. Para todo $x(t), y(t), z(t) \in X$ se verifica:

$$\begin{cases} x(t)Ry(t) \\ y(t)Rz(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t\to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^2} = 0 \\ \lim_{t\to 0} \dfrac{y(t) - z(t)}{t^2} = 0, \end{cases}$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - z(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - y(t) + y(t) - z(t)}{t^2} \\ = \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - y(t)}{t^2} + \lim_{t\to 0} \frac{y(t) - z(t)}{t^2} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x(t)Rz(t). \end{aligned}$$

La relación R es por tanto de equivalencia.

B. *Reflexiva.* Para todo $(x, y) \in E$ se verifica $x = x$, en consecuencia $(x, y)R(x, y)$.
Simétrica. Para todo $(x, y), (z, t) \in E$:

$$(x, y)R(z, t) \Rightarrow x = z \Rightarrow z = x \Rightarrow (z, t)R(x, y).$$

Transitiva. Para todo $(x, y), (z, t), (u, v) \in E$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y)R(z, t) \\ (z, t)R(u, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ z = u \end{cases} \\ \Rightarrow x = u \Rightarrow (x, y)R(u, v). \end{aligned}$$

La relación R es por tanto de equivalencia. Determinemos una clase genérica, para ello elijamos $(x_0, y_0) \in E$ fijo. La clase a la que pertenece (x_0, y_0) es:

$$C[(x_0, y_0)] = \{(x, y) \in E : (x, y)R(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in E : x = x_0\}.$$

La clase $C[(x_0, y_0)]$ representa la recta vertical $r : x = x_0$, por tanto podemos identificar A/R como el conjunto cuyos elementos son las rectas verticales del plano.

C. *Reflexiva.* Para toda $x \in X$ se verifica trivialmente $x(t) = x(t)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para $|t| < c$ siendo $c > 0$ cualquiera. Es decir, xRx.
Simétrica. Para todo $x, y \in X$ se verifica:

$$\begin{aligned} xRy &\Rightarrow \exists c > 0 : x(t) = y(t) \text{ para } |t| < |c| \\ &\Rightarrow y(t) = x(t) \text{ para } |t| < |c| \Rightarrow yRx. \end{aligned}$$

Transitiva. Para todo $x, y, z \in X$ se verifica:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists c_1 > 0 : x(t) = y(t) \text{ para } |t| < |c_1| \\ \exists c_2 > 0 : y(t) = z(t) \text{ para } |t| < |c_2|. \end{cases}$$

Esto implica que $x(t) = z(t)$ si $|t| < |c|$ siendo $c = \text{mín}\{|c_1|, |c_2|\}$, es decir xRz. La relación R es por tanto de equivalencia.

2.4. Relaciones de orden

1. Demostrar que en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la relación xRy si y sólo si $x \leq y$, es de orden.

2. Demostrar que en el conjunto $\mathcal{P}(U)$ de las partes de un conjunto U, la relación XRY si y sólo si $X \subset Y$, es de orden.

3. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la relación $xRy \Leftrightarrow x^3 \leq y^3$. Demostrar que R es relación de orden.

4. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define la relación $xRy \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$. Analizar si R es relación de orden.

5. En el conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se define la relación $xRy \Leftrightarrow x$ divide a y. Demostrar que R es relación de orden.

6. En $\mathbb{Z}$, se define la relación $xRy \Leftrightarrow x = 5y$. Analizar si es relación de orden.

7. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define la relación xRy, si y sólo si, existe un número entero no negativo n tal que $y - x = 2n$. Analizar si R es relación de orden.

8. Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las relaciones binarias en A. Se define en $\mathcal{R}$ la relación $R \leq S \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow xSy \quad (\forall x, y \in A))$. Demostrar que $\leq$ es relación de orden en $\mathcal{R}$.

Solución. 1. En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $x \leq x$ (reflexiva). Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$ (antisimétrica). Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitiva).

2. Demostrar que en el conjunto $\mathcal{P}(U)$ de las partes de un conjunto U, la relación XRY si y sólo si $X \subset Y$, es de orden.

3. (i) Reflexiva. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $x^3 \leq x^3$, es decir xRx. (ii) Antisimétrica. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq y^3 \\ y^3 \leq x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y^3} \Rightarrow x = y.$$

(iii) Transitiva. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq y^3 \\ y^3 \leq z^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 \leq z^3 \Rightarrow xRz.$$

4. (i) Reflexiva. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se verifica $x^2 \leq x^2$, es decir xRx.
(ii) Antisimétrica. No se verifica. En efecto, se cumple $(-1)^2 \leq 1^2$ y $1^2 \leq (-1)^2$, es decir $(-1)R1$ y $1R(-1)$. Sin embargo, $-1 \neq 1$. Concluimos que R no es relación de orden.

5. El que x divida a y equivale a decir que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $y = kx$.
(i) Reflexiva. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $x = 1x$, es decir xRx.
(ii) Antisimétrica. Para todo $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx \\ \exists r \in \mathbb{N}^* : x = ry \end{cases} \Rightarrow xy = krxy \Rightarrow kr = 1.$$

Ahora bien, como k, r son naturales, ha de ser necesariamente $k = r = 1$ y por tanto $x = y$.
(iii) Transitiva. Para todo $x, y, z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx \\ \exists r \in \mathbb{N}^* : z = ry \end{cases} \Rightarrow z = (rk)x.$$

Dado que $rk \in \mathbb{N}^*$, se verifica xRz. Concluimos que R es relación de orden.

6. Elijamos (por ejemplo) $x = 1$. Entonces, $1 \neq 5 \cdot 1$, es decir $1 \not R 1$. No se cumple la propiedad reflexiva, por tanto R no es relación de orden.

7. (i) Reflexiva. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $x - x = 2 \cdot 0$, es decir xRx.
(ii) Antisimétrica. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists n \text{ entero no negativo} : y - x = 2n \\ \exists m \text{ entero no negativo} : x - y = 2m \end{cases} \Rightarrow 0 = 2(n+m).$$

La igualdad $2(n+m) = 0$ implica $n + m = 0$. Ahora bien, como n, m son enteros no negativos, ha de ser necesariamente $n = m = 0$ y por tanto $x = y$.
(iii) Transitiva. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists n \text{ entero no negativo} : y - x = 2n \\ \exists m \text{ entero no negativo} : z - y = 2m \end{cases} \Rightarrow z - x = 2(n+m).$$

Dado que $n + m$ es entero no negativo, se verifica xRz. Concluimos que R es relación de orden.

8. Reflexiva. Para todo $R \in \mathcal{R}$, trivialmente se verifica $xRy \Rightarrow xRy$ para todo $x, y \in A$. Es decir, $R \leq R$.
Antisimétrica. Sean $R, S \in \mathcal{R}$ tales que $R \leq S$ y $S \leq R$. Entonces, para todo $x, y \in A$ se verifican las implicaciones $xRy \Rightarrow xSy$ y $xSy \Rightarrow xRy$. Por tanto, para todo $x, y \in A$ se verifica $xRy \Leftrightarrow xSy$, lo cual implica $R = S$.
Transitiva. Sean $R, S, T \in \mathcal{R}$. Entonces, para todo $x, y \in A$ se verifica:

$$\begin{cases} R \leq S \\ S \leq T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xRy \Rightarrow xSy \\ xSy \Rightarrow xTy \end{cases} \Rightarrow (xRy \Rightarrow xTy) \Rightarrow R \leq T.$$

Concluimos que $\leq$ es relación de orden en $\mathcal{R}$.

2.5. Máximo, mínimo, cotas

1. En $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ con el orden usual $\leq$, hallar, caso de existir los elementos mínimo y máximo.
2. En $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ con el orden usual $\leq$, hallar, caso de existir los elementos mínimo y máximo.
3. En $\mathbb{Z}$ con el orden usual $\leq$, hallar, caso de existir los elementos mínimo y máximo.
4. En $A = \{3, 7, 8, 12\}$ con el orden usual $\leq$, hallar, caso de existir los elementos mínimo y máximo.

5. En $\mathbb{R}$ con el orden usual, determinar las cotas superiores e inferiores de $B = (0, 1]$. ¿ Está B acotado?
6. Sea el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ con la relación de orden $x \leq y$ $\Leftrightarrow$ x divide a y. Se pide:
  (a) Analizar la existencia de máximo y mínimo en A.
  (b) Determinar las cotas superiores e inferiores de $B = \{6, 9\}$.
7. Dado $U = \{a, b, c\}$, se establece en $\mathcal{P}(U)$ la relación de orden inclusión. Se pide:
  (a) Analizar la existencia de máximo y mínimo en $\mathcal{P}(U)$.
  (b) Determinar las cotas superiores e inferiores del subconjunto de $\mathcal{P}(U) : B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Solución. **1.** De acuerdo con las definiciones de elemento mínimo y máximo, 0 es elemento mínimo y no existe elemento máximo.

2. De acuerdo con las definiciones de elemento mínimo y máximo, -1 es elemento máximo y no existe elemento mínimo.

3. De acuerdo con las definiciones de elemento mínimo y máximo, no existe ninguno de ellos.

4. De acuerdo con las definiciones de elemento mínimo y máximo, 3 es elemento mínimo y 12 es elemento máximo.

5. De acuerdo con las definiciones de cota superior e inferior, las cotas superiores son todos los números reales ≥ 1 y las inferiores, todos los números reales ≤ 0. Dado que existen cotas superiores e inferiores, B está acotado superior e inferiormente, por tanto está acotado.

6. (a) No existe elemento en A que divida a todos los de A, por tanto no existe mínimo. Tampoco existe elemento en A que sea dividido por todos los de A, por tanto no existe máximo.
(b) El único elemento a de A que cumple $a \leq 6$ y $a \leq 9$ es $a = 3$, en consecuencia 3 es la única cota inferior de B. Por otra parte, no existen elementos a en A que cumplan $6 \leq a$ y $8 \leq a$, en consecuencia B no tiene cotas superiores.

7. (a) Para todo X elemento de $\mathcal{P}(U)$, se verifica $\emptyset \subset X$, y $X \subset U$, por tanto $\emptyset$ es elemento mínimo y U es elemento máximo.
(b) Los elementos de $\mathcal{P}(U)$ que están contenidos en todos los de B, son $\emptyset$ y $\{a\}$ (cotas inferiores de B). Los elementos de $\mathcal{P}(U)$ que contienen a todos los de B, son $\{a, b\}$ y U (cotas superiores de B).

2.6. Supremo, ínfimo, maximales y minimales

1. En $\mathbb{R}$ con el orden usual, determinar ínf $(0,1]$ y sup $(0,1]$.
2. En $\mathbb{R}$ con el orden usual, determinar ínf $(-\infty,2)$ y sup $(-\infty,2)$.
3. En $\mathbb{R}$ con el orden $\leq$ usual, calcular:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \sup\{1/x : x \in [1,2]\}. & 2)\ \text{ínf}\{1/x : x \in (1,2)\}. \\ 3)\ \sup\{1/x : x > 0\}. & 4)\ \text{ínf}\{1/x : x \in [0,2]\}. \end{array}$$

4. Dado $U = \{a,b,c\}$, se establece en $\mathcal{P}(U)$ la relación de orden inclusión. Se pide:
(a) Hallar los elementos maximales de $\mathcal{P}(U) - \{U\}$.
(b) Hallar los elementos minimales de $\mathcal{P}(U) - \{\emptyset\}$.
5. Demostrar que si un conjunto tiene supremo (ínfimo), entonces es único.
6. Sea $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Demostrar que $a = \sup S$ si y sólo si $a \geq x$, $\forall x \in S$ y además $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in S$, tal que $x_0 > a - \epsilon$.
7. Sea el conjunto $S = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ con la relación de orden $x \leq y$ $\Leftrightarrow$ x divide a y. Se pide:
(a) Hallar los elementos maximales y minimales.
(b) Hallar los subconjuntos de S totalmente ordenados.

Solución. 1. El conjunto de las cotas inferiores de $(0,1]$ es $(-\infty,0]$, y el máximo de este último conjunto es 0, por tanto $\text{ínf}(0,1] = 0$. El conjunto de las cotas superiores de $(0,1]$ es $[1,+\infty)$, y el mínimo de este último conjunto es 1, por tanto $\sup(0,1] = 1$.

2. No existen cotas inferiores de $(-\infty,2)$, por tanto no existe $\text{ínf}(-\infty,2)$. El conjunto de las cotas superiores de $(-\infty,2)$ es $[2,+\infty)$, y el mínimo de este último conjunto es 2, por tanto $\sup(-\infty,2) = 2$.

3. 1) Cuando x recorre el intervalo $[1,2]$, $1/x$ recorre el $[1/2,1]$, por tanto el extremo superior es 1 (mínima de las cotas superiores).
2) Cuando x recorre el intervalo $(1,2)$, $1/x$ recorre el $(1/2,1)$, por tanto el extremo inferior es $1/2$ (máxima de las cotas inferiores).
3) Cuando x recorre el intervalo $(0,+\infty)$, $1/x$ recorre el $(0,+\infty)$, por tanto no existe extremo superior.
4) Como consecuencia de lo dicho en 3), el extremo inferior es 0 (máxima de las cotas inferiores).

4. (a) Tenemos $\mathcal{P}(U) - \{U\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$. De acuerdo con la definición, los elementos maximales de $\mathcal{P}(U) - \{U\}$ son:

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\}.$$

(b) Tenemos $\mathcal{P}(U)-\{\emptyset\}=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},U\}$. De acuerdo con la definición, los elementos minimales elementos de $\mathcal{P}(U)-\{U\}$ son:

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\}.$$

5. Sea A un conjunto con una relación de orden $\leq$, y sea $B \subset A$. Si existen dos supremos de B, e y e', entonces tanto e como e' son cotas superiores de B. Por ser e la menor de ellas, $e \leq e'$ y por ser e' la menor de ellas, $e' \leq e$. Por la propiedad antisimétrica, $e = e'$. Análoga demostración para el ínfimo.

6. Si $a = \sup S$, a es cota superior de S y por tanto, $a \geq x$ para todo $x \in S$. Por otra parte, si no ocurriera que $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in S$ tal que $x_0 > a - \epsilon$, entonces, existiría un $\epsilon_0 > 0$ tal que $x \leq a - \epsilon_0$ para todo $x \in S$. Esto implicaría que $a - \epsilon_0 < a$ sería cota superior de S lo cual contradice que a es la menor de las cotas superiores de S.

Recíprocamente, supongamos que $a \geq x$, $\forall x \in S$ y además $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in S$, tal que $x_0 > a - \epsilon$. La primera condición implica que a es cota superior de S. Es además la menor de todas ellas. En efecto, si $b < a$ fuera cota superior de S, eligiendo $\epsilon = a - b > 0$ existiría $x_0 \in S$ tal que $x_0 > a - (a - b) = b$, lo cual contradice que b es cota superior de A.

7. (a) Un elemento $M \in S$ es maximal si y sólo si, no existe elemento $x \in S$ con $x \neq M$ tal que $M \leq x$. Es decir, son los elementos M de S que no tienen múltiplos en S distintos de M. Claramente son los elementos $6, 7, 8, 9$ y 10. Un elemento $m \in S$ es minimal si y sólo si, no existe elemento $x \in S$ con $x \neq m$ tal que $x \leq m$. Es decir, son los elementos m de S que no tienen divisores en S distintos de m. Claramente son los elementos $3, 4, 5$ y 7.
(b) De acuerdo con la definición de orden total, los subconjuntos de S totalmente ordenados son:

$$\{a\} : a \in S,\ \{3,6\},\ \{3,9\},\ \{4,8\},\ \{5,10\}.$$

Es claro que no hay subconjuntos de S con tres elementos totalmente ordenados, lo cual implica que ya hemos escrito todos.

2.7. Orden total, buen orden

1. En $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se considera la relación de orden $x \leq y \Leftrightarrow x$ divide a y. Analizar si es de orden total. ¿Es buen orden?
2. En $\mathbb{Z}$, se define la relación: $xRy \Leftrightarrow x = y^n$ para algún n entero positivo. Demostrar que es relación de orden. ¿Es buen orden?

3. Demostrar que todo buen orden es un orden total.
4. Sea $(\mathbb{R}, \leq)$ el conjunto ordenado de los números reales con el orden usual $\leq$. En $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ entonces } x_1 < x_2 \\ \text{si } x_1 = x_2 \text{ entonces } y_1 \leq y_2. \end{cases}$$

(a) Demostrar que R es una relación de orden sobre C.
(b) Demostrar que R es una relación de orden total sobre C.

5. ¿Existe un conjunto parcialmente ordenado que posea un único elemento maximal y que sin embargo este no sea máximo?

Solución. 1. Se verifica $2 \not\leq 3$ y $3 \not\leq 2$, es decir $\leq$ no es orden total, en consecuencia tampoco es buen orden.

2. Reflexiva. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se verifica $x = x^1$, es decir xRx.
Antisimétrica. Para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^n \ (n \text{ entero positivo}) \\ y = x^m \ (m \text{ entero positivo}) \end{cases} \Rightarrow x = x^{nm}.$$

Si $x \neq 0$, entonces ha de ser necesariamente $mn = 1$ lo cual implica $m = n = 1$ y por tanto $x = y$. Si $x = 0$, entonces $y = 0^m = 0$. Es decir, en cualquier caso $x = y$.
Transitiva. Para toda terna de elementos $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^n \ (n \text{ entero positivo}) \\ y = z^m \ (m \text{ entero positivo}) \end{cases} \Rightarrow x = z^{nm}.$$

Dado que mn es entero positivo, se cumple xRz. Hemos demostrado que R es relación de orden en $\mathbb{Z}$.

No es relación de orden total, basta elegir los elementos de $\mathbb{Z}$, 2 y 3. Claramente $2 \neq 3^k$ para todo k entero positivo y $3 \neq 2^k$ para todo k entero positivo. Entonces, $2 \not R 3$ y $3 \not R 2$. Como consecuencia, no es buen orden.

3. Si $\leq$ es buen orden en A, todo subconjunto de A distinto del vacío tiene elemento mínimo. Sean x, y dos elementos de A, entonces $\{x, y\}$ tiene elemento mínimo. Si el mínimo es x, se verifica $x \leq y$, y si es y, se verifica $y \leq x$. Es decir, $\leq$ es orden total.

4. (a) Reflexiva. Para todo $(x, y) \in C$ se verifica $x = x$ e $y \leq y$, lo cual implica $(x, y)R(x, y)$.
Antisimétrica. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2), elementos de C con $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$

y $(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$. Si $x_1 = x_2$, entonces $y_1 \leq y_2$ e $y_2 \leq y_1$. Es decir, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, luego $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. No puede ocurrir $x_1 \neq x_2$, pues en caso contrario $x_1 < x_2$ y $x_2 < x_1$ (absurdo).
Transitiva. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) elementos de C tales que $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2)R(x_3, y_3)$. Tenemos,

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 \leq y_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \Rightarrow y_2 \leq y_3 \\ x_2 \neq x_3 \Rightarrow x_2 < x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \wedge y_1 \leq y_3 \\ x_1 \neq x_3 \wedge x_1 < x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1)R(x_3, y_3) \\ (x_1, y_1)R(x_3, y_3). \end{cases}$$

Es decir, si $x_1 = x_2$, en cualquier caso ocurre $(x_1, y_1)R(x_3, y_3)$. Analicemos ahora el caso $x_1 \neq x_2$.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 < x_3 \\ x_2 \neq x_3 \Rightarrow x_2 < x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_3 \\ x_1 < x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1)R(x_3, y_3) \\ (x_1, y_1)R(x_3, y_3). \end{cases}$$

Es decir, si $x_1 \neq x_2$, en cualquier caso ocurre $(x_1, y_1)R(x_3, y_3)$. Concluimos pues que R es relación de orden en C.

(b) Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) elementos de C. Puede ocurrir $x_1 = x_2$ o $x_1 \neq x_2$. Si $x_1 = x_2$, o bien $y_1 \leq y_2$ o bien $y_2 \leq y_1$, lo cual implica que o bien $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, o bien $(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$.

Si $x_1 \neq x_2$, o bien $x_1 < x_2$ o bien $x_2 < x_1$, lo cual implica que o bien $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, o bien $(x_2, y_2)R(x_1, y_1)$. Hemos demostrado que R es relación de orden total en C.

5. Sí, existe. Consideremos en $A = (0, 1] \cup [2, 3)$ el orden

$$\begin{cases} x \leq_A y \Leftrightarrow x \leq y & \text{si} \quad x, y \in (0, 1] \\ x \leq_A y \Leftrightarrow x \leq y & \text{si} \quad x, y \in [2, 3), \end{cases}$$

en donde $\leq$ representa el orden usual. Entonces, 1 es el único elemento maximal de A, pero no es máximo.

2.8. Diagramas de Hasse

1. Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ con la relación de orden $\leq$ usual. Dibujar el correspondiente diagrama de Hasse.
2. En $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ se considera la relación de orden definida por el diagrama de Hasse:

$$\begin{array}{ccc} f & e & d \\ \diagdown & | & / \\ & c & \\ / & & \diagdown \\ a & & b \end{array}$$

(a) Analizar la existencia de máximo y mínimo.
(b) Determinar los elementos maximales y minimales.
(c) Determinar los subconjuntos de A con tres elementos totalmente ordenados.
3. En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se considera la relación:

$$\leq = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, d), (a, c), (c, c), (c, d), (a, d), (d, d)\} .$$

(a) Demostrar que $\leq$ es relación de orden en A.
(b) Dibujar el diagrama de Hasse de la relación.
(c) Analizar si $\leq$ es un orden total.
(d) Determinar, si existen, los elementos máximo y mínimo.

Solución. 1. Claramente es:

$$\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}$$

2. (a) No existe elemento de A mayor o igual que todos los demás, ni existe elemento de A menor o igual que todos los demas, por tanto no existe ni máximo ni mínimo.
(b) Los elementos maximales de A son d, e y f, pues son aquellos para los cuales no hay ninguno mayor. Los elementos minimales de A son a b, pues son aquellos para los cuales no hay ninguno menor.
(c) De acuerdo con la definición de orden total, los subconjuntos de A con tres elemento y totalmente ordenados son:

$$\{a, c, f\}, \{a, c, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, f\}, \{b, c, e\}, \{b, c, d\}.$$

3. (a) El lector comprobará de forma sencilla que se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
(b) El diagrama de Hasse de $\leq$ es:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & d \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
c & & b \\
 & a \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

(c) No es relación de orden total, pues $c \not\leq b$ y $b \not\leq c$.
(d) Para todo $x \in A$, se verifica $a \leq x$ y $x \leq d$, por tanto a es elemento mínimo y d, máximo.

2.9. Relación de equivalencia en $\mathbb{R}[x]$

Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios $p(x)$ en la indeterminada x y con coeficientes reales. En $\mathbb{R}[x]$ se define la relación:

$$p_1(x)Rp_2(x) \Leftrightarrow \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] : p_2(x) - p_1(x) = q(x)(x^2+1).$$

(a) Demostrar que R es relación de equivalencia.
(b) Demostrar que cada clase admite un representante de grado < 2.
(c) Encontrar dicho representante para la clase definida por el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$.
(d) Determinar el conjunto cociente $\mathbb{R}[x]/R$.

Solución. (a) *Reflexiva.* Para todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ se verifica $p(x) - p(x) = 0 = 0(x^2+1)$, por tanto $p(x)Rp(x)$.
Simétrica. Para todo $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ se verifica:

$$\begin{aligned} p_1(x)Rp_2(x) &\Leftrightarrow \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] : p_2(x) - p_1(x) = q(x)(x^2+1) \\ &\Rightarrow p_1(x) - p_2(x) = (-q(x))(x^2+1) \Rightarrow p_2(x)Rp_1(x). \end{aligned}$$

Transitiva. Para todo $p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p_1(x)Rp_2(x) \\ p_2(x)Rp_3(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] : p_2(x) - p_1(x) = q(x)(x^2+1) \\ \exists h(x) \in \mathbb{R}[x] : p_3(x) - p_2(x) = h(x)(x^2+1) \end{cases} \\ &\Rightarrow \ \text{(sumado)}\ p_3(x) - p_1(x) = (q(x) + h(x))(x^2+1). \end{aligned}$$

Como $q(x) + h(x) \in \mathbb{R}[x]$, se verifica $p_1(x)Rp_3(x)$.

(b) Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, efectuando la división euclídea de $p(x)$ entre x^2+1 obtenemos un cociente $q(x)$ y un resto $r(x)$ de grado < 2. Es decir:

$$p(x) = q(x)(x^2+1) + r(x)\ , \quad \text{grad } r(x) < 2.$$

Ahora bien, $p(x) - r(x) = q(x)(x^2+1)$, lo cual implica $p(x)Rr(x)$. Esto demuestra que cada clase admite un representante de grado < 2.

(c) Efectuando la división euclídea de $p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$ entre $x^2 + 1$, obtenemos inmediatamente el resto $r(x) = 2x + 3$. Por tanto:

$$C[x^3 + x^2 + 3x + 4] = C[2x + 3].$$

(d) Toda clase de equivalencia tiene un representante de grado < 2. Además, si dos polinomios $r_1(x)$ y $r_2(x)$ de grados < 2 están relacionados, estos han de coincidir. En efecto, $r_1(x)Rr_2(x)$ quiere decir que

$$r_2(x) - r_1(x) = q(x) \text{ para algún } q(x) \in \mathbb{R}[x]. \quad (*)$$

Dado que $r_2(x) - r_1(x)$ es de grado < 2, ha de ser $q(x) = 0$ para que se verifique la igualdad $(*)$, y como consecuencia $r_1(x) = r_2(x)$. Concluimos que el conjunto cociente es: $\mathbb{R}[x]/R = \{C[ax + b] : a, b \in \mathbb{R}\}$, y el representante de cada clase con grado < 2 es único.

2.10. Tres relaciones en $\mathbb{N}$

En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales ($0 \notin \mathbb{N}$) se definen las siguientes relaciones:
a) La relación R tal que $aRb \Leftrightarrow a$ es divisible por b
b) La relación S tal que $aSb \Leftrightarrow a + b$ es múltiplo de 2
c) La relación T tal que $aTb \Leftrightarrow ab$ es múltiplo de 2
Se pide:
1. Estudiar si las relaciones R, S, T tienen las propiedades reflexiva, transitiva, simétrica, o antisimétrica.
2. Señalar cual o cuales de las relaciones R, S y T son de equivalencia o de orden.
3. Para las posibles relaciones de equivalencia señalar las clases de equivalencia; para las posibles de orden, indíquese si se trata de una relación de orden parcial o total.

(Examen Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. a) Analicemos las propiedades de la relación R :
(i) *Reflexiva.* Para todo $a \in \mathbb{N}$ se verifica $a = 1a$ lo cual implica que a es divisible por a, es decir R es reflexiva.
(ii) *Simétrica.* Elijamos $a = 2, b = 1$, entonces se verifica aRb, pero no que bRa, por tanto R no es simétrica.
(iii) *Transitiva.* Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que aRb y bRc. Entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $a = pb$ y $b = qc$ lo cual implica que $a = pqc$ con $pq \in \mathbb{N}$ o lo que es lo mismo, aRc y en consecuencia R es transitiva.
(iv) *Antisimétrica.* Si $a, b \in \mathbb{N}$ cumplen aRb y bRa, entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$

tales que $a = pb$ y $b = qa$ lo cual implica que $a = pqa$. Necesariamente es $pq = 1$ y al ser p, q naturales, $p = q = 1$, de lo cual se deduce $a = b$. La relación R es antisimétrica.

$b)$ Propiedades de la relación S :
(i) *Reflexiva.* Para todo $a \in \mathbb{N}$ se verifica $a + a = 2a$ lo cual implica que a es múltiplo de 2, es decir S es reflexiva.
(ii) *Simétrica.* Si aSb entonces $a + b$ es múltiplo de 2. Como $b + a = a + b$, también $b + a$ es múltiplo de 2, es decir bSa. La relación S es simétrica.
(iii) *Transitiva.* Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que aSb y bSc. Entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $a+b = 2p$ y $b+c = 2q$ lo cual implica que $a+c = 2(p+q-b)$, y por tanto aSc. La relación S es transitiva.
(iv) *Antisimétrica.* Para $a = 1, b = 3$ tenemos aSb, bSa y sin embargo $a \neq b$. La relación S no es antisimétrica.

$c)$ Propiedades de la relación T :
(i) *Reflexiva.* Para $a = 1$ tenemos $aa = 1$, que no es múltiplo de 2. La relación T no es es reflexiva.
(ii) *Simétrica.* Si aSb entonces ab es múltiplo de 2. Como $ba = ab$, también ba es múltiplo de 2, es decir bTa. La relación T es simétrica.
(iii) *Transitiva.* Para $a = 3, b = 2, c = 5$ se verifica aTb y bTc, sin embargo no se verifica aTc. La relación T no es transitiva.
(iv) *Antisimétrica.* Para $a = 1, b = 2$ tenemos aTb, bTa y sin embargo $a \neq b$. La relación T no es antisimétrica.
Concluimos que R es exactamente reflexiva, antisimétrica y transitiva; S exactamente reflexiva, simétrica y transitiva y T exactamente simétrica.

2. Del apartado anterior, concluimos que R es relación de orden, S es de equivalencia, y T no es ni de orden ni de equivalencia.

3. Para $a = 2, b = 3$ no se verifica ni aRb ni bRa, es decir R es relación de orden parcial. Las clases de equivalencia de los elementos 1 y 2 asociadas a la relación S son:

$$[1] = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\ , \quad [2] = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Dado que $[1] \cup [2] = \mathbb{N}$, las únicas clases de equivalencia son $[1]$ y $[2]$. El conjunto cociente es por tanto $\mathbb{N}/S = \{[1]\,[2]\}$.

2.11. Finura de las relaciones de orden

Sea E un conjunto y Ω el conjunto de todas las relaciones de orden definidas en E. Diremos que la relación de orden $\hat{w}$ es *mas fina* que la relación w si y

sólo si $(\forall x, y \in E)(x\ w\ y \Rightarrow x\ \widehat{w}\ y)$
$a)$ Sea $E = \mathbb{N}$, compárese la finura de las dos relaciones siguientes: $x\ w_1\ y \Leftrightarrow x \mid y$ y $x\ w_2\ y \Leftrightarrow x \leq y$,
$b)$ Demuéstrese que la relación *ser más fina que* definida en Ω, es una relación de orden.
$c)$ Compruébese la existencia de un máximo en Ω para ésta relación de orden.
$d)$ Sea E un conjunto de dos elementos. Constrúyase el conjunto de todas las relaciones de orden en E y ordénese por *finura*.

(Examen Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución.

$a)$ Se verifica $x\ w_1\ y \Rightarrow x \mid y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} : y = px \Rightarrow x \leq y \Rightarrow x\ w_2\ y$, lo cual implica que w_2 es más fina que w_1.
$b)$ Denotemos por $\leq^*$ la relación en Ω *ser más fina que*, es decir

$$w_1 \leq^* w_2 \Leftrightarrow [(\forall x, y \in E)(x\ w_2\ y \Rightarrow x\ w_1\ y)].$$

(i) *Reflexiva*. Para cada par de elementos $x, y \in E$ y para cada $w \in \Omega$ se verifica trivialmente $x\ w\ y \Rightarrow x\ w\ y$, es decir $w \leq^* w$.
(ii) *Antisimétrica*. Se verifica:

$$\begin{aligned}\begin{cases} w_1 \leq^* w_2 \\ w_2 \leq^* w_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\forall x, y \in E)(x\ w_2\ y \Rightarrow x\ w_1\ y) \\ (\forall x, y \in E)(x\ w_1\ y \Rightarrow x\ w_2\ y) \end{cases} \\ &\Rightarrow (\forall x, y \in E)(x\ w_1\ y \Leftrightarrow x\ w_2\ y) \\ &\Rightarrow w_1 = w_2.\end{aligned}$$

(iii) *Transitiva*. Se verifica:

$$\begin{aligned}\begin{cases} w_1 \leq^* w_2 \\ w_2 \leq^* w_3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\forall x, y \in E)(x\ w_2\ y \Rightarrow x\ w_1\ y) \\ (\forall x, y \in E)(x\ w_3\ y \Rightarrow x\ w_2\ y) \end{cases} \\ &\Rightarrow (\forall x, y \in E)(x\ w_3\ y \Rightarrow x\ w_1\ y) \\ &\Rightarrow w_1 \leq^* w_3.\end{aligned}$$

Concluimos que $\leq^*$ es relación de orden en Ω.
$c)$ Sea $w_0 \in \Omega$ la relación de orden identidad, es decir $x\ w_0\ y \Leftrightarrow x = y$. Si $w \in \Omega$, al ser w relación de orden verifica la propiedad reflexiva, por tanto $x\ w\ x$ para todo $x \in E$. Entonces:

$$x\ w_0\ y \Rightarrow x = y \Rightarrow x\ w\ y \Rightarrow w \leq^* w_0.$$

En consecuencia, w_0 es elemento máximo en Ω para $\leq^*$.
$d)$ Sea $E = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Es claro que sólo existen tres relaciones de orden en E :

$$\begin{cases} w_0 : & a\, w_0\, a\ ,\ b\, w_0\, b \\ w_1 : & a\, w_1\, a\ ,\ b\, w_1\, b\ ,\ a\, w_1\, b \\ w_2 : & a\, w_2\, a\ ,\ b\, w_2\, b\ ,\ b\, w_2\, a. \end{cases}$$

Por tanto $\Omega = \{w_0, w_1, w_2\}$ y ordenado por *finura* sería $w_1 <^* w_0$ y $w_1 <^* w_0$.

Capítulo 3

Funciones

3.1. Concepto de función

1. Se consideran los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z, u, v, w\}$. Sea la aplicación $f : A \to B$ la aplicación dada por $f(1) = x$, $f(2) = z$, $f(3) = u$, $f(4) = x$.
(i) Hallar los originales de cada elemento de B.
(ii) Hallar la imagen de f.
(iii) Hallar el grafo de f.

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número real su cuadrado, es decir $f(x) = x^2$.
(i) Hallar $f(0)$, $f(1)$ y $f(-1)$.
(ii) Determinar los originales de 9.
(iii) Hallar $\operatorname{Im} f$.
(iv) Determinar el grafo de f.

3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(i) Hallar $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$ y $f(-2)$.
(ii) Determinar los originales de -1 y los de 7.
(iii) Hallar $\operatorname{Im} f$.
(iv) Determinar el grafo de f.

Solución. 1. (i) x tiene dos originales, el 1 y el 4; z tiene un original, el 2; u tiene un original, el 3. Los elementos v y w no tienen originales.
(ii) $\operatorname{Im} f = \{x, z, u\}$.

(iii) $\Gamma(f) = \{(1, x), (2, z), (3, u), (4, x)\}$.

2. (i) Tenemos $f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(-1) = (-1)^2 = 1$.
(ii) Los originales de 9 son los números reales x que cumplen $f(x) = x^2$ es decir, los que cumplen $x^2 = 9$, y estos son 3 y -3.
(iii) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $f(x) = x^2 \geq 0$. Por otra parte, si $y \geq 0$, el número real $\sqrt{y}$ satisface $f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, lo cual implica que todo número real ≥ 0 pertenece a Im f. Es decir, Im $f = [0, +\infty)$.
(iv) El grafo de f es $\Gamma(f) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

3. (i) De acuerdo con la definición de f, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$, $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, $f(-1) = -1$ y $f(-2) = -1$.
(ii) Todo número real negativo x cumple $f(x) = -1$ y por tanto es original de -1. Si $x \geq 0$, $f(x) = 2x$ es positivo y no puede ser original de -1. En consecuencia los originales de -1 son los números del intervalo $(-\infty, 0)$. Los únicos posibles originales x de 7 han de ser no negativos es decir $f(x) = 2x = 7$ con lo cual $x = 7/2$.
(iii) Cuando x recorre los números reales no negativos, $2x$ recorre también los reales no negativos. Además, -1 es la imagen de cualquier real no negativo, por tanto Im $f = [0, +\infty) \cup \{-1\}$. (iv) De acuerdo con la definición de f, su grafo es

$$\Gamma(f) = \{(x, 2x) : x \geq 0\} \cup \{(x, -1) : x < 0\}.$$

3.2. Composición de funciones

1. Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7 & \text{si} \quad x > 2 \\ x^2 - 2|x| & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = 2x + 3.$$

Calcular:
(i) $f(-2)$. (ii) $g(-1)$. (iii) $f(3)$. (iv) $(g \circ f)(1)$. (v) $(f \circ g)(2)$. (vi) $(f \circ f)(4)$.

2. Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 5$. Determinar

$$g \circ f, \quad f \circ g, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

3. Demostrar la propiedad asociativa de la composición de aplicaciones, es decir si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Solución. 1. Usando la definición de composición:
(i) $f(-2) = (-2)^2 - 2|-2| = 4 - 4 = 0$.

(ii) $g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$.
(iii) $f(3) = 3 \cdot 3 - 7 = 2$.
(iv) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g\left(1^2 - 2 \cdot |-1|\right) = g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$.
(v) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2 \cdot 2 + 3) = f(7) = 3 \cdot 7 - 7 = 14$.
(vi) $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(3 \cdot 4 - 7) = f(5) = 3 \cdot 5 - 7 = 8$.

2. Usando la definición de composición:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2 - 1\right) = 2(x^2 - 1) + 5 = 2x^2 + 3$.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 5) = (2x + 5)^2 - 1 = 4x^2 + 20x + 24$.
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(x^2 - 1\right) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$.
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x + 5) = 2(2x + 5) + 5 = 4x + 15$.

3. Para todo $a \in A$ se verifica

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))\,.$$

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h((g(f(a)))\,.$$

Es decir, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

3.3. Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

1. Sea A un conjunto no vacío y la aplicación $f : A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$. Estudiar si es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. Sea A un conjunto no vacío y la aplicación $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ dada por $f(X) = X^c$. Estudiar si biyectiva.

3. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x+5$ es biyectiva.

4. Determinar si las siguientes aplicaciones son inyectivas y si son sobreyectivas.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$.
(c) $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty),\ h(x) = x^2$.
(d) $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ i(x) = x$.

5. Determinar si las siguientes aplicaciones son inyectivas y si son sobreyectivas.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.

(b) $g : [0, +\infty) \to [1, +\infty),\ g(x) = x^2 + 1.$

6. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Demostrar que:
(i) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
(ii) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
(iii) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Solución. 1. Se verifica $f(a) = f(b) \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$, luego f es inyectiva. No es sobreyectiva pues no existe $x \in A$ tal que $f(x) = \emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

2. Se verifica

$$f(X) = f(Y) \Rightarrow X^c = Y^c \Rightarrow (X^c)^c = (Y^c)^c \Rightarrow X = Y,$$

luego f es inyectiva. Por otra parte, para todo $Y \in \mathcal{P}(A)$ se verifica $f\left(Y^c\right) = (Y^c)^c = Y$, por tanto f es sobreyectiva. Concluimos que f es biyectiva.

3. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es decir f es inyectiva.
Sea $y \in \mathbb{R}$ genérico. Entonces, $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : 2x + 5 = y$. La última ecuación tiene la solución $x = \dfrac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$. La aplicación es sobreyectiva. Concluimos pues que f es biyectiva.

4. (a) Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es decir f es inyectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$ genérico. Entonces,

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^3 = y.$$

La última ecuación tiene la solución $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$. La aplicación es sobreyectiva. Concluimos pues que f es biyectiva.

(b) Se verifica $g(1) = g(-1) = 1$, es decir g no es inyectiva. Por otra parte, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 = -1$, por tanto tampoco es sobreyectiva.

(c) Se verifica $h(1) = h(-1) = 1$, es decir h no es inyectiva. Sea $y \in [0, +\infty)$ genérico. Entonces, $\exists x \in \mathbb{R} : h(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$. Dado que $y \geq 0$, la última ecuación tiene solución, en concreto las soluciones $x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$.

La aplicación es sobreyectiva.

(d) Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} : i(x_1) = i(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, es decir, i es inyectiva. Elijamos por ejemplo $y = 1/2 \in \mathbb{Q}$. Entonces,

$$\exists x \in \mathbb{Z} : i(x) = 1/2 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : x = 1/2.$$

Pero $1/2 \notin \mathbb{Z}$, es decir i no es sobreyectiva.

5. (a) Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}/e^{x_2} = 1$$

$$\Rightarrow e^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es decir f es inyectiva. La función exponencial $f(x) = e^x$ solamente toma valores positivos, en consecuencia f no es sobreyectiva.

(b) Para todo $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2.$$

Dado que x_1 y x_2 son ≥ 0, ha de ser $x_1 = x_2$.. Es decir, f es inyectiva. Sea $y \in [1, +\infty)$ genérico. Entonces

$$\exists x \in [0, +\infty) : f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in [0, +\infty) : x^2 + 1 = y.$$

Como $y \geq 1$, $y - 1 \geq 0$ y la última ecuación tiene la solución $x = +\sqrt{y-1} \in [0, +\infty)$. La aplicación es sobreyectiva. Concluimos pues que f es biyectiva.

6. (i) Sea $c \in C$. Como g es sobreyectiva, $\exists b \in B$ tal que $c = g(b)$. Como f es sobreyectiva, $\exists a \in A$ tal que $b = g(a)$. Entonces, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, por tanto $g \circ f$ es sobreyectiva.
(ii) Sean $a_1, a_2 \in A$. Entonces,

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow g\left(f(a_1)\right) = g\left(f(a_2)\right).$$

Como g es inyectiva, se verifica $f(a_1) = f(a_2)$. Pero f es también inyectiva, por tanto $a_1 = a_2$. Concluimos que $g \circ f$ es inyectiva.
(iii) Es consecuencia inmediata de los apartados anteriores.

3.4. Aplicación identidad, aplicación inversa

1. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3x + 2$ es biyectiva y determinar f^{-1}.
2. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^3 + 4$ es biyectiva y determinar f^{-1}.
3. Sea $f : A \to B$ biyectiva. Demostrar que
(i) f^{-1} es biyectiva.
(ii) $I_B \circ f = f = f \circ I_A$.
(iii) $f^{-1} \circ f = I_A,\ f \circ f^{-1} = I_B$.

Solución. 1. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1 + 2 = -3x_2 + 2 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es decir, f es inyectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$ genérico. Entonces,

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : -3x + 2 = y.$$

La última ecuación tiene la solución $x = \dfrac{2-y}{3} \in \mathbb{R}$. La aplicación es sobreyectiva. Concluimos pues que f es biyectiva.Por definición de aplicación inversa, $f^{-1}(y) = x$ si $y = f(x)$, por tanto $f^{-1}(y) = \dfrac{2-y}{3}$, que equivale a:

$$f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}.$$

2. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1^3 + 4 = -x_2^3 + 4 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2,$$

es decir, f es inyectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$ genérico. Entonces

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : -x^3 + 4 = y.$$

La última ecuación tiene la solución $x = \sqrt[3]{4-y} \in \mathbb{R}$. La aplicación es sobreyectiva. Concluimos pues que f es biyectiva.Por definición de aplicación inversa, $f^{-1}(y) = x$ si $y = f(x)$, por tanto $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{4-y}$, que equivale a:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4-x}.$$

3. (i) Sean $y_1, y_2 \in B$. Existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$, lo cual equivale a $f^{-1}(y_1) = x_1,\ f^{-1}(y_2) = x_2$. Entonces:

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

es decir, f^{-1} es inyectiva. Sea $x \in A$ y llamemos $y = f(x)$. Por definición de inversa, $x = f^{-1}(y)$ y por tanto f^{-1} es sobreyectiva. Concluimos que f^{-1} es biyectiva.
(ii) Tenemos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{I_B} B$$

y además para todo $x \in A : (I_B \circ f)(x) = I_B\,(f(x)) = f(x)$. lo cual implica $I_B \circ f = f$. Por otra parte

$$A \xrightarrow{I_A} A \xrightarrow{f} B$$

y además para todo $x \in A : (f \circ I_A)(x) = f\,(I_A(x)) = f(x)$. lo cual implica $f \circ I_A = f$.
(iii) Tenemos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$. Sea $x \in A$ y llamemos $y = f(x)$. Entonces, $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\,(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, lo cual implica $f^{-1} \circ f = I_A$.
Por otra parte $B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$. Sea $y \in B$ y sea $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces, $(f \circ f^{-1})(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$, lo cual implica $f \circ f^{-1} = I_B$.

3.5. Imágenes directas e inversas

1. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, la aplicación $f : X \to Y$ dada por

$$f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = c,\ f(4) = c,$$

y los conjuntos $A = \{1, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Determinar $f(A)$ y $f^{-1}(B)$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Determinar

$$(i)\ f^{-1}(\{36\})\,. \quad (ii)\ f^{-1}(\{-25\})\,. \quad (iii)\ f^{-1}(\{x : x \leq 0\})\,.$$
$$(iv)\ f^{-1}(\{x : 25 \leq x \leq 36\})\,. \quad (v)\ f^{-1}(\{x : x \geq 0\})$$

3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que para cualquier par de subconjuntos A_1 y A_2 de X se verifica:

$$(i)\ f\,(A_1 \cup A_2) = f\,(A_1) \cup f\,(A_2)\,.$$
$$(ii)\ f\,(A_1 \cap A_2) \subset f\,(A_1) \cap f\,(A_2)\,.$$

Dar un contraejemplo que demuestre que en general

$$f\,(A_1 \cap A_2) \neq f\,(A_1) \cap f\,(A_2)\,.$$

4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que para cualquier par de subconjuntos B_1 y B_2 de Y se verifica:

$$(i)\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,.$$
$$(ii)\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,.$$

5. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que si $\{A_i\}$ es cualquier colección de subconjuntos de X, se verifica:

$$(i)\ f\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup f\left(A_i\right).$$

$$(ii)\ f\left(\bigcap A_i\right) \subset \bigcap f\left(A_i\right).$$

6. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que si $\{B_i\}$ es cualquier colección de subconjuntos de Y, se verifica:

$$(i)\ f^{-1}\left(\bigcup B_i\right) = \bigcup f^{-1}\left(B_i\right).$$

$$(ii)\ f^{-1}\left(\bigcap B_i\right) = \bigcap f^{-1}\left(B_i\right).$$

7. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que para cualquier par de subconjuntos A_1 y A_2 de X se verifica:

$$(i)\ f\left(A_1 - A_2\right) \supset f\left(A_1\right) - f\left(A_2\right).$$

$$(ii)\ A_1 \subset A_2 \Rightarrow f\left(A_1\right) \subset f\left(A_2\right).$$

8. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que para cualquier par de subconjuntos B_1 y B_2 de Y se verifica:

$$(i)\ f^{-1}\left(B_1 - B_2\right) = f^{-1}\left(B_1\right) - f^{-1}\left(B_2\right).$$

$$(ii)\ B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}\left(B_1\right) \subset f^{-1}\left(B_2\right).$$

9. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Demostrar que:

$$(i)\ A \subset f^{-1}\left(f(A)\right). \quad (ii)\ B \supset f\left(f^{-1}(B)\right).$$

10. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Sabemos que para cualquier par de subconjuntos A_1 y A_2 de X se verifica $f\left(A_1 \cap A_2\right) \subset f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$. Demostrar que si f es inyectiva entonces, se verifica la igualdad.

Solución. 1. De acuerdo con las definiciones de imagen directa e inversa,

$$f(A) = \{a, c\}, \quad f^{-1}(B) = \{1, 2\}.$$

Nota. No debe confundirse la aplicación f^{-1} que existe solamente si $f : X \to Y$ es biyectiva, con $f^{-1}(B)$ que existe siempre, sea f biyectiva o no.

2. Aplicando la definición de imagen inversa:
(i) $f^{-1}\left(\{36\}\right) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 = 36\} = \{-6, 6\}$.
(ii) $f^{-1}\left(\{-25\}\right) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 = -25\} = \emptyset$.

(iii) $f^{-1}(\{x : x \leq 0\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \leq 0\} = \{0\}$.
(iv) $f^{-1}(\{x : 25 \leq x \leq 36\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \in [25, 36]\} = [5, 6] \cup [-6, -5]$.
(v) $f^{-1}(\{x : x \geq 0\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$.

3. (i) Demostremos el contenido de izquierda a derecha. Si $y \in f(A_1 \cup A_2)$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in A_1 \cup A_2$. Si $x \in A_1$, entonces $y \in f(A_1)$, si $x \in A_2$, entonces $y \in f(A_2)$. En cualquier caso $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Veamos ahora el contenido de derecha a izquierda. Si $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, entonces $y \in f(A_1)$ o $y \in f(A_2)$. Si $y \in f(A_1)$, existe $x_1 \in A_1$ tal que $y = f(x_1)$, si $y \in f(A_2)$, existe $x_2 \in A_2$ tal que $y = f(x_2)$. En el primer caso $x_1 \in A_1 \cup A_2$ y en el segundo, $x_2 \in A_1 \cup A_2$. En cualquier caso, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

(ii) Si $y \in f(A_1 \cap A_2)$, entonces existe $x \in A_1 \cap A_2$, tal que $y = f(x)$. Como $x \in A_1$ y $x \in A_2$, se verifica $y \in f(A_1)$ e $y \in f(A_2)$. Es decir, $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Veamos que en general no se verifica la igualdad, para ello elijamos $X = \{a, b\}$, $Y = \{c\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$ y la aplicación $f : X \to Y$ dada por $f(a) = f(b) = c$. Entonces,

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\} \cap \{c\} = \{c\},$$

es decir $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

4. (i) Tenemos las equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ o } f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ o } x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Es decir, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(ii) De manera análoga:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ y } f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ y } x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Por tanto, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

5. (i) Demostremos el contenido de izquierda a derecha. Si $y \in f\left(\bigcup A_i\right)$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in \bigcup A_i$. Por definición de unión, existe un índice i_0 tal que $x \in A_{i_0}$ lo cual implica que $y \in f(A_{i_0})$ y de nuevo por definición de unión, $y \in \bigcup f(A_i)$.

Veamos ahora el contenido de derecha a izquierda. Si $y \in \bigcup f(A_i)$, entonces existe un índice i_0 tal que $y \in f(A_{i_0})$ lo cual implica que existe $x \in A_{i_0}$ tal que $y = f(x)$. Pero $x \in \bigcup A_i$, luego $y \in f\left(\bigcup A_i\right)$.

(ii) Si $y \in f\left(\bigcap A_i\right)$, entonces existe $x \in \bigcap A_i$, tal que $y = f(x)$. Como $x \in A_i$ para todo i, se verifica $y \in f(A_i)$ para todo i, es decir $y \in \bigcap f(A_i)$.

6. (i) Tenemos las equivalencias:

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup B_i \Leftrightarrow \exists i_0 : f(x) \in B_{i_0} \Leftrightarrow \exists i_0 : x \in f^{-1}(B_{i_0})$$

$$\Leftrightarrow \exists i_0 : f(x) \in B_{i_0} \Leftrightarrow \exists i_0 : x \in f^{-1}(B_{i_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup f^{-1}(B_i).$$

Es decir, $f^{-1}\left(\bigcup B_i\right) = \bigcup f^{-1}(B_i)$.

(ii) De manera análoga:

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap B_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i \quad \forall i \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B_i \quad \forall i \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i \Leftrightarrow x \in \bigcap f^{-1}(B_i).$$

Es decir, $f^{-1}\left(\bigcap B_i\right) = \bigcap f^{-1}(B_i)$.

7. (i) Sea $y \in f(A_1) - f(A_2)$. Esto implica que $y \in f(A_1)$ y que $y \notin f(A_2)$. Equivalentemente, existe $x_1 \in A_1$ tal que $y = f(x_1)$ y para todo $x \in A_2$, $y \neq f(x)$, lo cual implica además que $x_1 \notin A_2$. Es decir, $y = f(x_1)$ con $x_1 \in A_1 - A_2$ y por tanto $y \in f(A_1 - A_2)$.

(ii) Sea $y \in f(A_1)$. Entonces, $y = f(x)$ con $x \in A_1$. Como $A_1 \subset A_2$, x también pertenece a A_2 y por tanto, $y \in f(A_2)$.

8. (i) Tenemos las equivalencias:

$$x \in f^{-1}(B_1 - B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 - B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ y } f(x) \notin B_2$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ y } x \notin f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$$

Es decir, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

(ii) Si $x \in f^{-1}(B_1)$, entonces $f(x) \in B_1$. Pero $B_1 \subset B_2$, lo cual implica que $f(x) \in B_2$ y por tanto $x \in f^{-1}(B_2)$.

9. (i) Sea $x \in A$. Entonces, $f(x) \in f(A)$ y por definición de imagen inversa, $x \in f^{-1}(f(A))$.

(ii) Sea $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Esto implica que $y = f(x)$ para algún $x \in f^{-1}(B)$. Pero $x \in f^{-1}(B)$ equivale a $f(x) \in B$. Por tanto $y = f(x) \in B$.

10. Si $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, entonces $y \in f(A_1)$ e $y \in f(A_2)$, es decir existe $x_1 \in A_1$ tal que $y = f(x_1)$ y existe $x_2 \in A_2$ tal que $y = f(x_2)$. Pero f es inyectiva, lo cual implica que $x_1 = x_2$. Por tanto $x_1 \in A_1 \cap A_2$, en consecuencia $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Es decir, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$, y por tanto $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$.

3.6. Biyección entre $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$

Demostrar que la siguiente función es biyectiva y determinar su inversa

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Solución. La función está bien definida pues si $x \in (-1,1)$, entonces $|x| < 1$ y el denominador $1 - |x|$ no se anula. Veamos que es inyectiva.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1 - |x_1|} = \frac{x_2}{1 - |x_2|}. \quad (1)$$

Tomando módulos queda $\frac{|x_1|}{1-|x_1|} = \frac{|x_2|}{1-|x_2|}$ o bien, $|x_1| - |x_1||x_2| = |x_2| - |x_1||x_2|$ lo cual implica $|x_1| = |x_2|$, y consecuentemente $1 - |x_1| = 1 - |x_2|$. Sustituyendo en (1), queda $x_1 = x_2$.
Veamos que f es sobreyectiva. Podemos expresar $f(x)$ en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \in (-1,0). \end{cases}$$

Si $y \geq 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1-x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1+y} \in [0,1)$. Si $y < 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1+x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1-y} \in (-1,0)$. Es decir, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in (-1,1)$ tal que $y = f(x)$ y por tanto, f es sobreyectiva.
Al ser f biyectiva tiene inversa, siendo su expresión:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ \dfrac{y}{1-y} & \text{si} \quad y < 0, \end{cases}$$

o bien

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

que la podemos expresar en la forma:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

3.7. Aplicación involutiva

Sea A un conjunto. Se dice que la aplicación $f : A \to A$ es *involutiva* si, y sólo si $f \circ f = I_A$. Determinar los valores de a y b reales para que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ sea involutiva.

Solución. Tenemos las equivalencias

$$f \text{ involutiva} \Leftrightarrow f \circ f = I_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = I_{\mathbb{R}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ f)(x) = I_{\mathbb{R}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f[f(x)] = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f[ax+b] = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a(ax+b) + b = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-1)x + b(a+1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(a+1) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $(a = -1) \vee (a = 1 \wedge b = 0)$.

3.8. Factorización canónica de la función seno

Efectuar la factorización canónica de la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{sen } x$.

Solución. La relación de equivalencia $\sim$ asociada a la aplicación f es $s \sim t \Leftrightarrow f(s) = f(t)$, o bien $s \sim t \Leftrightarrow \text{sen } s = \text{sen } t$. Determinemos $\mathbb{R}/\sim$. Una clase genérica es:

$$[x] = \{s \in \mathbb{R} : s \sim x\} = \{s \in \mathbb{R} : f(s) = f(x)\} = \{s \in \mathbb{R} : \text{sen } s = \text{sen } x\}.$$

Observemos que existe un único valor v_x en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ de forma que sen $x =$ sen v_x. Es decir, la clase de equivalencia $[x]$ viene determinada por el número v_x, lo cual permite identificar $\mathbb{R}/\sim$ con $[-\pi/2, \pi/2]$. Por otra parte, Im $f = [-1, 1]$. La factorización canónica de f es por tanto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ n \downarrow & & \uparrow i \\ [-\pi/2, \pi/2] & \xrightarrow{g} & [-1,1] \end{array} \qquad \begin{cases} n(x) = v_x \\ g(v_x) = \text{sen } v_x \\ i(y) = y. \end{cases}$$

Comprobemos que se verifica $f = i \circ g \circ n$. En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(i \circ g \circ n)(x) = (i \circ g)(v_x) = i(\text{sen } v_x) = \text{sen } v_x = \text{sen } x = f(x).$$

Capítulo 4

Grupos

4.1. Concepto de grupo

1. Demostrar de manera esquemática que $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos en donde $+$ representa en cada caso la suma habitual.

2. Demostrar de manera esquemática que el conjunto de las matrices reales de ordenes $m \times n$ (denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o bien por $\mathbb{R}^{m\times n}$) es grupo abeliano, siendo $+$ la suma habitual de matrices.

3. En el conjunto de los números reales se define las operación $x*y = x+y+4$. Demostrar que $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano.

4. Demostrar que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de los números reales no nulos con la operación $\cdot$ producto habitual es un grupo abeliano.

5. Sea G el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n invertibles. Demostrar de manera esquemática que $(G, \cdot)$ es grupo, siendo $\cdot$ la operación usual producto de matrices. ¿Es abeliano?

6. Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios en la indeterminada x y coeficientes reales. Demostrar de manera esquemática que $(\mathbb{R}[x], +)$ es grupo abeliano, en donde $+$ representa la suma habitual de polinomios.

7. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se define la operación $*$ mediante $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Demostrar que $(\mathbb{R}, *)$ es un grupo abeliano.

8. En $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la ley de composición interna $*$ mediante

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + (-1)^{y_1} x_2, y_1 + y_2).$$

Probar que ley $*$ confiere a G estructura de grupo no abeliano.

9. a) Demostrar que sobre $\mathbb{R}$ la ley interna definida por $x*y = x+y-xy$, es conmutativa, asociativa y que admite elemento neutro. ¿Es $(\mathbb{R}, *)$ un grupo?
b) Calcular $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n}$.

10. Estudiar si $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ es grupo siendo $a * b = \dfrac{ab}{7}$.

Solución. 1. Efectivamente, la suma de enteros es un entero. La suma de enteros es asociativa. Para todo entero x se verifica $x + 0 = 0 + x = x$, por tanto $e = 0 \in \mathbb{Z}$ es elemento neutro. Para todo x entero, $-x$ se satisface $x + (-x) = (-x) + x = 0$, es decir todo entero tiene simétrico $x' = -x \in \mathbb{Z}$. Además, sabemos que la suma de enteros es conmutativa y por tanto $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano.
Razonando de manera análoga, deducimos que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos.

2. La suma de dos matrices de órdenes $m \times n$ es otra matriz de orden $m \times n$. La suma de matrices es asociativa. Para toda matriz A de orden $m \times n$ se verifica $A + 0 = 0 + A = A$, siendo 0 la matriz nula de $m \times n$, por tanto 0 es elemento neutro. Para toda matriz A de orden $m \times n$, la matriz $-A$ de orden $m \times n$ verifica $A + (-A) = (-A) + A = 0$, es decir todo elemento A de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tiene simétrico, siendo este, $-A$.
Además, sabemos que la suma de matrices es conmutativa y por tanto $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$ es grupo abeliano.

3. La operación $*$ es claramente interna. Para x, y, z números reales cualesquiera se verifica

$$(x * y) * z = (x + y + 4) * z = x + y + 4 + z + 4 = x + y + z + 8.$$

$$x * (y * z) = x * (y + z + 4) = x + y + z + 4 + 4 = x + y + z + 8.$$

Es decir, la operación es asociativa. Para x, y números reales cualesquiera se verifica

$$x * y = x + y + 4 = y + x + 4 = y * x,$$

por tanto la operación es conmutativa. En consecuencia, el número real e es neutro para la operación $*$ si y sólo si $e * x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto equivale a $e+x+4 = x$, es decir $e = -4$ es elemento neutro para la operación $*$. Debido a la conmutatividad, un $x \in \mathbb{R}$ tiene elemento simétrico $x' \in \mathbb{R}$ si y sólo si $x * x' = e$ o bien si $x + x' + 4 = -4$. Existe por tanto x' para cada x siendo éste $x' = -8 - x$.

4. El producto de números reales no nulos es no nulo. El producto de reales tiene la propiedad asociativa. Se verifica $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y por tanto $e = 1$ es elemento neutro. Si x es real no nulo, entonces $1/x$ es real no nulo y se verifica $x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1$, por tanto $x' = 1/x$ es elemento simétrico de x. Además el producto de reales es conmutativo.

5. Interna. Si A y B pertenecen a G entonces A y B son invertibles es decir, $\det A \neq 0$ y $\det B \neq 0$. Dado que $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$ concluimos que AB es invertible y por tanto, pertenece a G.
Asociativa. Es una conocida propiedad del producto de matrices.
Elemento neutro. La matriz identidad I real de orden n es invertible ($\det I = 1 \neq 0$) y cumple $AI = IA = A$ para toda $A \in G$, por tanto existe elemento neutro.
Elemento simétrico. Dada $A \in G$ se verifica $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$, es decir $A^{-1} \in G$ y $A^{-1}A = A^{-1}A = I$, por tanto todo $A \in G$ tiene elemento simétrico.Es decir, $(G, \cdot)$ es grupo.
No es abeliano porque en general no se verifica la propiedad conmutativa del producto de matrices, incluso para matrices invertibles. Basta tomar como contraejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ambas matrices son invertibles, sin embargo $AB \neq BA$ como inmediatamente se comprueba.

6. Interna. La suma de dos elementos de $\mathbb{R}[x]$ es claramente un elemento de $\mathbb{R}[x]$.
Asociativa. Es una conocida propiedad de la suma de polinomios.
Existencia de elemento neutro. El polinomio

$$e(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n + \ldots$$

satisface

$$p(x) + e(x) = e(x) + p(x) = p(x)$$

para todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.
Existencia de elemento simétrico. Dado

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \in \mathbb{R}[x],$$

el polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 + \ldots - a_n x^n - \ldots \in \mathbb{R}[x]$ satisface

$$p(x) + (-p(x)) = (-p(x)) + p(x) = e(x).$$

Conmutativa. Es una conocida propiedad de la suma de polinomios.

7. (a) *Interna.* Para todo par de números reales x, y la suma $x^3 + y^3$ es un número real. Además, la raíz cúbica de un número real es un número real único. Por tanto, la operación $*$ es interna.
(b) *Asociativa.* Para todo x, y, z números reales se verifica

$$(x * y) * z = (\sqrt[3]{x^3 + y^3}) * z = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}.$$
$$x * (y * z) = x * (\sqrt[3]{y^3 + z^3}) = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3 + z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}.$$

Es decir, la operación $*$ es asociativa.
(c) *Elemento neutro.* Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$x * 0 = \sqrt[3]{x^3 + 0^3} = \sqrt[3]{x^3} = x \ , \quad 0 * x = \sqrt[3]{0^3 + x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Por tanto, 0 es el elemento neutro de la operación $*$.
(d) *Elemento simétrico.* Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$x * (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} = \sqrt[3]{x^3 - x^3} = \sqrt[3]{0} = 0,$$
$$(-x) * x = \sqrt[3]{(-x)^3 + x^3} = \sqrt[3]{-x^3 + x^3} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Todo $x \in \mathbb{R}$ tiene elemento simétrico, siendo éste $-x$.
(e) *Conmutativa.* Para todo par de números reales x, y :

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x.$$

La operación es conmutativa. Concluimos que $(\mathbb{R}, *)$ es un grupo abeliano.

8. Claramente $*$ es una ley de composición interna. Veamos que cumple la propiedad asociativa. Por un parte
$[(x_1, y_1) * (x_2, y_2)] * (x_3, y_3) = (x_1 + (-1)^{y_1} x_2 \ , \ y_1 + y_2) * (x_3, y_3) =$
$(x_1 + (-1)^{y_1} x_2 + (-1)^{y_1 + y_2} x_3 \ , \ y_1 + y_2 + y_3).$
Por otra
$(x_1, y_1) * [(x_2, y_2) * (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) * (x_2 + (-1)^{y_2} x_3 \ , \ y_2 + y_3) =$
$(x_1 + (-1)^{y_1}(x_2 + (-1)^{y_2} x_3) \ , \ y_1 + y_2 + y_3).$

Dado que $x_1 + (-1)^{y_1}(x_2 + (-1)^{y_2} x_3) = x_1 + (-1)^{y_1} x_2 + (-1)^{y_1 + y_2} x_3$ concluimos que la operación $*$ es asociativa. Veamos que existe elemento neutro. En efecto, $(e_1, e_2) \in G$ es elemento neutro si y sólo si para todo $(x, y) \in G$ se verifica

$$(x, y) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x, y) = (x, y),$$

o equivalentemente

$$(x + (-1)^y e_1 \ , \ y + e_2) = (e_1 + (-1)^{e_2} x \ , \ e_2 + y) = (x, y).$$

Esta igualdad se verifica para $(e_1, e_2) = (0,0)$, que es por tanto el elemento neutro de la ley de composición interna $*$. Veamos ahora que todo elemento $(x, y) \in G$ tiene elemento simétrico. En efecto, (x', y') es simétrico de (x, y) si y sólo si

$$(x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y) = (0, 0),$$

o equivalentemente

$$(x + (-1)^y x' \ , \ y + y') = (x' + (-1)^{y'} x \ , \ y' + y) = (0, 0). \quad (1)$$

De $y + y' = 0$ deducimos $y' = -y$ y de $x + (-1)^y x' = 0$ que $x' = -(-1)^{-y} x$ o bien $x' = (-1)^{1-y} x$. Para estos valores de x' e y' se verifican las igualdades (1). Concluimos que todo elemento $(x, y) \in G$ tiene simétrico, siendo este

$$(x, y)^{-1} = (x', y') = ((-1)^{1-y} x \ , \ -y).$$

Hemos demostrado que $(G, *)$ es grupo. No es abeliano pues por ejemplo

$$\begin{gathered}(1, 0) * (0, 1) = (1 + (-1)^0 \cdot 0 \ , \ 0 + 1) = (1, 1). \\ (0, 1) * (1, 0) = (0 + (-1)^1 \cdot 1 \ , \ 1 + 0) = (-1, 1).\end{gathered}$$

9. a) Tenemos $y * x = y + x - yx = x + y - xy = x * y$, por tanto la operación es conmutativa. Por otra parte

$$\begin{aligned}(x * y) * z = (x + y - xy) * z &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y - xy + z - xz - yz + xyz. \\ x * (y * z) = x * (y + z - yz) &= x + y + z - yz - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz.\end{aligned}$$

Es decir, la operación es asociativa. Veamos que existe elemento neutro e para $*$. Efectivamente, e es elemento neutro para $*$ si y sólo si $x * e = e * x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o equivalentemente $x + e - xe = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Claramente $e = 0$ cumple la igualdad anterior.Sea ahora $x \in \mathbb{R}$, entonces existe simétrico x' simétrico de x si y sólo si $x * x' = x' * x = 0$ o bien $x + x' - xx' = 0$ o bien $x'(1 - x) = -x$. Si $x \neq 1$ entonces existe $x' = x/(x - 1)$. Si $x = 1$ tenemos la relación $x' \cdot 0 = -1$ y por tanto no existe x'. Concluimos que $(\mathbb{R}, *)$ no es un grupo.

b) Tenemos:

$$x * x = x + x - x^2 = 2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2,$$

$$x * x * x = (2x - x^2) * x = 2x - x^2 + x - (2x - x^2)x$$

$$= 3x - 3x^2 + x^3 = 1 - (1-x)^3.$$

Lo anterior sugiere la fórmula

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n} = 1 - (1-x)^n. \quad (1)$$

Vamos a demostrarla por inducción. La fórmula hemos visto que es cierta para $n = 2$. Sea cierta para n. Entonces

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n+1} = (\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n}) * x$$

$$= 1 - (1-x)^n + x - [1 - (1-x)^n]x$$

$$= 1 - (1-x)^n + \cancel{x} - \cancel{x} + x(1-x)^n$$

$$= 1 - (1-x)^n(1-x) = 1 - (1-x)^{n+1},$$

es decir la fórmula (1) es cierta para $n + 1$.

10. Interna. El producto de dos números racionales no nulos es un número racional no nulo y $1/7$ es un racional no nulo, en consecuencia se verifica la propiedad interna.

Asociativa. Para a, b, c elementos de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:

$$(a * b) * c = \frac{ab}{7} * c = \frac{\frac{ab}{7}c}{7} = \frac{abc}{49},$$

$$a * (b * c) = a * \frac{bc}{7} = \frac{a\frac{bc}{7}}{7} = \frac{abc}{49}.$$

Se cumple.

Elemento neutro. $e \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es elemento neutro si y sólo si $a * e = e * a = a$ para todo $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{ae}{7} = \frac{ea}{7} = a \quad \forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

relaciones que se verifican para $e = 7$.

Elemento simétrico. Sea $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces $a' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es simétrico de a si y sólo si $a * a' = a' * a = 7$ o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{aa'}{7} = \frac{a'a}{7} = 7,$$

relaciones que se verifican para $a' = 49/a$. Hemos demostrado que $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, *)$ es grupo.

Es además abeliano pues para a, b elementos de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:

$$a * b = \frac{ab}{7} = \frac{ba}{7} = b * a.$$

4.2. Primeras propiedades de los grupos

1. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que:
(i) El elemento neutro e es único.
(ii) Para cada $x \in G$ su simétrico x' es único.
(iii) Para cada $x \in G$ se verifica $(x')' = x$ (es decir, el simétrico del simétrico de un elemento es el elemento).
(iv) Para cualquier par de elementos x, y de G se verifica $(x * y)' = y' * x'$ (es decir, el simétrico del operado de dos elementos es el operado de los simétricos cambiado de orden).
(v) Todos elemento a de G es regular, es decir:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c, \quad b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

2. Sea $(G, *)$ un grupo. Escribir la propiedad $(x * y)' = y' * x'$ en notaciones aditiva y multiplicativa.
3. Sea un grupo $(G, \cdot)$ tal que para todo $x \in G$ se verifica $x^2 = e$. Demostrar que el grupo es abeliano.
4. Sobre un grupo multiplicativo abeliano, resolver la ecuación $xabxc = bxa$.
5. Sobre un grupo multiplicativo cualquiera, hallar una solución de la ecuación $xax = bba^{-1}$.

Solución. 1. (i) Supongamos que existieran dos elementos neutros e y e'. Por ser e neutro se verifica $e * e' = e'$ y por ser e' neutro, $e * e' = e$. En consecuencia $e = e'$.

(ii) Supongamos que x tuviera dos simétricos x' y x'', entonces se verificaría

$$x * x' = x' * x = e, \quad x * x'' = x'' * x = e.$$

Las igualdades anteriores implican $x * x' = x * x''$. Entonces,

$$x * x' = x * x'' \Rightarrow x' * (x * x') = x' * (x * x'') \Rightarrow$$

$$(x' * x) * x' = (x' * x) * x'' \Rightarrow e * x' = e * x'' \Rightarrow x' = x''.$$

Es decir, para cada $x \in G$ su simétrico x' es único.

(iii) Tenemos $(x')*(x')' = e$ y por otra parte $x'*x = e$. Dado que el simétrico de x' es único se concluye que $(x')' = x$.

(iv) Se verifica

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e.$$

Como el simétrico de cada elemento es único se concluye que $(x*y)' = y'*x'$.

(v) Si $a * b = a * c$, operando a la izquierda por el simétrico a' de a:

$$a' * (a * b) = a' * (a * c) \Rightarrow (a' * a) * b = (a' * a) * c$$

$$\Rightarrow e * b = e * c \Rightarrow b = c.$$

Si $b * a = c * a$, operando a la derecha por el simétrico a' de a obtenemos de manera análoga $b = c$.

2. Si al grupo lo denotamos por $(G, +)$ la propiedad se escribe

$$-(x + y) = (-y) + (-x),$$

o bien $-(x + y) = -x - y$. Si al grupo lo denotamos por $(G, \cdot)$ la propiedad se escribe $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

3. Sean x, y elementos de G, por hipótesis se verifica

$$(xy)^2 = e, \quad x^2 = e, \quad y^2 = e.$$

Esto implica $(xy)^2 = x^2y^2$ o equivalentemente $xyxy = xxyy$. Como los elementos de un grupo son regulares a la derecha y a la izquierda, se deduce $yx = xy$. Es decir, el grupo es abeliano.

4. Dado que el grupo es abeliano, la ecuación dada equivale a $xcxab = xab$. Dado que los elementos de un grupo son regulares, queda $xc = e$, con lo cual, $x = c^{-1}$.

5. Multiplicando ambos miembros por a a la derecha, queda $(xa)(xa) = bb$. Basta por tanto elegir x tal que $xa = b$. En consecuencia, una solución de la ecuación dada es $x = ba^{-1}$.

4.3. Subgrupos

1. Demostrar el teorema de caracterización de subgrupos:
Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subset G$. Entonces, H es subgrupo de G si y sólo si se verifican las condiciones
(i) $H \neq \emptyset$.
(ii) Para todo $x \in H$ y para todo $y \in H$ se verifica $x * y' \in H$.

2. Demostrar que el conjunto H de los enteros pares es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

3. En $\mathbb{R}^2$ se define la operación $+$ de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

(i) Demostrar que $(\mathbb{R}^2, +)$ es grupo.
(ii) Demostrar que $H_1 = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $H_2 = \{(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$ son subgrupos de $\mathbb{R}^2$.
(iii) Demostrar que $H_1 \cup H_2$ no es subgrupo de $\mathbb{R}^2$ (esto prueba que en general la unión de subgrupos de un grupo, no es subgrupo del mismo).

4. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que $\{e\}$ y G son subgrupos de G.
Nota. A estos dos subgrupos se les llama *subgrupos impropios*, a los demás subgrupos de G se les llama *subgrupos propios*.

5. Sea $(G, *)$ un grupo y sean H_1 y H_2 subgrupos de G. Demostrar que $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de G.

6. Sea el grupo $(G, \cdot)$ y sea $\{H_j : j \in J\}$ una familia de subgrupos de G. Demostrar que $\bigcap_{j \in J} H_j$ es subgrupo de G.

7. Sea m entero, y sea $(m) = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } m\}$. Demostrar que (m) es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

8. Demostrar que los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}$ son los de la forma (m) con m entero.

Solución. 1. Si H es subgrupo de G el neutro e de G pertenece a H y por tanto $H \neq \emptyset$. Si x e y son elementos de H, el simétrico y' de y pertenece a H por ser $(H, *)$ grupo. Por la interna de $*$ en H se verifica $x * y' \in H$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica (i) y (ii). Veamos que H es subgrupo de G. Como $H \neq \emptyset$ sea $z \in H$. Por (ii) se verifica $e = z * z' \in H$,

es decir el neutro pertenece a H. Si $x \in H$, por (ii) se verifica $x' = e*x' \in H$, es decir para todo elemento de H su simétrico pertenece a H. Si x, y son elementos de H, $y' \in H$ y por (ii) se verifica $x * y = x * (y')' \in H$, es decir $*$ es interna en H. Dado que la propiedad asociativa se cumple en G, también se verifica en H.
Concluimos que H es subgrupo de G.

2. (i) El elemento neutro $e = 0$ pertenece a H pues es número par.
(ii) Sean $x, y \in H$, entonces $x*y' = x+(-y) = x-y \in H$, pues la diferencia de números pares es un número par.

3. (i) 1. Interna. Claramente se cumple pues la suma de dos números reales es un número real.
2. Asociativa. Usando la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{R}$:

$$[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))$$

$$= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] .$$

3. Elemento neutro. El elemento $e = (0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ claramente cumple $e + x = x + e = x$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
4. Elemento simétrico. Para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ el elemento $x' = (-x_1, -x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ satisface $x + x' = x' + x = e$. Hemos demostrado que $(\mathbb{R}^2, +)$ es grupo. Además, es abeliano debido a que la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa.

(ii) Claramente $e = (0, 0) \in H_1$. Por otra parte, dos elementos de H_1 son de la forma $(\alpha_1, 0)$ y $(\alpha_2, 0)$, entonces:

$$(\alpha_1, 0) + (\alpha_2, 0)' = (\alpha_1, 0) + (-\alpha_2, 0) = (\alpha_1 - \alpha_2, 0) \in H_1.$$

Concluimos que H_1 es subgrupo de $\mathbb{R}^2$. De manera totalmente análoga se demuestra que H_2 también lo es.

(iii) El elemento $(1, 0)$ pertenece a H_1 y el $(0, 1)$ a H_2. Es decir $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son elementos de $H_1 \cup H_2$. Sin embargo,

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin H_1 \cup H_2.$$

No se verifica la propiedad interna en $H_1 \cup H_2$, en consecuencia $H_1 \cup H_2$ no es subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

4. Se verifica $e \in \{e\} \subset G$ y $e * e' = e \in \{e\}$, por tanto $\{e\}$ es subgrupo de G. Dado que por hipótesis $(G, *)$ es grupo y $G \subset G$, se deduce que G es subgrupo de G.

5. (i) Dado que H_1 y H_2 son subgrupos de G, el elemento neutro e de G pertenece a H_1 y a H_2, en consecuencia $e \in H_1 \cap H_2$.

(ii) Si x e y pertenen a $H_1 \cap H_2$, entonces $x \in H_1$, $x \in H_2$, $y \in H_1$, $y \in H_2$. Como H_1 y H_2 son subgrupos de G se verifica que $x*y'$ pertenece a H_1 y a H_2 (teorema de caracterización de subgrupos), en consecuencia $x*y' \in H_1 \cap H_2$. Concluimos que $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de G.

6. Usamos el teorema de caracterización de subgrupos.
(i) Dado que H_j es subgrupo de G para todo j, el elemento neutro e pertenece a H_j para todo j y por tanto $e \in \bigcap_{j \in J} H_j$.
(ii) Sean x e y elementos de $\bigcap_{j \in J} H_j$. Esto implica que $xy^{-1} \in H_j$ para todo j por ser H_j es subgrupo de G para todo j. En consecuencia, $xy^{-1} \in \bigcap_{j \in J} H_j$. Concluimos que $\bigcap_{j \in J} H_j$ es subgrupo de G

7. Se verifica $0 = 0m$, por tanto 0 es múltiplo de m, es decir $0 \in (m)$. Sean $x, y \in (m)$, entonces $x = km$ e $y = sm$ para ciertos enteros k y s. Ahora bien, $x - y = (k - s)m$ siendo $k - s$ entero, lo cual implica que $x - y \in (m)$. Por el teorema de caracterización de subgrupos, concluimos que (m) es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

8. Sabemos que para todo m entero, (m) es subgrupo de $\mathbb{Z}$. Veamos que estos son los únicos. En efecto, sea $H \subset \mathbb{Z}$ subgrupo de $\mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, entonces $H = (0)$. Si $H \neq \{0\}$ existe algún entero positivo en H, (pues si $n \in H$, $-n \in H$). Llamemos m al menor de los enteros positivos que pertenecen a H. Demostremos que $H = (m)$.

(i) $(m) \subset H$. Si $x \in (m)$, entonces $x = km$ con k entero, es decir o bien $m = 0$ si $k = 0$, o bien $x = m + \ldots + m$ (k sumandos si $k > 0$), o bien $x = (-m) + \ldots + (-m)$ ($-k$ sumandos si $k < 0$). Como $m \in H$ y H es subgrupo, en cualquier caso $x \in H$.

(ii) $H \subset (m)$. Si $h \in H$, efectuando la división euclídea de h entre m :

$$h = qm + r, \quad 0 \leq r < m,$$

con q, r enteros. Entonces, $r = h - qm$ pertenece a H, lo cual implica por la elección de m (mínimo positivo en H) que $r = 0$, o sea $r = qm \in (m)$.

4.4. Tabla de Cayley

1. Construir la tabla de Cayley del grupo $G = \{1, -1\}$ con la operación producto usual de números.
2. Sea $G = \{1, -1, i, -i\}$ en donde i representa la unidad imaginaria. Se considera la operación $\cdot$ producto habitual de números complejos. Construir la correspondiente tabla de Cayley, y demostrar que $(G, \cdot)$ es grupo abeliano.
3. Sea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$ definidas mediante:

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = \frac{1}{x} \ , \ f_3(x) = -x \ , \ f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Construir la correspondiente tabla de Cayley para la operación $\circ$ composición de aplicaciones. Demostrar que $(G, \circ)$ es un grupo.
4. Sea $G = \{a, b, c\}$ y la operación $\cdot$ en G cuya tabla de Cayley es

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Determinar su elemento neutro, si éste existe y el inverso de cada elemento caso de existir.

Solución. 1. La tabla de Cayley es:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	1	1

2. La tabla de Cayley de la operación es

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

lo cual prueba que la operación es interna. Por otra parte, sabemos que el producto de números complejos es operación asociativa y conmutativa., y el número 1 es elemento neutro de la operación.Por último y simplemente observando la tabla de Cayley, verificamos que todo elemento de G tiene inverso en $G : 1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $i^{-1} = -i$, $(-i)^{-1} = i$.

3. Usando la definición de composición de aplicaciones, fácilmente construimos la tabla de Cayley. Por ejemplo:

$$(f_3 \circ f_4)(x) = f_3[f_4(x)] = f_3\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_3 \circ f_4 = f_2,$$

etc. Obtendríamos la tabla:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

La operación es claramente interna y sabemos que la composición de aplicaciones es asociativa. El elemento f_1 de G satisface $f_i \circ f_1 = f_1 \circ f_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$, por tanto es elemento neutro. Además, todo f_i tiene elemento inverso, siendo $f_i^{-1} = f_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Concluimos que $(G, \circ)$ es un grupo (además conmutativo, como fácilmente se observa).

4. Se verifica $aa = aa = a, \quad ab = ba = b, \quad ac = ca = c$, en consecuencia, a es elemento neutro para la operación dada. Por otra parte

$$aa = aa = a \Rightarrow a^{-1} = a.$$
$$bc = cb = a \Rightarrow b^{-1} = c \text{ y } c^{-1} = b.$$

4.5. Generadores de un grupo

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y S un subconjunto no vacío de G.. Sea $\langle S \rangle$ el conjunto de todos los elementos de G que son producto de un número finito de elementos de tal manera que cada factor es o bien un elemento de S o bien el inverso de un elemento de S. Demostrar que:
(i) $\langle S \rangle$ es subgrupo de G (según sabemos, se le llama subgrupo generado por S).
(ii) $\langle S \rangle$ contiene a S y es el menor de todos los subgrupos de G que contienen a S.

2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y S un subconjunto no vacío de G. Demostrar que $\langle S \rangle = \bigcap H_i$ en donde $\{H_i\}$ es la familia de todos los subgrupos de G que contienen a S.

3. Sea el grupo $(\mathbb{C}, +)$ con la operación $+$ usual. Determinar $\langle S \rangle$, siendo $S = \{1, i\}$.

Solución. 1. (i) El elemento neutro e de G pertenece a $\langle S\rangle$, ya que, por ser $S\neq\emptyset$, existe $a\in S$ luego $e=aa^{-1}\in\langle S\rangle$. Si $a,b\in\langle S\rangle$ entonces

$$a=a_1a_2\dots a_n,\quad b=b_1b_2\dots b_m.$$

en donde los a_i y los b_j o sus simétricos son elementos de S. Por otra parte

$$ab^{-1}=a_1a_2\dots a_nb_m^{-1}\dots b_2^{-1}b_1^{-1}.$$

Por hipótesis, para cada i, o bien a_i o bien a_i^{-1} está en S. Por hipótesis, para cada j, o bien b_j o bien b_j^{-1} está en S, es decir o bien b_j^{-1} está en S o bien $(b_j^{-1})^{-1}=b_j$ está en S. Esto implica que $ab^{-1}\in\langle S\rangle$ y como consecuencia $\langle S\rangle$ es sungrupo de G.

(ii) Si $a\in S$ entonces $a=a$ en donde $a\in S$, es decir $a\in\langle S\rangle$, por tanto $S\subset\langle S\rangle$.

Sea H subgrupo de G con $S\subset H$. Si $a\in\langle S\rangle$, a es de la forma $a=a_1a_2\dots a_n$ y para cualquier i, o bien $a_i\in S$ o bien $a_i^{-1}\in S$. Como los elementos de S están en H y H es subgrupo, para cada i, o bien $a_i\in H$ o bien $(a_i^{-1})^{-1}=a_i\in H$ y por la interna en H, se verifica $a\in H$. Hemos demostrado que $\langle S\rangle\subset H$ y por tanto $\langle S\rangle$ es el menor de todos los subgrupos de G que contienen a S.

2. Dado que $S\subset H_i$ para todo i, se verifica que $S\subset\bigcap H_i$. Como la intersección de cualquier familia de subgrupos de G es subgrupo de G tenemos que $\bigcap H_i$ es un subgrupo de G que contiene a S.

Si un subgrupo de G contiene a S, éste será un H_j de la familia $\{H_i\}$ y por tanto $\bigcap H_i\subset H_j$. Es decir, $\bigcap H_i$ es el menor de todos los subgrupos de G que contienen a S y por tanto $\langle S\rangle=\bigcap H_i$.

3. La operación $+$ de complejos es conmutativa. Los simétricos de 1 e i son respectivamente -1 y $-i$. De la definición de $\langle S\rangle$ deducimos inmediatamente que $\langle S\rangle=\{m+ni:m,n\in\mathbb{Z}\}$. Es decir, $\langle S\rangle$ está formado por los elementos de $\mathbb{C}$ que tienen partes real e imaginaria enteras.

4.6. Grupos cíclicos

1. Se considera el grupo $G=\{1,-1\}$ con la operación $\cdot$ producto habitual de números. Demostrar que el grupo es cíclico.
2. Se considera el grupo $G=\{1,-1,i,-i\}$ (i es unidad imaginaria) con

la operación $\cdot$ producto habitual de números complejos. Demostrar que el grupo es cíclico.
3. Demostrar que $(\mathbb{Z}, +)$ es cíclico ($+$ es la suma habitual).
4. Demostrar que todo grupo cíclico es conmutativo.
5. Demostrar que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

Solución. 1. Sabemos que un grupo es cíclico si y sólo si está generado por un único elemento. Se verifica $(-1)^0 = 1,\ (-1)^1 = -1$. Es decir, $G = \{(-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$, lo cual implica que G es cíclico y que -1 es un generador de G.

2. Se verifica $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i$. Es decir, $G = \{i^n : n \in \mathbb{Z}\}$, lo cual implica que G es cíclico y que i es uno de sus generadores. Fácilmente se comprueba que $-i$ es también generador de G.

3. Todo elemento $m \in \mathbb{Z}$ se puede escribir en la forma $m = m1$, lo cual implica que 1 es generador de $\mathbb{Z}$.

4. Sea $(G, \cdot)$ un grupo cíclico y sea $a \in G$ un generador de G. Sean $x, y \in G$, entonces $x = a^n$ e $y = a^m$ para ciertos enteros n y m. Se verifica:

$$xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx.$$

5. Sea $(G, \cdot)$ un grupo cíclico y sea a un generador de G. Sea H un subgrupo de G. Si $H = \{e\}$, entonces $H = \langle e \rangle$, con lo cual H es cíclico.

Sea ahora $H \neq \{e\}$. Como $H \subset G$, entonces $a^k \in H$ para algún $k > 0$ entero. Llamemos m al menor de todos esos k y sea $b = a^m$.
Veamos que $H = \langle b \rangle$, lo cual demostrará que H es cíclico. Claramente $\langle b \rangle \subset H$, pues $b \in H$ y H es subgrupo de G.

Si $x \in H$, entonces al ser a generador de H, x es de la forma $x = a^n$ con n entero. Efectuando la división euclídea de n entre m :

$$n = mq + r \quad (0 \leq r < m).$$

Entonces, $x = a^n = a^{mq+r} = a^{mq}a^r = b^q a^r$. Pero $a^r = x(b^q)^{-1}$ pertenece a H (pues x y b pertenecen al subgrupo H). Como m es el mínimo de los enteros positivos k que cumplen $a^k \in H$, ha de ser necesariamente $r = 0$. Es decir, $x = b^q$ lo cual implica que $H \subset \langle b \rangle$, y por tanto H es cíclico.

4.7. Subgrupos normales

A. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo de G. Se definen en G las relaciones:

$$xRy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H, \quad xSy \Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

1. Demostrar que R y S son relaciones de equivalencia en G.
2. Determinar los conjuntos cocientes G/R y G/S.
3. Demostrar que H es subgrupo normal si y sólo si $R = S$.

B. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo de G. Demostrar que H es normal $\Leftrightarrow \forall g \in G \ \forall h \in H$ se verifica $ghg^{-1} \in H$.

C. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

$i)$ Demostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo, en donde $\cdot$ representa el producto usual de matrices.
$ii)$ Demostrar que $H = \{M \in G : a = 1\}$ es subgrupo normal de G (Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Caminos, UPM).

Solución. A. 1. Veamos que R es relación de equivalencia:
Reflexiva. Para todo $x \in G$ se verifica $xx^{-1} = e \in H$, es decir xRx.
Simétrica. Para todo $x, y \in G$:

$$xRy \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow (H \text{ subgrupo }) \ (xy^{-1})^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow (y^{-1})^{-1}x^{-1} \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow yRx.$$

Transitiva. Para todo $x, y, z \in G$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^{-1} \in H \\ yz^{-1} \in H \end{cases}$$

$$\Rightarrow (H \text{ subgrupo }) \ (xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H \Rightarrow xRz.$$

De manera análoga se demuestra que S es relación de equivalencia en G.

2. Determinemos los elementos de G/R. Si $g \in G$, la clase de equivalencia a la que pertenece g es:

$$[g] = \{x \in G : xRg\} = \{x \in G : xg^{-1} \in H\},$$

es decir $x \in [g]$ si y sólo si $xg^{-1} = h$ para algún $h \in H$, o equivalentemente, $x = hg$ para algún $h \in H$. Por tanto $[g] = Hg$. De manera análoga se demuestra que la clase de equivalencia a la que pertenece g para la relación S es gH.

3. Las relaciones R y S son iguales equivale a decir que para todo $g \in G$, su clase de equivalencia para la relación R es igual a su clase de equivalencia para la relación S. Esto equivale a $gH = Hg$ para todo $g \in G$, que a su vez equivale a decir que el subgrupo H es normal.

B. $\Rightarrow$) Sean $g \in G$ y $h \in H$ cualesquiera. Entonces, $gh \in gH$. Pero por hipótesis $gH = Hg$, por tanto $gh = h_1 g$ para algún $h_1 \in G$. Esto implica $ghg^{-1} = h_1 \in H$.
$\Leftarrow$) Sea $g \in G$ genérico. Veamos que $gH = Hg$, lo cual demostrará que H es normal. En efecto, si $x \in gH$, entonces $x = gh$ para algún $h \in H$. Multiplicando a la derecha por g^{-1} queda $xg^{-1} = ghg^{-1}$, que pertenece a H por hipótesis. Es decir, $xg^{-1} = h_1$ para algún $h_1 \in H$, lo que equivale a decir $x = h_1 g \in Hg$. Hemos demostrado que $gH \subset Hg$. De manera análoga se demuestra que $Hg \subset gH$.

C. i) Interna. Multipliquemos dos matrices genéricas de G:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ab' + b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis a y a' son no nulos, por tanto aa' es no nulo lo cual implica que el producto de dos matrices de G pertenece a G. Asociativa. Se cumple en general para matrices cuadradas del mismo orden, en particular para las matrices de G. Elemento neutro. Para $a = 1, b = 0$ obtenemos la matriz identidad I de orden 2, que satisface $AI = IA = A$ para toda matriz de G. Es decir existe elemento neutro siendo éste la matriz identidad I. Elemento inverso. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Su inversa es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que claramente pertenece a G y satisface $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Es decir, todo elemento de G posee inverso en G. Concluimos que $(G, \cdot)$ es un grupo.

ii) La matriz identidad I de orden 2 (es decir, el elemento neutro de G) pertenece a H. Por otra parte,

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b - b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H,$$

es decir H es subgrupo de G. Veamos que es subgrupo normal. Efectivamente para matrices genéricas $A \in G$ y $M \in H$ tenemos

$$AMA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & am \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H.$$

4.8. Centro de un grupo

Si $(G, \cdot)$ es un grupo, se define el centro de G denotado por $Z(G)$ como

$$Z(G) = \{z \in G : gz = zg \ , \ \ \forall g \in G\},$$

es decir, como el conjunto de los elementos de G que conmutan con todos los de G. Demostrar que $Z(G)$ es subgrupo normal de G.

Solución. $1 \in Z(G)$ pues $g1 = 1g$ para todo $g \in G$. Sean ahora $g_1, g_2 \in Z(G)$ y $g \in Z(G)$. Entonces

$$g(g_1 g_2^{-1}) = (gg_1)g_2^{-1} = (g_1 g)g_2^{-1} = g_1(gg_2^{-1}).$$

Como $g_2 \in Z(G)$ se verifica $g_2 g^{-1} = g^{-1} g_2$, y tomando inversos $gg_2^{-1} = g_2^{-1} g$. Por tanto

$$g(g_1 g_2^{-1}) = g_1(g_2^{-1} g) = (g_1 g_2^{-1})g,$$

es decir $g_1 g_2^{-1} \in Z(G)$, en consecuencia $Z(G)$ es subgrupo de G.

Veamos que es normal. Si $g \in G$ y $h \in Z(G)$ se verifica $gh = hg$ y por tanto $h = g^{-1}hg$. Entonces, $h = g^{-1}hg \in Z(G)$ lo cual implica que $Z(G)$ es normal.

4.9. Subgrupo normal y centro

En $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la ley de composición interna $*$ mediante

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + (-1)^{y_1} x_2, y_1 + y_2).$$

Se pide:
(a) Probar que ley $*$ confiere a G estructura de grupo no abeliano.
(b) Demostrar que el subconjunto $H = \{(x, y) \in G : y = 0\}$ es un subgrupo normal de G.
(c) Hallar el centro de G.

Solución. (a) Claramente $*$ es una ley de composición interna. Veamos que cumple la propiedad asociativa. Por un parte:

$$\begin{aligned}&[(x_1,y_1)*(x_2,y_2)]*(x_3,y_3)=(x_1+(-1)^{y_1}x_2\ ,\ y_1+y_2)*(x_3,y_3)\\&=(x_1+(-1)^{y_1}x_2+(-1)^{y_1+y_2}x_3\ ,\ y_1+y_2+y_3).\end{aligned}$$

Por otra:

$$\begin{aligned}&(x_1,y_1)*[(x_2,y_2)*(x_3,y_3)]=(x_1,y_1)*(x_2+(-1)^{y_2}x_3\ ,\ y_2+y_3)\\&=(x_1+(-1)^{y_1}(x_2+(-1)^{y_2}x_3)\ ,\ y_1+y_2+y_3).\end{aligned}$$

Dado que $x_1+(-1)^{y_1}(x_2+(-1)^{y_2}x_3)=x_1+(-1)^{y_1}x_2+(-1)^{y_1+y_2}x_3$ concluimos que la operación $*$ es asociativa. Veamos que existe elemento neutro. En efecto, $(e_1,e_2)\in G$ es elemento neutro si y sólo si para todo $(x,y)\in G$ se verifica $(x,y)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(x,y)=(x,y)$, o equivalentemente

$$(x+(-1)^{y}e_1\ ,\ y+e_2)=(e_1+(-1)^{e_2}x\ ,\ e_2+y)=(x,y).$$

Esta igualdad se verifica para $(e_1,e_2)=(0,0)$, que es por tanto el elemento neutro de la ley de composición interna $*$. Veamos ahora que todo elemento $(x,y)\in G$ tiene elemento simétrico. En efecto, (x',y') es simétrico de (x,y) si y sólo si $(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(0,0)$, o equivalentemente

$$(x+(-1)^{y}x'\ ,\ y+y')=(x'+(-1)^{y'}x\ ,\ y'+y)=(0,0).\quad (1)$$

De $y+y'=0$ deducimos $y'=-y$ y de $x+(-1)^yx'=0$ que $x'=-(-1)^{-y}x$ o bien $x'=(-1)^{1-y}x$. Para estos valores de x' e y' se verifican las igualdades (1). Concluimos que todo elemento $(x,y)\in G$ tiene simétrico, siendo este

$$(x,y)^{-1}=(x',y')=((-1)^{1-y}x\ ,\ -y).$$

Hemos demostrado que $(G,*)$ es grupo. No es abeliano pues por ejemplo

$$\begin{aligned}&(1,0)*(0,1)=(1+(-1)^0\cdot 0\ ,\ 0+1)=(1,1),\\&(0,1)*(1,0)=(0+(-1)^1\cdot 1\ ,\ 1+0)=(-1,1).\end{aligned}$$

(b) Veamos que H es un subgrupo de G. En efecto, $(0,0)\in H$ lo cual implica que $H\neq\emptyset$. Sean $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$ elementos de H, entonces,

$$\begin{aligned}&(x_1,0)*(x_2,0)^{-1}=(x_1,0)*((-1)^{1-0}x_2\ ,\ -0)=(x_1,0)*(-x_2,0)\\&=(x_1+(-1)^0\cdot(-x_2)\ ,\ 0+0)=(x_1-x_2,0)\in H.\end{aligned}$$

Veamos que H es normal. Sean $(g_1,g_2)\in G$ y $(h,0)\in H$ entonces

$$(g_1,g_2)*(h,0)*(g_1,g_2)^{-1}=(g_1+(-1)^{g_2}h\ ,\ g_2)*((-1)^{1-g_2}g_1\ ,\ -g_2).$$

Al operar obtenemos un elemento de la forma $(m, 0)$ con $m \in \mathbb{Z}$, el cual pertenece a H. Concluimos que H es subgrupo normal de G.

(c) El centro $Z(G)$ de un grupo G está formado por los elementos del grupo que conmutan con todos los del grupo. En nuestro caso:

$$Z(G) = \{(a, b) \in G : (a, b) * (x, y) = (x, y) * (a, b) \ \ \forall (x, y) \in G\}.$$

Tenemos que hallar por tanto los elementos $(a, b) \in G$ que cumplen

$$\begin{cases} a + (-1)^b x = x + (-1)^y a \\ \qquad b + y = y + b \end{cases}$$

para todo x y para todo y enteros. La segunda igualdad se cumple para todo b y para todo y enteros. La segunda la podemos expresar en la forma

$$[1 - (-1)^y]a = [1 - (-1)^b]x. \quad (2)$$

Si $a \neq 0$, haciendo $x = a$ queda $(-1)^y = (-1)^b$. Esta última igualdad no se cumple para $y = b + 1$, lo cual implica que necesariamente ha de ser $a = 0$. Para $a = 0$ la igualdad (2) se transforma en $[1 - (-1)^b]x = 0$, igualdad que se verifica para todo x entero si y sólo si $1 = (-1)^b$ es decir, si b es par.

Hemos demostrado que si (a, b) es un elemento del centro de G, necesariamente es de la forma $(0, 2k)$ con k entero. Es también suficiente que tenga esa forma. En efecto, para todo $(x, y) \in G$:

$$(0, 2k) * (x, y) = (0 + (-1)^{2k}x\ ,\ 2k + y) = (x, 2k + y).$$
$$(x, y) * (0, 2k) = (x + (-1)^y \cdot 0\ ,\ 2k + y) = (x, y + 2k).$$

Concluimos que $(0, 2k) \in Z(G)$ y por tanto $Z(G) = \{0\} \times (2\mathbb{Z})$.

4.10. Grupo cociente

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo de G. Demostrar que:
(i) La relación en $G : xRy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ es de equivalencia.
(ii) Si H es subgrupo normal, para todo $g \in G$ la clase de equivalencia a la que pertenece g es gH.
2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo normal de G. Demostrar que G/H es grupo con la operación $(aH)(bH) = (ab)H \ \forall a, b \in G$.
3. Demostrar que $i2\pi\mathbb{Z} = \{i2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo del grupo aditivo de los números complejos. Determinar el grupo cociente $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$.

Solución. 1. (i) Reflexiva. Para todo $x \in G$ se verifica $xx^{-1} = e \in H$, es decir xRx.
Simétrica. Para todo $x, y \in G$:

$$xRy \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow (H \text{ subgrupo }) \; (xy^{-1})^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow (y^{-1})^{-1}x^{-1} \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow yRx.$$

Transitiva. Para todo $x, y, z \in G$:

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^{-1} \in H \\ yz^{-1} \in H \end{cases}$$
$$\Rightarrow (H \text{ subgrupo }) \; (xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H \Rightarrow xRz.$$

(ii) Determinemos los elementos de G/R. Si $g \in G$, la clase de equivalencia a la que pertenece g es:

$$[g] = \{x \in G : xRg\} = \{x \in G : xg^{-1} \in H\},$$

es decir $x \in [g]$ si y sólo si $xg^{-1} = h$ para algún $h \in H$, o equivalentemente, $x = hg$ para algún $h \in H$. Por tanto $[g] = Hg$. Ahora bien, como H es normal, también $[g] = gH$.

2. Lo primero que tenemos que demostrar es que la operación dada en G/H está bien definida. Es decir, tenemos que demostrar que si $aH = a_1H$ y $bH = b_1H$, entonces

$$(aH)(bH) = (a_1H)(b_1H). \quad (1)$$

Esto es claro, si no no ocurriera (1), la operación en G/H dependería del representante elegido para cada clase, y no de la clase en sí.
Supongamos pues que $aH = a_1H$ y $bH = b_1H$. Esto implica que $aa_1^{-1} \in H$ y $bb_1^{-1} \in H$, o equivalentemente $aa_1^{-1} = h_1$ y $bb_1^{-1} = h_2$ con h_1 y h_2 en H. Entonces,

$$\begin{aligned} &(ab)(a_1b_1)^{-1} = abb_1^{-1}a_1^{-1} = ah_2a_1^{-1} \in H \text{ (pues } H \text{ es normal)} \\ &\Rightarrow (ab)H = (a_1b_1)H \Rightarrow (aH)(bH) = (a_1H)(b_1H). \end{aligned}$$

Interna. Claramente, el producto de dos elementos cualesquiera de G/H es un elemento de G/H.
Asociativa. Para todo $aH, bH, cH \in G/H$ y teniendo en cuenta la propiedad asociativa en G :

$$\begin{aligned} &(aH)\,[(bH)(cH)] = (aH)\,((bc)H) = (a(bc))H \\ &= ((ab)c)H = ((ab)H)\,(cH) = [(aH)(bH)]\,(cH). \end{aligned}$$

Elemento neutro. El elemento eH de G/H satisface para todo $aH \in G/H$:

$$(aH)(eH) = (ae)H = aH, \quad (eH)(aH) = (ea)H = aH,$$

por tanto $eH = H$ es elemento neutro.
Elemento simétrico. Para todo $aH \in G/H$, el elemento $a^{-1}H \in G/H$ satisface:

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH,$$

$$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH,$$

por tanto todo $aH \in G/H$ tiene elemento simétrico, siendo este $a^{-1}H$. Concluimos que G/H es grupo con la operación dada.

3. El neutro del grupo aditivo de los numeros complejos es $0 = i2\pi \cdot 0 \in i2\pi\mathbb{Z}$. Si $i2\pi k$ e $i2\pi k'$ son dos elementos de $i2\pi\mathbb{Z}$,

$$i2\pi k - i2\pi k' = i2\pi(k - k') \text{ con } k - k' \in \mathbb{Z},$$

lo cual implca que $i2\pi k - i2\pi k' \in i2\pi\mathbb{Z}$. Esto demuestra que $i2\pi\mathbb{Z}$ es subgrupo del grupo aditivo de los números complejos.

Dado que $(\mathbb{C}, +)$ es comutativo, cualquier subgrupo es normal y por tanto está definido el grupo cociente $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z} = \{z + i2\pi\mathbb{Z} : z \in \mathbb{C}\}$, siendo la operación suma en este grupo:

$$(z + i2\pi\mathbb{Z}) + (w + i2\pi\mathbb{Z}) = (z + w) + i2\pi\mathbb{Z}.$$

4.11. Grupo de clases residuales

1. Construir la tabla de Cayley de $\mathbb{Z}/(3) = \{0, 1, 2\}$.
2. Construir las tablas de Cayley de $(\mathbb{Z}_2, +)$ y $(\mathbb{Z}_4, +)$.
3. Construir la tabla de Cayley de $(\mathbb{Z}_6, +)$. Escribir el opuesto de cada elemento.
4. Construir la tabla de Cayley de $(\mathbb{Z}_5, +)$. Escribir el opuesto de cada elemento.

Solución. 1. Dado que $a + b$ es c, siendo c resto de la división euclídea de $a + b$ entre 3 :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Los correspondientes elementos opuestos son:

$$-0 = 0, \ -1 = 2, \ -2 = 1.$$

2. Usando la conocida forma de sumar clases, las correspondientes tablas son:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

3. Usando la conocida forma de sumar clases:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Los correspondientes opuestos son:

$$-0 = 0, \ -1 = 5, \ -2 = 4, \ -3 = 3, \ -4 = 2, \ -5 = 1.$$

4. Usando la conocida forma de sumar clases:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Los correspondientes opuestos son:

$$-0 = 0, \ -1 = 4, \ -2 = 3, \ -3 = 2, \ -4 = 1.$$

4.12. Homomorfismos de grupos

1. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$ fijo es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

2. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ con $a > 0$ real fijo es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

3. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + x$ con a número real fijo. Analizar si f es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

4. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log x$. Demostrar que f es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

5. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G, \cdot)$ y $(G', \cdot)$. Sea e el neutro de G y e' el neutro de G'. Demostrar que,
(i) $f(e) = e'$.
(ii) Para todo $x \in G$ se verifica $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

6. Demostrar que la composición de homomorfismos de grupos es un homomorfismo.

7. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. En $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se define la operación $(x, y) * (z, u) = (xz, yu)$.
(i) Demostrar que $(G, *)$ es grupo abeliano.
(ii) Demostrar que la aplicación: $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \log(xy)$ es homomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

Solución. 1. En efecto, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

2. En efecto, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x) \cdot f(y).$$

3. Tenemos que analizar si se verifica $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y elementos de $\mathbb{R}$. Tenemos:

$$f(x + y) = a + (x + y), \quad f(x) + f(y) = (a + x) + (a + y).$$

Ahora bien, $f(x + y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow a + x + y = 2a + x + y \Leftrightarrow a = 2a$ $\Leftrightarrow a = 0$. Es decir, f es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$, si y sólo si $a = 0$.

4. Para todo x, y elementos de $\mathbb{R}^+$ se verifica:

$$f(xy) = \log(xy) = \log x + \log y = f(x) + f(y),$$

es decir f es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

5. (i) Elijamos un $x \in G$ cualquiera. Tenemos $f(x) = f(xe) = f(x)f(e)$. Esto implica que $f(x)\, e' = f(x)f(e)$. Como todos los elementos de un grupo son regulares, se deduce que $f(e) = e'$.
(ii) Para todo $x \in G$, se verifica $e' = f(e) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$. Es decir, el inverso de $f(x)$ es $f(x^{-1})$, que equivale a escribir $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

6. Sean $(G, \cdot)$, $(G', \cdot)$, $(G'', \cdot)$ tres grupos y $f : G \to G'$, $g : G' \to G''$ homomorfismos. Entonces, para todo x, y elementos de G :

$$(g \circ f)(xy) = g[f(xy)] = g[f(x)\ f(y)]$$

$$= g[f(x)]\ g[f(y)] = [(g \circ f)(x)]\ [(g \circ f)(y)],$$

es decir $g \circ f$ es homomorfismo entre los grupos $(G, \cdot)$ y $(G'', \cdot)$.

7. (i) Interna. Se verifica pues el producto de números reales positivos es un número real positivo.
Asociativa. Para todo $(x, y), (z, u), (v, w)$ elementos de G se verifica:

$$(x, y) * [(z, u) * (v, w)] = (x, y) * (zv, uw) = (x(zv), y(uw))$$

$$= ((xz)v, (yu)w) = (xz, yu) * (v, w) = [(x, y) * (z, u)] * (u, v).$$

Conmutativa. Para todo $(x, y), (z, u)$ elementos de G se verifica:

$$(x, y) * (z, u) = (xz, yu) = (zx, uy) = (z, u) * (x, y).$$

Elemento neutro. Para todo $(x, y) \in G$ se verifica $(x, y) * (1, 1) = (x, y)$, por tanto $(1, 1) \in G$ es elemento neutro.
Elemento simétrico. Para todo $(x, y) \in G$ se verifica $(x, y) * (1/x, 1/y) = (1, 1)$, por tanto $(1/x, 1/y) \in G$ es elemento simétrico de (x, y). Concluimos que $(G, *)$ es grupo abeliano.
(ii) Para todo $(x, y), (z, u)$ elementos de G se verifica:

$$\begin{aligned} f\,[(x, y) * (z, u)] &= f(xz, yu) = \log(xzyu) \\ &= \log(xy) + \log(zu) = f(x, y) + f(z, u), \end{aligned}$$

lo cual implica que f es homomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

4.13. Núcleo e imagen de un homomorfismo de grupos

1. Sea $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números reales no nulos. Demostrar que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^2$ es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Determinar $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G, \cdot)$ y $(G', \cdot)$. Demostrar que $\ker f$ es subgrupo normal de G.
3. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G, \cdot)$ y $(G', \cdot)$. Demostrar que $\operatorname{Im} f$ es subgrupo de G'.

Solución. 1. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^*$, se verifica $f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y)$, por tanto, f es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. El elemento neutro del grupo dado es el número real 1, en consecuencia:

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^* : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}.$$

Si un elemento x' pertenece a $\operatorname{Im} f$ entonces, $x' = f(x) = x^2$ para cierto $x \in \mathbb{R}^*$, lo cual implica que $x' > 0$ y por tanto $\operatorname{Im} f \subset (0, +\infty)$. Recíprocamente, sea $x' \in (0, +\infty)$. Entonces, $x' = f(\sqrt{x'})$ siendo $\sqrt{x'} \in \mathbb{R}^*$, luego $(0, +\infty) \subset \operatorname{Im} f$. Es decir, $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$.

2. Sabemos que si $f : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, entonces $f(e) = e'$, siendo e y e' los elementos neutros de G y G' respectivamente, por tanto $e \in \ker f$. Si $x, y \in \ker f$, entonces, $f(x) = f(y) = e'$. Usando que el transformado del inverso es el inverso del transformado:

$$\begin{aligned} f(xy^{-1}) &= f(x)f(y^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} \\ &= e'(e')^{-1} = e'e' = e' \Rightarrow xy^{-1} \in \ker f. \end{aligned}$$

Por el teorema de caracterización de subgrupos, deducimos que $\ker f$ es subgrupo de G. Veamos ahora que $\ker f$ es normal. En efecto, Para todo $g \in G$ y para todo $h \in \ker f$:

$$\begin{aligned} f(ghg^{-1}) &= f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'(f(g))^{-1} \\ &= f(g)(f(g))^{-1} = e' \Rightarrow ghg^{-1} \in \ker f, \end{aligned}$$

es decir $\ker f$ es normal.

3. Sabemos que si $f : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, entonces $f(e) = e'$, siendo e y e' los elementos neutros de G y G' respectivamente, por tanto $e' \in \operatorname{Im} f$. Si $x', y' \in \operatorname{Im} f$, entonces, $x' = f(x)$ e $y' = f(y)$ para

ciertos $x, y \in G$. Usando que el transformado del inverso es el inverso del transformado:

$$\begin{aligned} x'(y')^{-1} &= f(x)(f(y))^{-1} = f(x)f(y^{-1}) \\ &= f(xy^{-1}) \Rightarrow x'(y')^{-1} \in \operatorname{Im} f. \end{aligned}$$

Por el teorema de caracterización de subgrupos, deducimos que $\operatorname{Im} f$ es subgrupo de G'.

4.14. Clasificación de homomorfismos de grupos

1. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que f es monomorfismo $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$, siendo e el neutro de G.

2. Clasificar los siguientes homomorfismos:
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$ fijo), entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$.
(ii) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log x$. entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

3. Clasificar los siguientes homomorfismos:
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$
(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = e^x$, entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ($\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los reales positivos).

Solución. 1. $\Rightarrow$) Supongamos que fuera $\ker f \neq \{e\}$. Entonces, existiría $x \in G$ con $x \neq e$ tal que $f(x) = e'$ (elemento neutro de G'). Pero $f(e) = e'$, con lo cual f no sería inyectiva (absurdo).
$\Leftarrow$) Para todo x, y elementos de G :

$$\begin{aligned} &f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)(f(y))^{-1} = e' \Rightarrow f(x)f(y^{-1}) = e' \Rightarrow f(xy^{-1}) = e' \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in \ker f = \{e\} \Rightarrow xy^{-1} = e \Rightarrow x = y \Rightarrow f \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

2. (i) Si $a = 0$, el núcleo es $\ker f = \{x \in \mathbb{R} : 0x = 0\} = \mathbb{R} \neq \{0\}$, por tanto f no es inyectiva. Tampoco es sobreyectiva pues $\operatorname{Im} f = \{0\} \neq \mathbb{R}$.
Si $a \neq 0$, entonces $\ker f = \{x \in \mathbb{R} : ax = 0\} = \{0\}$, por tanto f es inyectiva. Dado $x' \in \mathbb{R}$, tenemos $x' = f(x'/a)$, es decir f es sobreyectiva. Concluimos que en este caso, f es isomorfismo (además, automorfismo).
(ii) El núcleo es $\ker g = \{x \in \mathbb{R}^+ : \log x = 0\} = \{1\}$. Como se reduce al elemento neutro de $(\mathbb{R}, +)$, g es inyectiva. La imagen de la función logarítmica sabemos que $\mathbb{R}$, por tanto g es sobreyectiva. Concluimos que f es isomorfismo.

3. (i) El núcleo es $\ker f = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 1\} = \{0\}$. Como se reduce al elemento neutro de $(\mathbb{R}, +)$, f es inyectiva. La imagen de la función exponencial

sabemos que es el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, por tanto f no es sobreyectiva. Concluimos que f es monomorfismo.
(ii) De los razonamientos del apartado anterior, concluimos que g es isomorfismo.

4.15. Descomposición canónica de un homomorfismo de grupos

A. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G, \cdot)$ y $(G', \cdot)$. Demostrar que:
1. $n : G \to G/\ker f,\ n(x) = x \ker f$ es epimorfismo.
2. $g : G/\ker f \to \operatorname{Im} f,\ g(x \ker f) = f(x)$ es isomorfismo.
3. $i : \operatorname{Im} f \to G',\ i(x) = x$ es monomorfismo.
4. $f = i \circ g \circ n$.

B. Sea $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números reales no nulos y $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ la aplicación $f(x) = x^2$. Se pide:
1. Demostrar que f es un homomorfismo de grupos.
2. Hallar $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. Determinar el conjunto cociente $\mathbb{R}^*/\ker f$.
4. Efectuar la descomposición canónica de f.

(Propuesto en examen, ETS de Ing. Agrónomos, UPM).

Solución. A. 1. Como $\ker f$ es subgrupo normal de G, está definido el grupo cociente $G/\ker f$. Para todo x, y elementos de G :

$$n(xy) = (xy) \ker f = (x \ker f)\ (y \ker f)) = n(x)\ n(y),$$

es decir n es homomorfismo. Por otra parte, todo elemento $x \ker f$ es $x \ker f = n(x)$, luego n es sobreyectiva. Concluimos que n es epimorfismo.
2. Veamos que la aplicación g está bien definida, es decir que $g(x \ker f)$ no depende del representante sino de la clase en sí. En efecto, supongamos que $x \ker f = y \ker f$, entonces $xy^{-1} \in \ker f$ que equivale a $f(xy^{-1}) = e'$ (neutro de G'). Pero:

$$f(xy^{-1}) = e' \Leftrightarrow f(x)f(y^{-1}) = e' \Leftrightarrow f(x)\ (f(y))^{-1} = e' \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

es decir $g(x \ker f) = g(y \ker f)$.
Veamos que g es homomorfismo. Para todo $x \ker f,\ y \ker f$ elementos de $G/\ker f$:

$$g[(x \ker f)\ (y \ker f)] = g[(xy) \ker f] = f(xy) = f(x)f(y) = (x \ker f)\ (y \ker f).$$

Veamos que g es monomorfismo. El núcleo de g es:

$$\ker g = \{x \ker f \in G/\ker f : g(x \ker f) = f(x) = e'\} = \{\ker f\} = \{e \ker f\},$$

es decir el núcleo de g se reduce a elemento neutro de $G/\ker f$ lo cual implica que g es inyectiva.
Veamos que g es epimorfismo. En efecto, si $x' \in \operatorname{Im} f$, entonces $x' = f(x)$ para algún $x \in G$, luego $x' = g(x \ker f)$. Esto implica que g es sobreyectiva. Concluimos que g es isomorfismo.
3. Para todo x, y elementos de $\operatorname{Im} f$, $i(x+y) = x+y = i(x)+i(y)$ es decir, i es homomorfismo. Ademas, $i(x) = i(y)$ implica $x = y$, luego i es inyectiva.
4. Para todo $x \in G$, $(i \circ g \circ n)(x) = (i \circ g)(x \ker f) = i(f(x)) = f(x)$, por tanto, $i \circ g \circ n = f$.

B. 1. Se verifica $f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y)$ para todo par de números reales no nulos x e y lo cual implica que f es homomorfismo de grupos.
2. Aplicando las definiciones de núcleo e imagen:

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^* : x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$
$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R}^* : \exists x \in \mathbb{R}^* \text{ con } y = x^2\} = (0, +\infty).$$

3. Sea $a \in \mathbb{R}^*$. La clase $[a]$ a la que pertenece a está formada por los elementos $x \in \mathbb{R}^*$ tales que $xa^{-1} \in \ker f$ es decir, los que cumplen $f(ax^{-1}) = x^2a^{-2} = 1$ o de forma equivalente, los que cumplen $x^2 = a^2$. Por tanto, $[a] = \{-a, a\}$. En consecuencia:

$$\mathbb{R}^*/\ker f = \{[a] : a \in \mathbb{R}^*\} = \{\{-a, a\} : a \in \mathbb{R}^*\}.$$

4. Sabemos que el epimorfismo natural $n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*/\ker f$ está definido mediante $n(a) = [a]$, el isomorfismo canónico $g : \mathbb{R}^*/\ker f \to \text{Im } f$ por $g([a]) = f(a)$ y el monomorfismo canónico $i : \text{Im } f \to \mathbb{R}^*$ por $i(y)$. La factorización canónica de f es por tanto:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^* \\ n\downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{R}^*/\ker f & \xrightarrow{g} & \text{Im } f \end{array} \qquad \begin{cases} f(a) = a^2 \\ n(a) = \{-a, a\} \\ g(\{-a, a\}) = a^2 \\ i(y) = y, \end{cases}$$

siendo el diagrama anterior es conmutativo ($f = i \circ g \circ n$) como sabemos por un conocido teorema. Efectivamente, para todo $a \in \mathbb{R}^*$:

$$(i \circ g \circ n)(a) = (i \circ g)(\{-a, a\}) = i(a^2) = a^2 = f(a),$$

lo cual implica $f = i \circ g \circ n$.

4.16. Grupo de las partes con la diferencia simétrica

Sea U un conjunto. Demostrar que $(\mathcal{P}(U), \Delta)$ es un grupo conmutativo, en donde Δ representa la operación diferencia simétrica de conjuntos.

Solución. Interna. Para todo A, B elementos de $\mathcal{P}(U)$ se verifica

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{P}(U).$$

Asociativa. Se vio la demostración en el capítulo de Conjuntos.
Conmutativa. Para todo A, B elementos de $\mathcal{P}(U)$ se verifica:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B\Delta A.$$

Elemento neutro. Para todo elemento A de $\mathcal{P}(U)$ se verifica:

$$A\Delta\emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A,$$

por tanto $\emptyset$ es elemento neutro.
Elemento simétrico. Para todo elemento A de $\mathcal{P}(U)$ se verifica:

$$A\Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Es decir, todo elemento A de $\mathcal{P}(U)$ tiene simétrico, siendo este el propio A. Concluimos que $(\mathcal{P}(U), \Delta)$ es un grupo conmutativo.

4.17. Tres igualdades en un grupo

Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Supongamos que existe un entero k tal que para cualesquiera que sean a y b pertenecientes a G se verifica

$$(ab)^{k-1} = a^{k-1}b^{k-1}, \quad (ab)^k = a^k b^k, \quad (ab)^{k+1} = a^{k+1}b^{k+1}.$$

Demostrar que $(G, \cdot)$ es abeliano.

(Propuesto en examem, Álgebra, ETS Ing. Agrónomos, UPM).

Solución. Usando las relaciones $(ab)^{k-1} = a^{k-1}b^{k-1}$ y $(ab)^k = a^k b^k$:

$$\begin{aligned}&(ab)^{k-1} = a^{k-1}b^{k-1} = a^{-1}a^k b^k b^{-1} = a^{-1}(ab)^k b^{-1}\\ &= a^{-1}(ab)(ab)\ldots(ab)b^{-1} = (ba)(ba)\ldots(ba) = (ba)^{k-1}.\end{aligned}$$

Usando las relaciones $(ab)^k = a^k b^k$ y $(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^{k+1}$:

$$\begin{aligned}(ab)^k &= a^k b^k = a^{-1} a^{k+1} b^{k+1} b^{-1} = a^{-1} (ab)^{k+1} b^{-1} \\ &= a^{-1} (ab)(ab) \ldots (ab) b^{-1} = (ba)(ba) \ldots (ba) = (ba)^k.\end{aligned}$$

Por la igualdad $(ab)^{k-1} = (ba)^{k-1}$:

$$\begin{cases} (ab)^k = (ab)^{k-1}(ab) \\ (ba)^k = (ba)^{k-1}(ba) = (ab)^{k-1}(ba) \end{cases}$$

y por la igualdad $(ab)^k = (ba)^k$, tenemos $(ab)^{k-1}(ab) = (ab)^{k-1}(ba)$. Por la propiedad cancelativa de los grupos concluimos que $ab = ba$ para cualesquiera que sean a y b pertenecientes a G, es decir $(G, \cdot)$ es abeliano.

4.18. Grupo no cíclico

(a) Sea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$ definidas mediante:

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = \frac{1}{x} \ , \ f_3(x) = -x \ , \ f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Demostrar que G es un grupo con la operación composición de aplicaciones. Verificar que no es grupo cíclico.
(b) Demostrar que las cuatro sustituciones

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

forman un grupo isomorfo al grupo del apartado anterior.

(Propuesto en hojas de problemas, ETS Ing. Agrónomos, UPM).

Solución. (a) Usando la definición de composición de aplicaciones $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ obtenemos fácilmente la tabla de Cayley de la operación

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

La operación $\circ$ es interna en G. Sabemos que es asociativa en general, luego lo es en nuestro caso. Claramente f_1 es elemento neutro. Para todo $i = 1, 2, 3, 4$ se verifica $f_i \circ f_i = f_1$ lo cual implica que todo f_i tiene elemento simétrico f_i^{-1} siendo $f_i^{-1} = f_i$. Concluimos que $(G, \circ)$ es grupo. Es además conmutativo debido a la simetría de la tabla. El elemento neutro f_1 tiene orden 1 y los restantes elementos, orden 2. Es decir, no hay ningún elemento de orden 4 y por tanto, $(G, \circ)$ no es cílico.

(b) Usando la definición de producto de sustituciones obtenemos fácilmente la tabla de Cayley de la operación

$\cdot$	i	r	s	t
i	i	r	s	t
r	r	i	t	s
s	s	t	i	r
t	t	s	r	i

Llamando $S = \{i, r, s, t\}$, definimos la aplicación $\phi : G \to S$ mediante

$$\phi(f_1) = i \ , \ \phi(f_2) = r \ , \ \phi(f_3) = s \ , \ \phi(f_4) = t.$$

La aplicación ϕ es biyectiva, y un simple observación de las anteriores tablas de Cayley muestra que se verifica $\phi(f_i \circ f_j) = \phi(f_i) \cdot \phi(f_j)$ para todo $i, j = 1, 2, 3, 4$. Se concluye que $(S, \cdot)$ es grupo y que ϕ es isomorfismo entre $(G, \circ)$ y $(S, \cdot)$.

4.19. Grupo de funciones matriciales

Sea M el conjunto de las matrices reales 2×3. Sea F el conjunto de las aplicaciones $f_{AB} : M \to M$ definidas por $f_{AB}(X) = AX + B$ donde A es una matriz invertible 2×2 y B una matriz 2×3.

1. Calcular $(f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1})(X)$, y concluir probando que la composición de aplicaciones es una ley de composición interna en F.

2. Comprobar que la aplicación identidad $i : M \to M$ se puede considerar perteneciente a F ¿para qué matrices concretas A y B es $f_{AB} = I$? Demostrar que i es el elemento unidad de F.

3. Enunciar y demostrar la propiedad asociativa. Dar un contraejemplo para demostrar que no se cumple la propiedad conmutativa. Es decir, encontrar cuatro matrices para las cuales $f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1} \neq f_{A_1B_1} \circ f_{A_2B_2}$.

4. Demostrar que cada elemento de F tiene inverso en F. Si f_{CD} es el inverso de f_{AB}, calcular C y D en términos de A y B. Aplicación al cálculo del inverso de f_{AB} cuando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Sea la aplicación $h : F \to \mathbb{R}^*$ (grupo multiplicativo de $\mathbb{R} - \{0\}$) definido por $h(f_{AB}) = \det A$. ¿Es h un homomorfismo de grupos? Se considera el subconjunto F_1 de F formado por las f_{AB} tales que $\det A = 1$ ¿Es F_1 subgrupo de F? En caso afirmativo, ¿es F_1 subgrupo normal?

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Usando la definición de composición de aplicaciones:

$$(f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1})(X) = f_{A_2B_2}[f_{A_1B_1}(X)] = f_{A_2B_2}(A_1X + B_1) =$$
$$A_2(A_1X + B_1) + B_2 = (A_2A_1)X + (A_2B_1 + B_2) = f_{A_2A_1, A_2B_1+B_2}(X).$$

Dado que A_2A_1 es matriz real 2×2 invertible (producto de invertibles) y $A_2B_1 + B_2$ es matriz real 2×3, se concluye que $f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1} \in M$ es decir, la composición de aplicaciones es una ley de composición interna en F.

2. Eligiendo I la matriz identidad real de orden 2×2 (que es invertible) y 0 la matriz nula real de orden 2×3 obtenemos $f_{I,0}(X) = IX + 0 = X = i(X)$ para toda matriz $X \in M$ es decir, $i = f_{I,0} \in F$. La función i es el elemento unidad de f pues para toda f_{AB} de F tenemos:

$$(f_{AB} \circ i)(X) = f_{AB}[i(X)] = f_{AB}(X) \Rightarrow f_{AB} \circ i = f_{AB}.$$
$$(i \circ f_{AB})(X) = i[f_{AB}(X)] = f_{AB}(X) \Rightarrow i \circ f_{AB} = f_{AB}.$$

3. La propiedad asociativa en F se enuncia de la siguiente manera:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \forall f, g, h \in F.$$

Veamos que es cierta. En efecto, para todo $X \in M$ se verifica

$$((f \circ g) \circ h)(X) = (f \circ g)(h(X)) = f(g(h(X))) =$$
$$f((g \circ h)(X)) = (f \circ (g \circ h))(X).$$

Veamos que no es cierta la propiedad conmutativa. De lo demostrado en el primer apartado deducimos que

$$f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1} = f_{A_2A_1, A_2B_1+B_2} \ , \ f_{A_1B_1} \circ f_{A_2B_2} = f_{A_1A_2, A_1B_2+B_1}.$$

Elijamos por ejemplo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ , \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B_1 = B_2 = 0 \ , \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A_1A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A_2B_1 + B_2 = A_1B_2 + B_1 = 0$$

$$(f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1})(X) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(f_{A_1B_1} \circ f_{A_2B_2})(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por tanto no se cumple la propiedad conmutativa.

4. Sea $f_{AB} \in F$. Entonces f_{CD} es inverso de f_{AB} si y sólo si se verifica $f_{AB} \circ f_{CD} = f_{CD} \circ f_{AB} = f_{I,0}$. Por lo demostrado en el primer apartado, esto equivale a $f_{AC,AD+B} = f_{CA,CB+D} = f_{I,0}$, y para que esto se cumpla basta que se verifique

$$\left\{ \begin{matrix} AC = CA = I \\ AD + B = CB + D = 0. \end{matrix} \right. \quad (1)$$

Como A es invertible, eligiendo $C = A^{-1}$ se verifica $AC = CA = I$. De la igualdad $AD + B = 0$ deducimos que $D = -A^{-1}B$. Pero para esta D, se verifica $CB + D = A^{-1}B - A^{-1}B = 0$. Es decir, el sistema (1) tiene solución y por tanto el inverso $(f_{AB})^{-1}$ de f_{AB} es $(f_{AB})^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}B}$. Para el elemento concreto dado, fácilmente obtenemos

$$C = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ D = -A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Veamos que h es homomorfismo de grupos. En efecto para cualquier par de elementos $f_{A_2B_2}$ y $f_{A_1B_1}$ de F se verifica

$$h(f_{A_2B_2} \circ f_{A_1B_1}) = h(f_{A_2A_1,A_2B_1+B_2}) = \det(A_2A_1) = \\ (\det A_2)(\det A_1) = h(f_{A_2B_2})h(f_{A_1B_1}).$$

Veamos que F_1 es subgrupo de F. Como $\det I = 1$ se verifica que $f_{I,0} \in F_1$ es decir, $F_1 \neq \emptyset$. Sean ahora dos elementos $f_{A_2B_2}$ y $f_{A_1B_1}$ de F_1. De los apartados primero y cuarto deducimos

$$f_{A_2B_2} \circ (f_{A_1B_1})^{-1} = f_{A_2B_2} \circ f_{-A_1^{-1},\ -A_1^{-1}B_1} = f_{A_2A_1^{-1},\ -A_2A_1^{-1}B_1+B_2}.$$

Pero $\det(A_2A_1^{-1}) = (\det A_2)(\det A_1^{-1}) = (\det A_2)(\det A_1)^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$. Es decir, se verifica $f_{A_2B_2} \circ (f_{A_1B_1})^{-1} \in F_1$ y por tanto podemos concluir que F_1 es subgrupo de F.
Por una conocida caracterización, para demostrar que F_1 es subgrupo normal de F basta demostrar que para todo $f_{AB} \in F$ y para todo $f_{MN} \in F_1$ se verifica $f_{AB} \circ f_{MN} \circ (f_{AB})^{-1} \in F_1$. De los apartados anteriores:

$f_{AB} \circ f_{MN} \circ (f_{AB})^{-1} = f_{AM,\, AN+B} \circ f_{A^{-1},\, -A^{-1}B} = f_{AMA^{-1},\, -AMA^{-1}B+AN+B}$.

Por hipótesis $\det A \neq 0$ y $\det M = 1$, por tanto

$$\det(AMA^{-1}) = (\det A)(\det M)(\det A^{-1}) = (\det A)(\det A)^{-1} = 1,$$

es decir $f_{AB} \circ f_{MN} \circ (f_{AB})^{-1} \in F_1$ de lo que se concluye que F_1 es subgrupo normal de F.

4.20. Conjunto, grupo y aplicación

Se consideran los objetos matemáticos siguientes:
a) Un conjunto E.
b) Un grupo multiplicativo G con elemento unidad e.
c) Una aplicación $\varphi : G \times E \to E$ que satisface
(i) $\forall a, b \in G \; \forall x \in E \quad \varphi(ab, x) = \varphi(a, \varphi(b, x))$.
(ii) $\forall x \in E \quad \varphi(e, x) = x$.

Se pide:
1. Demostrar que si $F \subset E$ entonces $G_F = \{a \in G : \varphi(a, x) = x \quad \forall x \in F\}$ constituye un subgrupo de G.
2. Demostrar que $G_{F_1 \cup F_2} = G_{F_1} \cap G_{F_2}$.
3. Comprobar que la relación binaria en E

$$xRy \Leftrightarrow \exists a \in G : \varphi(a, x) = y$$

es de equivalencia.

(Propuesto en hojas de problemas, Álgebra, ETS de Arquitectura, UPM).

Solución. 1. Usamos la conocida caracterización de subgrupos. Por la condición (ii), $\varphi(e, x) = x$ para todo $x \in F \subset E$, es decir $e \in G_F$ y por tanto $G_F \neq \emptyset$. Sean ahora $a, b \in G_F$ y veamos que $ab^{-1} \in G_F$. Como $b \in G_F$, se verifica $\varphi(b, x) = x$ para todo $x \in F$, en consecuencia y usando (i):

$$x = \varphi(e, x) = \varphi(b^{-1}b, x) = \varphi(b^{-1}, \varphi(b, x)) = \varphi(b^{-1}, x) \quad \forall x \in F,$$

por tanto y teniendo en cuenta que $a \in F$ se verifica para todo $x \in F$:

$$\varphi(ab^{-1}, x) = \varphi(a, \varphi(b^{-1}, x)) = \varphi(a, x) = x \quad \forall x \in F,$$

lo cual implica que $ab^{-1} \in G_F$. Concluimos que G_F es subgrupo de G.

2. Tenemos

$$\begin{aligned} a \in G_{F_1} \cup G_{F_2} &\Leftrightarrow \varphi(a, x) = x \quad \forall x \in F_1 \cup F_2 \\ &\Leftrightarrow (\varphi(a, x) = x \quad \forall x \in F_1) \;\wedge\; (\varphi(a, x) = x \quad \forall x \in F_2) \\ &\Leftrightarrow (a \in G_{F_1}) \;\wedge\; (a \in G_{F_2}) \Leftrightarrow a \in G_{F_1} \cap G_{F_2}, \end{aligned}$$

es decir $G_{F_1 \cup G_{F_2}} = G_{F_1} \cap G_{F_2}$.

3. Para todo $x \in E$ se verifica $\varphi(e, x) = x$ es decir, xRx. La relación es reflexiva. Supongamos que xRy, entonces existe $a \in G$ tal que $\varphi(a, x) = y$. Se verifica

$$x = \varphi(e, x) = \varphi(a^{-1}a, x) = \varphi(a^{-1}, \varphi(a, x)) = \varphi(a^{-1}, y),$$

lo cual implica yRx, es decir la relación es simétrica. Por otra parte

$$\begin{aligned} \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists a \in G : \varphi(a, x) = y \\ \exists b \in G : \varphi(b, y) = z \end{cases} \\ &\Rightarrow z = \varphi(b, \varphi(a, x)) = \varphi(ba, x) \\ &\Rightarrow xRz, \end{aligned}$$

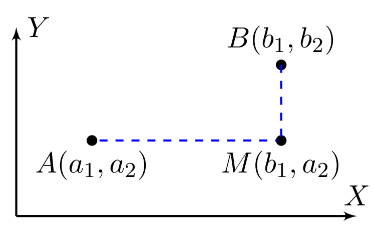
lo cual implica que la relación es transitiva. Concluimos que R es relación de equivalencia.

4.21. Relación y operaciones en el plano

En el conjunto de los puntos del plano π referidos a un par de ejes rectangulares XOY se consideran: a) La ley de composición $A * B = M$ siendo M el punto de corte de la paralela por A a OX con la paralela por B a OY. b) La relación binaria $P \sim Q \Leftrightarrow$ las coordenadas de P y Q suman lo mismo.
Se establece la aplicación $f : \pi \to \mathbb{R}^2$ de forma que al punto $P(x, y)$ le corresponde el par (x^3, y^3) de $\mathbb{R}^2$. Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición $(a, b) \circ (c, d) = (a, d)$. Se pide:
1. ¿Es $*$ asociativa?
2. ¿Hay neutro en π para $*$?
3. ¿Es $\sim$ una relación de equivalencia? Si lo es, ¿cuáles son las clases de equivalencia?
4. ¿Es $\sim$ compatible con $*$? Si lo es, ¿cuál es la ley inducida en el conjunto cociente?
5. ¿Es f un isomorfismo entre las estructuras $(\pi, *)$ y $(\mathbb{R}^2, \circ)$?

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Aeronaúticos, UPM).

Solución. 1. Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, por una simple consideración geométrica deducimos que $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (b_1, a_2)$.



La operación $*$ es asociativa pues

$$[(a_1,a_2)*(b_1,b_2)]*(c_1,c_2)=(b_1,a_2)*(c_1,c_2)=(c_1,a_2),$$
$$(a_1,a_2)*[(b_1,b_2)*(c_1,c_2)]=(a_1,a_2)*(c_1,b_2)=(c_1,a_2).$$

2. Sea (e_1,e_2) un elemento fijo de π. Si es elemento neutro para la operación $*$ se ha de verificar

$$(a_1,a_2)*(e_1,e_2)=(a_1,a_2)\quad\forall (a_1,a_2)\in\pi,$$
$$(e_1,e_2)*(a_1,a_2)=(a_1,a_2)\quad\forall (a_1,a_2)\in\pi.$$

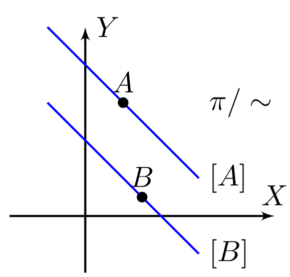
Equivalentemente $(e_1,a_2)=(a_1,e_2)=(a_1,a_2)\quad\forall (a_1,a_2)\in\pi$. Por tanto se ha de verificar $e_1=a_1$ y $e_2=a_2$. No existe pues elemento neutro para la operación $*$ pues (e_1,e_2) ha de ser elemento fijo.

3. Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. (a) Para todo $P(x,y)$ de π se verifica $x+y=x+y$ lo cual implica que $\sim$ es reflexiva. (b) $P(x,y)\sim Q(z,t)\Rightarrow x+y=z+t\Rightarrow z+t=x+y\Rightarrow Q(z,t)\sim P(x,y)$ lo cual implica que $\sim$ es simétrica.

$$(c)\ \begin{cases}P(x,y)\sim Q(z,t)\\Q(z,t)\sim R(u,v)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=z+t\\z+t=u+v\end{cases}\Rightarrow x+y=u+v\Rightarrow$$
$$P(x,y)\sim R(u,v),$$

lo cual implica que $\sim$ es transitiva.

Hallemos las clases de equivalencia. Sea $A(a_1,a_2)\in\pi$, la clase de equivalencia a la que pertenece A es $[A]=\{(x,y)\in\pi : x+y=a_1+a_2\}$. Es decir, $[A]$ está formada por los puntos de la recta que pasa por A y tiene pendiente -1. Los elementos del conjunto cociente $\pi/\sim$ son exactamente las rectas del plano de pendiente -1.



4. La relación $\sim$ no es compatible con la operación $*$. En efecto tenemos por ejemplo $(0,0)\sim(-1,1)$ y $(0,1)\sim(1,0)$ sin embargo

$$(0,0)=(0,0)*(0,1)\not\sim(-1,1)*(1,0)=(1,1).$$

5. Veamos si f es isomorfismo entre las estructuras $(\pi, *)$ y $(\mathbb{R}^2, \circ)$. Tenemos

$$f[(a,b)*(c,d)] = f[(c,b)] = (c^3, b^3)$$
$$f[(a,b)] \circ f[(c,d)] = (a^3,b^3)\circ(c^3,d^3) = (a^3,d^3).$$

No es homomorfismo, en consecuencia tampoco es isomorfismo.

4.22. Grupo de aplicaciones afines

Sea C el conjunto de las aplicaciones $f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_{ab}(x) = ax + b$, con a, b números reales.
Determinar una condición necesaria y suficiente que han de satisfacer los coeficientes a y b para que C sea grupo respecto de la composición de aplicaciones. Comprobar que en este caso en efecto C es grupo. ¿ Es abeliano?

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. Para todo par de elementos f_{ab} y f_{cd} de C se verifica

$$\begin{aligned}(f_{ab}\circ f_{cd})(x) &= f_{ab}[f_{cd}(x)] = f_{ab}(cx+d)\\ &= a(cx+d)+b = acx+ad+b = f_{ac,ad+b}(x),\end{aligned}$$

es decir la operación composición es interna en C. También es asociativa por una conocida propiedad. La aplicación $f_{1,0}(x) = x$ es la aplicación identidad en C y por tanto elemento neutro para la composición. Es decir, $(C, \circ)$ es un semigrupo con elemento neutro sin ninguna restricción para a, b reales. Un elemento f_{ab} tiene elemento simétrico $f_{a'b'}$ en $(C, \circ)$ si y sólo si

$$f_{ab}\circ f_{a'b'} = f_{a'b'}\circ f_{ab} = f_{1,0},$$

o de forma equivalente, si y sólo si

$$\begin{cases} aa' = 1 \\ ab' + b = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} a'a = 1 \\ a'b + b' = 0. \end{cases}$$

Para que exista a' ha de ser necesariamente $a \neq 0$ y en este caso $a' = 1/a$. La relación $ab' + b = 0$ se cumple para $b' = -b/a$. Además, en este caso se verifica la relación $a'b + b' = (1/a)b - b/a = 0$. Hemos demostrado que una condición necesaria para que $(C, \circ)$ sea grupo es que $a \neq 0$. Esta condición es también suficiente, pues la operación $\circ$ en

$$C_1 = \{f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$$

es claramente interna, asociativa, tiene elemento neutro $f_{1,0} \in C_1$ y todo $f_{ab} \in C_1$ tiene elemento simétrico $f_{1/a,-b/a} \in C_1$. Este grupo no es conmutativo pues eligiendo (por ejemplo) los elementos f_{12}, f_{20} de C_1 :

$$\begin{cases} f_{12}\circ f_{20} = f_{2,2} \\ f_{20}\circ f_{12} = f_{2,4} \end{cases} \Rightarrow f_{12}\circ f_{20} \neq f_{20}\circ f_{12}.$$

4.23. Centro de un grupo de matrices

Demostrar que el conjunto H de matrices de la forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

forma un grupo con la operación producto de matrices. Calcular su centro.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Caminos, UPM).

Solución. Veamos que H es un subgrupo del grupo multiplicativo G formado por las matrices invertibles 3×3. Toda matriz X de H tiene determinante no nulo, en consecuencia, $H \subset G$. Claramente $H \neq \emptyset$, por tanto basta demostrar que para todo par de matrices X, Y de H se verifica $XY^{-1} \in H$. Denotemos

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x' & x'y' - z' \\ 0 & 1 & -y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & x - x' & y'(x' - x) + z - z' \\ 0 & 1 & y - y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in H.$$

Si $A \in Z(H)$ (centro de H) será de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

es decir

$$A \in Z(H) \Leftrightarrow XA = AX \ \ \forall X \in H \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a + x & c + bx + z \\ 0 & 1 & b + y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & x + a & z + ay + c \\ 0 & 1 & y + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow bx = ay \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

El centro de H es por tanto

$$Z(H) = \left\{ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \ \right\}.$$

4.24. Conmutador y subgrupo derivado

Dados dos elementos x, y pertenecientes a un grupo G, se llama conmutador de los elementos dados y se representa por $[x, y]$ al elemento de G definido por

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Demostrar que:

1. El inverso de un conmutador es un conmutador.
2. El conjugado de un conmutador es un conmutador.
3. El subgrupo de G engendrado por los conmutadores de todos los pares de elementos de G es normal (se denomina subgrupo derivado de G y se representa por $D(G)$).
4. Una condición necesaria y suficiente para que G sea abeliano es que el subgrupo derivado se reduzca al elemento neutro, es decir $D(G) = \{e\}$.

(Prropuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Caminos, UPM).

Solución. 1. Sea $[x, y]$ un conmutador. Usando $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ y $(a^{-1})^{-1} = a$:

$$[x, y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y, x].$$

Es decir, $[x, y]^{-1}$ es un conmutador.

2. Sea $[x, y]$ un conmutador. Veamos que $g[x, y]g^{-1}$ es un conmutador para todo $g \in G$. En efecto:

$$g[x, y]g^{-1} = g(x^{-1}y^{-1}xy)g^{-1} = gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1}gxg^{-1}gyg^{-1}$$
$$= (gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = [gxg^{-1}, gyg^{-1}].$$

3. Sean $g \in G,\ h \in D(G)$, tenemos que demostrar que $ghg^{-1} \in D(G)$. Todo elemento h de G es producto de conmutadores y de sus inversos. Por el apartado 1, el inverso de un conmutador es un conmutador, lo que implica que $h = c_1 \cdot c_2 \ldots \cdot c_p$, siendo $c_1, c_2, \ldots, c_p$ conmutadores. Tenemos:

$$ghg^{-1} = g(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_p)g^{-1} = (gc_1g^{-1})(gc_2g^{-1}) \ldots (gc_pg^{-1}).$$

Ahora bien, por el apartado 2, los elementos $c'_i = gc_ig^{-1}$ son conmutadores es decir, ghg^{-1} es producto de conmutadores y por tanto pertenece a $D(G)$.

4. Sea G abeliano, entonces para todo par de elementos $x, y \in G$ se verifica:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = (x^{-1}x)(y^{-1}y) = ee = e,$$

lo cual implica que $D(G) = \{e\}$.
Sea $D(G) = \{e\}$ y sean $x, y \in G$. Entonces $[x, y] \in D(G)$ es decir, $x^{-1}y^{-1}xy = e$. Equivalentemente $y^{-1}xy = x$ o bien $yx = xy$ es decir, G es abeliano

4.25. Grupo construido por biyección

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos y considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
1. Hallar $C = f(\mathbb{R}^+)$ y razónese si $f : \mathbb{R}^+ \to C$ es biyección o no.
2. Si $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n veces), determinar $f^n(\mathbb{R}^+)$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\mathbb{R}^+)$.
3. Obtener una operación $\otimes$ en C tal que considerando a $\mathbb{R}^+$ con su estructura de grupo multiplicativo, f sea un homomorfismo de grupos (obtener lo más simplificado posible el valor de $y_1 \otimes y_2$ para $y_1, y_2 \in C$). ¿ Quién es el neutro para $\otimes$?

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Aeronaúticos, UPM).

Solución. 1. Se verifica $f(x) > 0$ y $f(x) = x/(x+1) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, es decir $C \subset (0,1)$. Veamos que también $(0,1) \subset C$. Efectivamente, para $y \in (0,1)$ tenemos

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow yx + y = x$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Como $y/(1-y) \in \mathbb{R}^+$, todo $y \in (0,1)$ es de la forma $y = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^+$, es decir $(0,1) \subset C$. Concluimos que $C = (0,1)$, lo cual implica que $f : \mathbb{R}^+ \to C$ es sobreyectiva. Veamos que también es inyectiva. Efectivamente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \Rightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

por tanto $f : \mathbb{R}^+ \to C = (0,1)$ es biyección.

2. Tenemos

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1},$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}.$$

Los cálculos anteriores sugieren que $f^n(x) = x/(nx+1)$. Veamos que se verifica, aplicando el método de inducción. En efecto, la fórmula es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un n natural. Entonces

$$f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x) = f(f^n(x)) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{(n+1)x+1},$$

lo cual implica que también es cierta para $n+1$. Cuando $x \to 0^+$ se verifica $f^n(x) \to 0$ y cuando $x \to +\infty$, $f^n(x) \to 1/n$. Por otra parte, $(f^n)'(x) = 1/(nx+1)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, lo cual sugiere que $f^n(\mathbb{R}^+) = (0, 1/n)$. Veamos que esto es cierto aplicando métodos exclusivamente algebraicos. Por una parte

$$\begin{cases} 0 < f^n(x) \\ f^n(x) < \dfrac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{x}{nx+1} \\ \dfrac{x}{nx+1} < \dfrac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \\ nx < nx+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \\ 0 < 1, \end{cases}$$

y las dos últimas desigualdades se verifican trivialmente cuando $x \in \mathbb{R}^+$. Hemos demostrado que $f^n(\mathbb{R}^+) \subset (0, 1/n)$. Por otra parte $(0, 1/n) \subset f^n(\mathbb{R}^+)$. En efecto, para $y \in (0, 1/n)$ tenemos

$$y = f^n(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{nx+1} \Leftrightarrow nyx + y = x$$
$$\Leftrightarrow x(ny-1) = -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-ny}.$$

Como $0 < y < 1/n$ se verifica que $y/(1-ny) \in \mathbb{R}^+$, es decir todo $y \in (0, 1/n)$ es de la forma $y = f^n(x)$ con $x \in \mathbb{R}^+$ y por tanto $(0, 1/n) \subset f^n(\mathbb{R}^+)$.
Veamos ahora que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathbb{R}^+) = \emptyset$. En efecto, si existiera $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ tendría que ser necesariamente $z > 0$. Dado que $1/n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, existe n_0 natural tal que $1/n_0 < z$, es decir z no pertenecería al intervalo $(0, 1/n_0)$ lo cual es absurdo.

3. Hemos visto que $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 1)$ definida por $f(x) = x/(x+1)$ es una biyección. Para que f sea homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $((0, 1), \otimes)$ es necesario y suficiente que se verifique

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) \otimes f(x_2) \quad \forall x_1 \forall x_2 \in \mathbb{R}^+. \qquad (1)$$

Denotando $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ tenemos $y_1 = x_1/(x_1+1)$ e $y_2 = x_2/(x_2+1)$ o bien $x_1 = y_1/(1-y_1)$ y $x_2 = y_2/(1-y_2)$. Podemos escribir la relación (1) en la forma

$$y_1 \otimes y_2 = f(x_1 x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + 1}$$
$$= \frac{\frac{y_1 y_2}{(1-y_1)(1-y_2)}}{\frac{y_1 y_2}{(1-y_1)(1-y_2)} + 1} \cdot \frac{y_1 y_2}{2y_1 y_2 - y_1 - y_2 + 1}.$$

Dado que f es homomorfismo de grupos, transforma el elemento neutro del grupo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ que es 1 en el neutro e del grupo $((0, 1), \otimes)$. Por tanto $e = f(1) = 1/2$.

Capítulo 5

Anillos y cuerpos

5.1. Concepto de anillo

1. Demostrar (de manera esquemática) que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son anillos conmutativos y unitarios en donde $+$ y $\cdot$ representan en cada caso la suma y el producto habituales.

2. Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios en la indeterminada x y coeficientes reales. Demostrar (esquemáticamente) que $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es anillo conmutativo y unitario en donde $+$ y $\cdot$ representan la suma y producto habituales.

3. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n. Demostrar (esquemáticamente) que $(\mathbb{R}^{n\times n} +, \cdot)$ es anillo unitario y no conmutativo, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones usuales suma y producto de matrices.

4. Sea A el conjunto de los números enteros pares. Demostrar que $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo y no unitario en donde $+$ y $\cdot$ representan la suma y producto habituales de números enteros.

5. En el conjunto de los números reales se definen las operaciones

$$x * y = x + y + 4, \quad x \circ y = xy + 4x + 4y + 12.$$

Demostrar que $(\mathbb{R}, *, \circ)$ es anillo conmutativo.

6. En el conjunto $P = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$ se definen las operaciones $+$ habitual y $\circ$, definida mediante $a \circ b = 2ab$. Demostrar que $(P, +, \circ)$ es anillo conmutativo y no unitario.

7. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se definen las operaciones:

$$a * b = a + b - 1, \quad a \circ b = a + b - ab.$$

Demostrar que $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ es anillo conmutativo con elemento unidad.

8. Demostrar que en un anillo A con elemento unidad, la conmutatividad de la suma se puede deducir a partir de los restantes axiomas.

Solución. 1. Vimos que $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano. Por otra parte, el producto de enteros es un entero y el producto de enteros sabemos que tiene las propiedades asociativa y distributiva. En consecuencia, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es anillo. Dado que el producto de enteros tiene la propiedad conmutativa y que el número 1 es su elemento neutro, concluimos que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo y unitario.

De manera análoga, deducimos que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son anillos conmutativos y unitarios.

2. Vimos que $(\mathbb{R}[x], +)$ es grupo abeliano. Por otra parte, el producto de elementos de $\mathbb{R}[x]$ es un elemento de $\mathbb{R}[x]$. El producto de estos polinomios según sabemos tienen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva y además el polinomio $e(x) = 1$ es elemento neutro para el producto.
Concluimos que $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es anillo conmutativo y unitario.

3. La suma es claramente interna y cumple según sabemos las propiedades asociativa y conmutativa. La matriz nula 0 es elemento neutro y dada A, su elemento simétrico es $-A$. Es decir, $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$ es grupo abeliano.
Según sabemos, el producto es operación interna, asociativa y distributiva respecto de la suma. Además, la matriz identidad I de orden n es elemento neutro para el producto. Concluimos que $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ es anillo unitario.

No es conmutativo porque en general no se verifica la propiedad conmutativa para el producto de matrices, basta tomar como contraejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir $AB \neq BA$.

4. El número cero es par pues $0 = 2 \cdot 0$, por tanto, $0 \in A$. Si a, b son enteros pares se verifica $a = 2k$ y $b = 2s$ con k, s enteros. Esto implica

$$a - b = 2k - 2s = 2(k - s), \text{ siendo } k - s \text{ entero,}$$

es decir $x - y \in A$. Hemos demostrado que A es subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ y en consecuencia es grupo. Como la suma de enteros es conmutativa, $(A, +)$ es grupo conmutativo.

De nuevo, para $a, b \in A$ tenemos

$$ab = (2k)(2s) = 2(2ks), \text{ siendo } 2ks \text{ entero,}$$

es decir el producto es operación interna en A. Como la operación producto de enteros es asociativa, conmutativa y distributiva respecto de la suma, concluimos que $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo. No es unitario, pues por ejemplo no existe ningún número par e tal que $2e = 2$.

5. Vimos en un ejercicio anterior que $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano. Veamos ahora que $(\mathbb{R}, \circ)$ es semigrupo.
Interna. Claramente se cumple pues la suma y producto de números reales es un número real.
Asociativa. Se cumple pues:

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (xy + 4x + 4y + 12) \circ z \\ &= xyz + 4xz + 4yz + 12z + 4xy + 16x + 16y + 48 + 4z + 12 \\ &= xyz + 4(xy + xz + yz) + 16(x + y + z) + 60.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \circ (y \circ z) &= x \circ (yz + 4y + 4z + 12) \\ &= xyz + 4xy + 4xz + 12x + 4x + 4yz + 16y + 16z + 48 + 12 \\ &= xyz + 4(xy + xz + yz) + 16(x + y + z) + 60.\end{aligned}$$

La operación $\circ$ es claramente conmutativa. Esto implica que esta operación es distributiva respecto de $*$ si y sólo si se verifica $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$. Se cumple, pues:

$$\begin{aligned}x \circ (y * z) &= x \circ (y + z + 4) \\ &= xy + xz + 4x + 4x + 4y + 4z + 16 + 12 \\ &= xy + xz + 4(2x + y + z) + 28,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \circ y) * (x \circ z) &= (xy + 4x + 4y + 12) * (xz + 4x + 4z + 12) \\ &= xy + 4x + 4y + 12 + xz + 4x + 4z + 12 + 4 \\ &= xy + xz + 4(2x + y + z) + 28.\end{aligned}$$

Concluimos que $(\mathbb{R}, *, \circ)$ es anillo conmutativo.

6. 1) Veamos que $(P, +)$ es grupo abeliano; para ello basta demostrar que P es subgrupo del grupo aditivo de los números enteros. Efectivamente, dado que $0 = 2 \cdot 0$, se verifica que $0 \in P$. Por otra parte, si $a, b \in P$, entonces $a = 2x$ y $b = 2y$ para ciertos enteros x e y, lo cual implica $a - b = 2x - 2y = 2(x - y)$ siendo $x - y \in \mathbb{Z}$, luego $a - b \in P$.

2) Veamos que $(P, \circ)$ es semigrupo.
Interna. Sean $a, b \in P$, entonces $a = 2x$ y $b = 2y$ para ciertos enteros x e y, lo cual implica $a \circ b = 2(2x)(2y) = 2(4xy)$ siendo $4xy \in \mathbb{Z}$, luego $a \circ b \in P$.
Asociativa. Se verifica, pues para todo $a, b, c \in P$:

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= a \circ (2bc) = 2a(2bc) = 4abc. \\ (a \circ b) \circ c &= (2ab) \circ c = 2(2ab)c = 4abc. \end{aligned}$$

3) Veamos que la operación $\circ$ es distributiva respecto de la operación $+$. Dado que $\circ$ es conmutativa, bastará demostrar que para todo $a, b, c \in P$ se verifica $a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$. En efecto:

$$\begin{aligned} a \circ (b + c) &= 2a(b + c). \\ (a \circ b) + (a \circ c) &= 2ab + 2ac = 2a(b + c). \end{aligned}$$

Concluimos que $(P, +, \circ)$ es anillo conmutativo. No es unitario, pues si existiera elemento neutro e para la operación $\circ$, entonces:

$$a \circ e = 2ae = a, \quad \forall a \in P.$$

Eligiendo (por ejemplo) $a = 2$, se tendría $4e = 2$, es decir $e = 1/2$. Pero $1/2 \notin P$.

7. 1) Veamos que $(\mathbb{Z}, *)$ es grupo abeliano.
Interna. Se verifica, pues la suma de números enteros es un número entero.
Asociativa. Se verifica, pues para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - 1) = a + b + c - 2. \\ (a * b) * c &= (a + b - 1) * c = a + b + c - 2. \end{aligned}$$

Conmutativa. Se verifica, pues para todo $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a.$$

Elemento neutro. El número 1 satisface para todo $a \in \mathbb{Z}$:

$$a * 1 = 1 * a = a + 1 - 1 = a.$$

en consecuencia, $1 \in \mathbb{Z}$ es elemento neutro para la operación $*$.
Elemento simétrico. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, el número $2 - a \in \mathbb{Z}$ satisface:

$$a * (2 - a) = (2 - a) * a = a + 2 - a - 1 = 1.$$

por tanto todo $a \in \mathbb{Z}$ tiene simétrico, siendo este, $2 - a$. Concluimos que $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ es grupo abeliano.

2) Veamos que $(\mathbb{Z}, \circ)$ es semigrupo.
Interna. Se verifica, pues la suma y producto de números enteros es un número entero.
Asociativa. Se verifica, pues para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a + b - ab) \circ c \\ &= a + b - ab + c - (a - b - ab)c \\ &= a + b - ab + c - ac - bc + abc. \end{aligned}$$

Concluimos que $(\mathbb{Z}, \circ)$ es semigrupo. Ademas es conmutativo pues:

$$a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b \circ a.$$

3) Veamos que la operación $\circ$ es distributiva respecto de la operación $*$. Dado que $\circ$ es conmutativa, bastará demostrar que para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se verifica $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$. En efecto:

$$\begin{aligned} a \circ (b * c) &= a \circ (b + c - 1) \\ &= a + b + c - 1 - a(b + c - 1) \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \circ b) * (a \circ c) &= (a + b - ab) * (a + c - ac) \\ &= (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1 \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1. \end{aligned}$$

Concluimos que $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ es anillo conmutativo. Además es unitario, pues el número $0 \in \mathbb{Z}$ satisface para todo $a \in \mathbb{Z}$:

$$a \circ 0 = 0 \circ a = a + 0 - 0a = a,$$

es decir $0 \in \mathbb{Z}$ es elemento unidad del anillo.

8. Para todo a, b elementos de A, y usando la propiedad distributiva de dos maneras distintas:

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= 1(a+b)+1(a+b)\\ &= a+b+a+b. \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= (1+1)a+(1+1)b\\ &= 1a+1a+1b+1b\\ &= a+a+b+b. \qquad (2)\end{aligned}$$

Igualando (1) y (2), queda $a+b+a+b=a+a+b+b$. Teniendo en cuenta que en un grupo todos los elementos son regulares, deducimos que $b+a=a+b$.

5.2. Anillo de sucesiones

Se considera el conjunto $\mathcal{S}$ de las sucesiones x de números reales, es decir

$$x=(x_1,x_2,x_3,\ldots), \quad x_n \in \mathbb{R}\ \forall n=1,2,3,\ldots,$$

escritas abreviadamente por $x=(x_n)$. Se definen en $\mathcal{S}$ las operaciones:

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n), \quad (x_n)\cdot(y_n)=(x_ny_n).$$

Demostrar que $(\mathcal{S},+,\cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

Solución. 1) Veamos que $(\mathcal{S},+)$ es grupo abeliano.
Interna. Dado que la suma de dos números reales es un número real, la suma de dos elementos de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{S}$.
Asociativa. Para todo $x=(x_n),\ y=(y_n),\ z=(z_n)$ elementos de $\mathcal{S}$ y aplicando la propiedad asociativa de la suma de números reales:

$$\begin{aligned}&(x+y)+z=((x_n)+(y_n))+(z_n)=(x_n+y_n)+(z_n)=((x_n+y_n)+z_n)\\ &=(x_n+(y_n+z_n))=(x_n)+(y_n+z_n)=(x_n)+((y_n)+(z_n))=x+(y+z).\end{aligned}$$

Elemento neutro. La sucesión $0=(0)$, cuyos términos son todos nulos, es elemento neutro para la suma de sucesiones, pues para todo $x=(x_n)\in\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}x+0&=(x_n+0)=(x_n)=x.\\ 0+x&=(0+x_n)=(x_n)=x.\end{aligned}$$

Elemento simétrico. Dada $x=(x_n)\in\mathcal{S}$, la sucesión $-x=(-x_n)$ es elemento simétrico de x, pues:

$$\begin{aligned}x+(-x)&=(x_n+(-x_n))=(0)=0.\\ (-x)+x&=((-x_n)+x_n)=(0)=0.\end{aligned}$$

Conmutativa. Para todo $x = (x_n),\ y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{S}$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de números reales:

$$x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (y_n + x_n) = (y_n) + (x_n) = y + x.$$

2) Veamos que $(\mathcal{S}, \cdot)$ es semigrupo.
Interna. Dado que el producto de dos números reales es un número real, el producto de dos elementos de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{S}$.
Asociativa. Para todo $x = (x_n),\ y = (y_n),\ z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{S}$ y aplicando la propiedad asociativa del producto de números reales:

$$\begin{aligned}&(xy)z = ((x_n)(y_n))\,(z_n) = (x_ny_n)(z_n) = ((x_ny_n)z_n) = \\ &(x_n(y_nz_n)) = (x_n)(y_nz_n) = (x_n)\,((y_n)(z_n)) = x(yz).\end{aligned}$$

Además, el semigrupo es conmutativo, pues para todo $x = (x_n),\ y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{S}$ y usando la propiedad conmutativa del producto de números reales:

$$xy = (x_n)(y_n) = (x_ny_n) = (y_nx_n) = (y_n)(x_n) = yx.$$

3) Veamos que la operación producto es distributiva respecto de la suma. Dado que el producto en $\mathcal{S}$ es conmutativo, bastará demostrar que para todo x, y, z elementos de $\mathcal{S}$ se verifica $x(y + z) = xy + xz$.
En efecto, para todo $x = (x_n),\ y = (y_n),\ z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{S}$ y aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números reales:

$$\begin{aligned}&x(y + z) = (x_n)\,((y_n) + (z_n)) = (x_n)(y_n + z_n) = (x_n(y_n + z_n)) = \\ &(x_ny_n + x_nz_n) = (x_ny_n) + (x_nz_n) = (x_n)(y_n) + (x_n)(z_n) = xy + xz.\end{aligned}$$

Concluimos que $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo. Es además unitario, pues la sucesión $1 = (1)$ cuyos términos son todos iguales 1, es elemento neutro para la suma de sucesiones, ya que para todo $x = (x_n) \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}x1 &= (x_n1) = (x_n) = x.\\ 1x &= (1x_n) = (x_n) = x.\end{aligned}$$

5.3. Producto directo de anillos

Para n entero positivo, sean $A_1, \ldots, A_n$ anillos. En el producto cartesiamo $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, se definen las operaciones:

$$\begin{aligned}&(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),\\ &(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n).\end{aligned}$$

Demostrar que $(A, +, \cdot)$ es un anillo (se le llama *producto directo* de los anillos dados).

Solución. 1) Veamos que $(A,+)$ es grupo abeliano.
Interna. Dado que la suma de dos elementos de cada anillo A_i es un elemento de A_i, la suma de dos elementos de A pertenece a A.
Asociativa. Para todo $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$, $(z_1,\ldots,z_n) \in A$ y usando la propiedad asociativa de la suma de los elementos de cada anillo A_i :

$$\begin{aligned}
&(x_1,\ldots,x_n)+[(y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)]\\
&=(x_1,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)\\
&=(x_1+(y_1+z_1),\ldots,x_n+(y_n+z_n))\\
&=((x_1+y_1)+z_1,\ldots,(x_n+y_n)+z_n))\\
&=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,\ldots,z_n)\\
&=[(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)]+(z_1,\ldots,z_n).
\end{aligned}$$

Conmutativa. Para todo $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n) \in A$ y usando la propiedad conmutativa de los elementos de los anillos A_i :

$$\begin{aligned}
&(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\
&=(y_1+x_1,\ldots,y_n+x_n)=(y_1,\ldots,y_n)+(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Elemento neutro. Para todo $x=(x_1,\ldots,x_n) \in A$ el elemento de A, $0=(0,\ldots,0)$ satisface:

$$\begin{aligned}
&0+x=x+0=(x_1,\ldots,x_n)+(0,\ldots,0)\\
&=(x_1+0,\ldots,x_n+0)=(x_1,\ldots,x_n)=x.
\end{aligned}$$

Elemento simétrico. Para todo $x=(x_1,\ldots,x_n) \in A$, el elemento de A, $-x=(-x_1,\ldots,-x_n)$ satisface:

$$\begin{aligned}
&(-x)+x=x+(-x)=(x_1,\ldots,x_n)+(-x_1,\ldots,-x_n)\\
&=(x_1+(-x_1),\ldots,x_n+(-x_n))=(0,\ldots,0)=0.
\end{aligned}$$

2) Veamos que $(A,\cdot)$ es grupo semigrupo.
Interna. Dado que el producto de dos elementos de cada anillo A_i es un elemento de A_i, el producto de dos elementos de A pertenece a A.
Asociativa. Para todo $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$, $(z_1,\ldots,z_n) \in A$ y usando la propiedad asociativa del producto de los elementos de cada anillo A_i :

$$\begin{aligned}
&(x_1,\ldots,x_n)\cdot[(y_1,\ldots,y_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n)]=(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1z_1,\ldots,y_nz_n)\\
&=(x_1(y_1z_1),\ldots,x_n(y_nz_n))=((x_1y_1)z_1,\ldots,(x_ny_n)z_n)\\
&=(x_1y_1,\ldots,x_ny_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n)=[(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)]\cdot(z_1,\ldots,z_n).
\end{aligned}$$

3) Veamos que la operación . es distributiva respecto de la operación $+$. Para todo $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$, $(z_1,\ldots,z_n) \in A$ y usando la propiedad

distributiva del producto respecto de la suma en cada anillo A_i :

$$\begin{aligned}&(x_1,\ldots,x_n)\cdot[(y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)]=(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)\\&=(x_1(y_1+z_1),\ldots,x_n(y_n+z_n))=(x_1y_1+x_1z_1,\ldots,x_ny_n+x_nz_n)\\&=(x_1y_1,\ldots,x_ny_n)+(x_1z_1,\ldots,x_nz_n)\\&=(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)+(x_1,\ldots,x_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)]\cdot(z_1,\ldots,z_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n)\\&=((x_1+y_1)z_1,\ldots,(x_n+y_n)z_n)=(x_1z_1+y_1z_1,\ldots,x_nz_n+y_nz_n)\\&=(x_1z_1,\ldots,x_nz_n)+(y_1z_1,\ldots,y_nz_n)\\&=(x_1,\ldots,x_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n)+(y_1,\ldots,y_n)\cdot(z_1,\ldots,z_n).\end{aligned}$$

Concluimos que $(A,+,\cdot)$ es un anillo.

5.4. Propiedades de los anillos

1. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo y a,b elementos de A. Desarrollar $(a+b)^2$. Simplificar las expresión resultante cuando A sea conmutativo.

2. Sea A un anillo. Demostrar que cualesquiera que sean $a,b,c\in A$ y llamando $[a,b]=ab-ba$, se verifica:

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0.$$

3. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Demostrar que:
1) $a0=0a=0,\quad\forall a\in A.$
2) $(-a)b=a(-b)=-(ab),\quad\forall a,b\in A.$
3) $(-a)(-b)=ab,\quad\forall a,b\in A.$

Solución. 1. Usando la propiedad distributiva:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=a^2+ba+ab+b^2.$$

Si el anillo es conmutativo, $ab=ba$ y queda $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2. Desarrollando cada uno de los términos:

$$\begin{aligned}[a,[b,c]]&=a[b,c]-[b,c]a\\&=a(bc-cb)-(bc-cb)a\\&=abc-acb-bca+cba.\quad(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[b,[c,a]]&=b[c,a]-[c,a]b\\&=b(ca-ac)-(ca-ac)b\\&=bca-bac-cab+acb.\quad(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[c,[a,b]] &= c[a,b]-[a,b]c \\ &= c(ab-ba)-(ab-ba)c \\ &= cab-cba-abc+bac. \quad (3)\end{aligned}$$

Sumando las expresiones (1), (2) y (3), y cancelando términos:

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0.$$

3. 1) Se verifica $aa=a(a+0)=aa+a0$, es decir $aa-aa=a0$ y de aquí, $a0=0$. Para la igualdad $0a=0$ se procede de manera análoga.

2) Se verifica $(-a)b+ab=(-a+a)b=0b=0$, es decir $(-a)b=-(ab)$. Para la igualdad $a(-b)=-(ab)$ se procede de manera análoga.

3) Usando la propiedad anterior y que el simétrico (opuesto en este caso) del simétrico de un elemento es el propio elemento:

$$(-a)(-b)=-(a(-b))=-(-(ab))=ab.$$

5.5. Grupo multiplicativo de las unidades

1. Determinar las unidades (o elementos invertibles) del anillo $\mathbb{Z}$.

2. Determinar las unidades del anillo $\mathbb{R}^{n\times n}$. de las matrices reales cuadradas de orden n.

3. Demostrar que si u es unidad de un anillo unitario A, entonces el elemento v que cumple $uv=vu=1$ es único.

4. Determinar las unidades del anillo $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$.

5. Determinar las unidades del anillo $\mathcal{S}$ de las sucesiones de números reales.

6. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo unitario. Demostrar que:
1) El elemento unidad 1 es una unidad.
2) Si u y v son unidades, entonces uv es una unidad, y se verfica $(uv)^{-1}=v^{-1}u^{-1}$.
3) Si u es una unidad, entonces, u^{-1} es una unidad, y se verifica $(u^{-1})^{-1}=u$.
4) Si U es el conjunto formado por todas las unidades de A, entonces $(U,\cdot)$ es un grupo.

Solución. 1. Claramente, las unidades de $\mathbb{Z}$ son 1 y -1.

2. De acuerdo con la definición de unidad, los elementos invertibles de $\mathbb{R}^{n\times n}$ son justamente las matrices invertibles.

3. En efecto, si existiera otro v' cumpliendo $uv' = v'u = 1$, entonces:

$$uv = 1 \Rightarrow v'(uv) = v'1 \Rightarrow (v'u)v = v' \Rightarrow 1v = v' \Rightarrow v = v'.$$

Al elemento v se le designa por u^{-1}.

4. Si $u(x) = k \neq 0$ es polinomio constante no nulo, entonces es unidad pues el polinomio $v(x) = 1/k$ satisface $u(x)v(x) = v(x)u(x) = 1$. Veamos que los polinomios constantes no nulos (es decir, los polinomios de grado 0), son las únicas unidades de $\mathbb{R}[x]$.

En efecto, sea $u(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio distinto de una constante no nula. Si $u(x) = 0$, entonces $u(x)v(x) = 0$ para todo $v(x) \in \mathbb{R}[x]$, y por tanto $u(x)$ no es unidad. Si $u(x)$ es polinomio de grado ≥ 1 entonces, para cualquier polimomio $v(x) \in \mathbb{R}[x]$, o bien $u(x)v(x) = 0$ si $v(x) = 0$, o bien el grado de $u(x)v(x)$ es ≥ 1 si $v(x) \neq 0$. Es decir, $u(x)$ no es unidad. Concluimos que el conjunto U de las unidades de $\mathbb{R}[x]$ es:

$$U = \{u(x) \in \mathbb{R}[x] : \operatorname{grado} u(x) = 0\}.$$

5. Sea $(x_n) \in \mathcal{S}$. Dado que $\mathcal{S}$ es conmutativo, (x_n) es una unidad si y sólo si, existe $(y_n) \in \mathcal{S}$ tal que $(x_n)(y_n) = (1)$. Esto equivale a decir que $x_n y_n = 1$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, que a su vez equivale a decir que $x_n \neq 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Por tanto, el conjunto U de las unidades de $\mathcal{S}$ es:

$$U = \{(x_n) \in \mathcal{S} : x_n \neq 0 \ \forall n = 1, 2, \ldots\}.$$

6. 1) Se verifica $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$, lo cual implica que 1 es una unidad.

2) Si u y v son unidades, existen los elementos u^{-1} y v^{-1} de A tales que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$, $vv^{-1} = v^{-1}v = 1$, por tanto,

$$\begin{aligned}
(uv)(v^{-1}u^{-1}) &= u(vv^{-1})u^{-1} = u1u^{-1} = uu^{-1} = 1,\\
(v^{-1}u^{-1})(uv) &= v^{-1}(u^{-1}u)v = v^{-1}1v = v^{-1}v = 1,
\end{aligned}$$

es decir uv es unidad y $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$.

3) Si u es unidad, existe el elemento u^{-1} de A tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$. Es decir, el elemento u^{-1} satisface la definición de unidad, y además su $(u^{-1})^{-1}$

es precisamente u, es decir $(u^{-1})^{-1} = u$.

4) Efectivamente, $(U, \cdot)$ es grupo.
Interna. Según 2), el producto de dos elementos de U, pertenece a U.
Asociativa. La operación $\cdot$ es acociativa en A, por tanto lo es en U.
Elemento neutro. Según 1), el elemento unidad 1 es una unidad, por tanto es elemento neutro de $(U, \cdot)$ al verificar $u1 = 1u$ para todo $u \in U$.
Elemento simétrico. Si $u \in U$, y según 3) existe $u^{-1} \in U$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$.

5.6. Anillo de los enteros de Gauss

Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones usuales de suma y producto de complejos. Se pide:
A) Demostrar que $\mathbb{Z}[i]$ es anillo conmutativo y unitario (se llama anillo de los enteros de Gauss).
B) Hallar todos los elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Solución. A) (a) Veamos que $(\mathbb{Z}[i], +)$ es grupo abeliano. Como $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ y $(\mathbb{C}, +)$ es grupo abeliano, bastará demostrar que $\mathbb{Z}[i]$ es subgrupo de $\mathbb{C}$.
(i) Claramente $0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$, por tanto $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$.
(ii) Para cada par de elementos $a + bi$ y $c + di$ de $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

y dado que a, b, c, d son enteros, también lo son $a - c$ y $b - d$ lo cual implica que la diferencia anterior pertenece a $\mathbb{Z}[i]$. Concluimos que $(\mathbb{Z}[i], +)$ es grupo abeliano.

(b) Veamos que $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ es semigrupo.
(i) Interna. Para cada par de elementos $a + bi$ y $c + di$ de $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

y como a, b, c, d son enteros, también lo son $ac - bd$ y $ad + bc$ lo cual implica que el producto anterior pertenece a $\mathbb{Z}[i]$.
(ii) Asociativa. La operación producto es asociativa en $\mathbb{C}$, por tanto lo es en $\mathbb{Z}[i]$. Hemos demostrado que $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ es semigrupo. Es además conmutativo pues el producto es conmutativo en $\mathbb{C}$.

(c) La operación $\cdot$ es distributiva respecto la operación $+$. Efectivamente, lo es en $\mathbb{C}$, por tanto en $\mathbb{Z}[i]$. Hemos demostrado que $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ es anillo conmutativo. Es también unitario pues $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$.

B) Un elemento $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ no nulo es invertible si y sólo si existe un $a' + b'i \in \mathbb{Z}[i]$ no nulo tal que $(a + bi)(a' + b'i) = 1$. Tomando módulos al cuadrado, obtenemos $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 1$.

Como los dos factores anteriores son enteros positivos, ha de ser necesariamente $a^2 + b^2 = 1$ o equivalentemente $a = \pm 1 \wedge b = 0$ o $a = 0 \wedge b = \pm 1$. Es decir, los únicos posibles elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$ son $1, -1, i, -i$. Pero estos elementos son invertibles al cumplirse:

$$1 \cdot 1 = 1,\ (-1) \cdot (-1) = 1,\ i \cdot (-i) = 1,\ (-i) \cdot i = 1.$$

El conjunto de las unidades de $\mathbb{Z}[i]$ es por tanto

$$U = \{1, -1, i, -i\}.$$

5.7. Anillo de clases residuales

Para los siguientes anillos, construir sus tablas de Cayley de la suma y el producto, y determinar el inverso de cada elemento cuando éste exista.

$$a)\ \mathbb{Z}_3. \quad b)\ \mathbb{Z}_4. \quad c)\ \mathbb{Z}_6, \quad d)\ \mathbb{Z}_2.$$

Solución. a) Tenemos $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y las correspondientes tablas de Cayley son:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Los opuestos e inversos son:

x	0	1	2
$-x$	0	2	1

x	0	1	2
x^{-1}	$\nexists$	1	2

b) Tenemos $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y las correspondientes tablas de Cayley son:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Los opuestos e inversos son:

x	0	1	2	3
$-x$	0	3	2	1

x	0	1	2	3
x^{-1}	$\nexists$	1	$\nexists$	3

c) Tenemos $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y las correspondientes tablas de Cayley son:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Los opuestos e inversos son:

x	0	1	2	3	4	5
$-x$	0	5	4	3	2	1

x	0	1	2	3	4	5
x^{-1}	$\nexists$	1	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	5

d) Tenemos $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ y las correspondientes tablas de Cayley son:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Los opuestos e inversos son:

x	0	1
$-x$	0	1

x	0	1
x^{-1}	$\nexists$	1

5.8. Anillos de integridad

1. Determinar los divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}_6$.
2. Estudiar si el anillo $M_2(\mathbb{R})$ es de integridad.
3. Estudiar si el anillo conmutativo y unitario $\mathcal{S}$ de las sucesiones de números reales es un dominio de integridad.
4. Demostrar que en un anillo unitario, las unidades (es decir, los elementos invertibles) no son divisores de cero.
5. Sea $m > 1$ entero. Demostrar que: $\mathbb{Z}_m$ es dominio de integridad $\Leftrightarrow$ m es primo.
6. Sea A un dominio de integridad y $a \in A$ un elemento para el que existe un n entero positivo tal que $a^n = 0$. Demostrar que $a = 0$.

Solución. 1. La tabla de Cayley del producto es:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

de la cual deducimos que los divisores de cero son 2, 3 y 4.

2. Elijamos los elementos de $M_2(\mathbb{R})$: $M = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$MN = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Existen divisores de cero, por tanto $M_2(\mathbb{R})$ no es anillo de integridad.

3. Elijamos los elementos de $\mathcal{S}$:

$$x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$y = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots).$$

Entonces, $xy = 0$ y sin embargo, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Existen divisores de cero, por tanto $\mathcal{S}$ no es dominio de integridad.

4. Si a es unidad del anillo, existe a^{-1} elemento del anillo tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Si a fuera divisor de cero, existiría $b \neq 0$ en el anillo tal que $ab = 0$ o bien $ba = 0$ Si fuera $ab = 0$:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

lo cual es una contradicción. Análogo razonamiento si fuera $ba = 0$.

5. $\Rightarrow$) Si m no fuera primo, entonces, $m = rs$ con r, s enteros tales que $1 < r < m$ y $1 < s < m$. Esto implicaría $\bar{r} \cdot \bar{s} = \bar{m} = \bar{0}$ siendo $\bar{r} \neq \bar{0}$ y $\bar{s} \neq \bar{0}$. Existirían divisores de cero, en contradicción con la hipótesis de ser $\mathbb{Z}_m$ de integridad.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \ldots,\ \overline{m-1}\}$ tuviera divisores de cero, es decir que existieran elementos $\bar{r}$ y $\bar{s}$ de $\mathbb{Z}_m$ no nulos tales que $\bar{r} \cdot \bar{s} = \bar{0}$. Esto implicaría que m divide a rs.

Ahora bien, dado que $r < m$ y m es primo, r y m son primos entre sí, y al dividir m a rs y ser primo con r, m divide a s (por tanto $\bar{s} = \bar{0}$), lo cual es absurdo pues hemos supuesto $\bar{s} \neq \bar{0}$.

6. Llamemos m al menor de todos los enteros positivos n que cumplen $a^n = 0$. Supongamos que fuera $a \neq 0$. Entonces, al ser A dominio de integridad, la igualdad $a^m = aa^{m-1} = 0$ implica que $a^{m-1} = 0$, en contradicción con la elección de m.

5.9. Subanillos

1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y sea B un subconjunto no vacío de A. Demostrar que:

$$B \text{ es subanillo de } A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ a, b \in B \Rightarrow a - b \in B \\ (ii)\ a, b \in B \Rightarrow ab \in B. \end{cases}$$

2. Demostrar que el subconjunto (m) de todos los múltiplos del número entero m es un subanillo de $\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que el conjunto $B = \{a + b\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo del anillo $\mathbb{R}$.
4. Se considera el conjunto de matrices:

$$\mathcal{A} = \{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}$ es un subanillo del anillo usual $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2.
5. Demostrar que el conjunto $\mathcal{B}$ de las sucesiones acotadas de números reales es un subanillo del anillo $\mathcal{S}$ de las sucesiones de números reales.

Solución. 1. $\Rightarrow$) Si B es subanillo de A, entonces $B \neq \emptyset$ pues $0 \in B$. Además, B es subgrupo aditivo de A, luego se cumple (i). Como la operación producto es interna en B, se cumple (ii).

$\Leftarrow$) De $B \neq \emptyset$ y (i), se deduce que $(B.+)$ es subgrupo de $(A, +)$ y además abeliano por serlo $(A, +)$, es decir, $(B.+)$ es grupo abeliano. De (ii) se deduce que la operación producto es interna en B, y además, es asociativa en B por serlo en A, lo cual implica que $(B, \cdot)$ es semigrupo.
Por último, se cumple la propiedad distributiva en B al cumplirse en A. Concluimos que $(B, +, \cdot)$ es anillo, y por tanto B es subanillo de A.

2. Dado que $0 = 0 \cdot m$, el número cero es múltiplo de m, lo cual implica que $(m) \neq \emptyset$. Si $a, b \in (m)$, entonces $a = rm$ y $b = sm$ para ciertos enteros r y s. Entonces,

$$a - b = (r - s)m, \quad ab = (rsm)m.$$

Como $r - s$ y rsm son enteros, $a - b$ y ab son múltiplos de m, es decir $a - b \in (m)$ y $ab \in (m)$, lo cual demuestra que (m) es un subanillo de $\mathbb{Z}$.

3. Claramente, $B \neq \emptyset$ y $B \subset \mathbb{R}$. Para todo $a + b\sqrt{2}$, $c + d\sqrt{2}$ elementos de B :

$$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}.$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Dado que la suma, resta y producto de enteros es entero, la diferencia y producto de elementos de B, pertenece a B. Concluimos que B es un subanillo del anillo $\mathbb{R}$.

4. Para $x = y = 0$, obtenemos la matriz nula de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, y por tanto $\mathcal{A}$ es distinto del vacío. Consideremos dos matrices genéricas de $\mathcal{A}$:

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix}.$$

Calculemos $M - N$ y MN :

$$M - N = \begin{bmatrix} x - x' & y - y' \\ -(y - y') & x - x' \end{bmatrix}.$$

$$MN = \begin{bmatrix} xx' - yy' & xy' + yx' \\ -(xy' + yx') & xx' - yy' \end{bmatrix}.$$

Claramente, $M + N$ y MN son matrices de $\mathcal{A}$. Concluimos que $\mathcal{A}$ es subanillo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Recordamos que una sucesión $x = (x_n)$ de números reales está acotada si y sólo si, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n. Veamos que efectivamente $\mathcal{B}$ es subanillo de $\mathcal{S}$.
(i) La sucesión nula $0 = (0)$ está acotada, por tanto $0 \in \mathcal{B}$.
(ii) Si $x = (x_n),\ y = (y_n)$ son elementos de $\mathcal{B}$, son sucesiones acotadas, es decir:

$$\exists M > 0 : |x_n| \leq M \quad \forall n,$$
$$\exists K > 0 : |y_n| \leq K \quad \forall n,$$

entonces $|x_n - y_n| = |x_n + (-y_n)| \leq |x_n| + |-y_n| = |x_n| + |y_n| \leq M + K$ lo cual implica que $x - y$ está acotada, por tanto $x - y \in \mathcal{B}$.

(iii) Si $x = (x_n),\ y = (y_n)$ son elementos de $\mathcal{B}$, entonces $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| < MK$, $\forall n$, lo cual implica que xy está acotada, por tanto $xy \in \mathcal{B}$.
Concluimos que $\mathcal{B}$ es subanillo de $\mathcal{S}$. Es además conmutativo (pues $\mathcal{S}$ lo es), y unitario al ser $1 = (1)$ sucesión acotada.

5.10. Homomorfismos de anillos

1. Sea $f : A \to B$, un homomorfismo de anillos. Demostrar que $\ker f$ es subanillo de A.
2. Sea $f : A \to B$, un homomorfismo de anillos. Demostrar que $\operatorname{Im} f$ es subanillo de B.
3. Se considera el anillo $\mathcal{A} = \{\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que es un isomorfismo entre anillos, la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ dada por

$$f(x + iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

4. Demostrar que la siguiente aplicación es epimorfismo de anillos:

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad f(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0.$$

5. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las operaciones:

$$\begin{aligned} &(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \\ &(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy'). \end{aligned}$$

Es fácil demostrar (y no se pide en este problema), que $\mathbb{R}^2$ es un anillo con las anteriores operaciones. Para a, b números reales fijos, se define la aplicación $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $\phi(f) = (f(a), f(b))$. Demostrar que ϕ es homomorrfismo de anillos y determinar $\ker \phi$.

Solución. 1. Dado que $\ker f$ es exactamente el núcleo entre los grupos aditivos $(A, +)$ y $(B, +)$, $\ker f$ es subgrupo aditivo de A, luego se verifica $\ker f \neq \emptyset$ y $a - a' \in \ker f$, $\forall a, a' \in \ker f$. Por otra parte, $\forall a, a' \in \ker f :$

$$f(aa') = f(a)f(a') = 0 \cdot 0 = 0,$$

lo cual implica que $aa' \in \ker f$. Del teorema de caracterización de subanillos, concluimos que $\ker f$ es subanillo de A.

2. Dado que $\operatorname{Im} f$ es exactamente la imagen entre los grupos aditivos $(A, +)$ y $(B, +)$, $\operatorname{Im} f$ es subgrupo aditivo de B, luego se verifica $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$ y $b - b' \in$

$\operatorname{Im} f$, $\forall b, b' \in \operatorname{Im} f$. Por otra parte, si $b, b' \in \operatorname{Im} f$, entonces $b = f(a)$ y $b' = f(a')$ para ciertos $a, a' \in A$. Entonces,

$$bb' = f(a)f(a') = f(aa') \Rightarrow bb' \in \operatorname{Im} f.$$

Del teorema de caracterización de subanillos, concluimos que $\operatorname{Im} f$ es subanillo de B.

3. Para cualquier par de números complejos $x + iy,\ x' + iy'$:

$$f[(x+iy) + (x'+iy')] = f[(x+x') + (y+y')i] = \begin{bmatrix} x+x' & y+y' \\ -(y+y') & x+x' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = f(x+iy) + f(x'+iy').$$

$$f[(x+iy)(x'+iy')] = f[(xx'-yy') + (xy'+yx')i] =$$
$$\begin{bmatrix} xx'-yy' & xy'+yx' \\ -(xy'+yx') & xx'-yy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = f(x+iy)f(x'+iy').$$

Concluimos que f es homomorfismo entre los anillos $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$. Su núcleo es:

$$\ker f = \{x+iy \in \mathbb{C} : f(x+iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} = \{0+0i\} = \{0\},$$

por tanto f es inyectiva. Por último, cualquier elemento de $\mathcal{A}$ se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = f(x+iy),$$

es decir f es sobreyectiva. Hemos demostrado pues que f es un isomorfismo entre los anillos $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$.

4. Para cualquier par de elementos de $\mathbb{R}[x]$, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ se verifica:

$$f[p(x)+q(x)] = f[(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots]$$
$$= a_0 + b_0 = f[p(x)] + f[q(x)].$$

$$f[p(x)q(x)] = f[a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots]$$
$$= a_0b_0 = f[p(x)]f[q(x)].$$

Concluimos que f es homomorfismo entre los anillos $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{R}$. Es además epimorfismo, pues cualquier número real dado a_0 se puede expresar en la forma $a_0 = f(a_0)$, es decir f es sobreyectiva.

5. Para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}&\phi(f+g) = ((f+g)(a), (f+g)(b)) = (f(a)+g(a), f(b)+g(b))\\ &= (f(a), f(b)) + (g(a), g(b)) = \phi(f) + \phi(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\phi(f \cdot g) = ((f \cdot g)(a), (f \cdot g)(b)) = (f(a)g(a), f(b)g(b))\\ &= (f(a), f(b)) \cdot (g(a), g(b)) = \phi(f) \cdot \phi(g),\end{aligned}$$

es decir ϕ es homomorfismo entre los anillos $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$. El núcleo de ϕ es

$$\ker \phi = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R} : \phi(f) = (f(a), f(b)) = (0, 0)\},$$

por tanto, está formado por las funciones de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que se anulan simultáneamente en a y b.

5.11. Ideales de un anillo

1. Sea m entero y $(m) = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } m\}$. Demostrar que (m) es ideal de $\mathbb{Z}$.
2. Demostrar que el núcleo de un homomorfismo de anillos es un ideal del anillo inicial.
3. Demostrar que todo ideal de un anillo es subanillo del mismo.
4. Sea R un anillo conmutativo y unitario y $a_1, \ldots, a_n$ elementos de R. Se define

$$(a_1, \ldots, a_n) = \{r_1 a_1 + \cdots r_n a_n : r_i \in R\}$$

a) Demostrar que $(a_1, \ldots, a_n)$ es ideal de R
b) Demostrar que es el menor de entre todos los ideales de R que contienen a $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Nota. A $(a_1, \ldots, a_n)$ se le llama *ideal generado por* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
5. *Suma de ideales.* Sean I, J ideales de un anillo A. Se define la suma de I y J de la forma:

$$I + J = \{x \in A : x = i + j \text{ con } i \in I,\ j \in J\}.$$

Demostrar que $I + J$ es ideal de A.
6. *Intersección de ideales.* Sean I, J ideales de un anillo A. Demostrar que $I \cap J$ es ideal de A.

Solución. 1. Se verifica $0 = 0m$, por tanto 0 es múltiplo de m, es decir $0 \in (m)$, y por tanto $(m) \neq \emptyset$. Sean $x, y \in (m)$, entonces $x = km$ e $y = sm$ para ciertos enteros k y s. Ahora bien, $x - y = (k - s)m$ siendo $k - s$ entero, lo cual implica que $x - y \in (m)$. Por último, para todo $a \in \mathbb{Z}, x \in (m)$:

$$xa = ax = a(km) = (ak)m \Rightarrow xa = ax \in (m).$$

Concluimos que (m) es ideal de $\mathbb{Z}$.

2. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sabemos que $\ker f$ es subgrupo aditivo de A, por tanto $\ker f \neq \emptyset$ y para todo $x, y \in I$ se verifica $x - y \in I$. Por otra parte, $\forall a \in A$ y $\forall x \in I$:

$$f(ax) = f(a)f(x) = f(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ax \in \ker f.$$
$$f(xa) = f(x)f(a) = 0 \cdot f(a) = 0 \Rightarrow xa \in \ker f.$$

Concluimos que $\ker f$ es ideal de A.

3. Sea A un anillo e I un ideal de A. Entonces $I \neq \emptyset$ y $x - y \in I$ para todo $x, y \in I$. Por otra parte, al cumplirse $ax \in I$ y $xa \in I$ para todo $a \in A, x \in I$, también se cumple $yx \in I$ $xy \in I$ para todo $y \in I, x \in I$.
Por el teorema de caracterización de subanillos, concluimos que I es subanillo de A.

4. a) Se verifica $0 = 0a_1 + \cdots 0a_n$, por tanto $0 \in (a_1, \ldots, a_n) \neq \emptyset$. Si x e y son elementos de $(a_1, \ldots, a_n)$,

$$x = r_1a_1 + \cdots r_na_n,\ r_i \in R,$$
$$y = r'_1a_1 + \cdots r'_na_n,\ r'_i \in R.$$

Entonces, $x - y = (r_1 - r'_1)a_1 + \cdots (r_n - r'_n)a_n$ con $r_i - r'_i \in R$, luego

$$x - y \in (a_1, \ldots, a_n).$$

Si $r \in R$ entonces $rx = (rr_1)a_1 + \cdots (rr_n)a_n$ con $rr_i \in R$, luego $rx \in (a_1, \ldots, a_n)$.

b) Para todo a_i se verifica $a_i = 0a_1 + \cdots + 1a_i + \cdots + 0a_n$, por tanto

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \subset (a_1, \ldots, a_n).$$

Sea ahora un ideal I de R que contiene a $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Entonces, si $x \in (a_1, \ldots, a_n)$, al ser de la forma $x = r_1a_1 + \cdots r_na_n$ con $r_i \in R$ y los $a_i \in I$, necesariamente $x \in I$ por ser I ideal. Es decir, $(a_1, \ldots, a_n) \subset I$.

5. Como I, J son ideales de A, son subanillos de este, por tanto 0 pertenece a ambos, con lo cual $0 = 0 + 0 \in I + J$. Es decir, $I + J \neq \emptyset$. Si $x, y \in I + J$, entonces $x = i_1 + j_1$ con $i_1 \in I,\ j_1 \in J$ e $y = i_2 + j_2$ con $i_2 \in I,\ j_2 \in J$. Entonces,

$$x - y = (i_1 + j_1) - (i_2 + j_2) = (i_1 - i_2) + (j_1 - j_2),$$

y al ser I, J ideales, $i_1 - i_2 \in I$ y $j_1 - j_2 \in J$, luego $x - y \in I + J$.
Si $a \in A$ y $x \in I + J$:

$$ax = a(i_1 + j_1) = ai_1 + aj_1,$$
$$xa = (i_1 + j_1)a = i_1a + j_1a,$$

y al ser I, J ideales, ai_1 e i_1a pertenecen a I, y aj_1 y j_1a pertenecen a J, luego ax y xa pertenecen a $I + J$.

6. Como I, J son ideales de A, son subanillos de este, por tanto 0 pertenece a ambos, es decir $I \cap J \neq \emptyset$.
Si $x, y \in I \cap J$, entonces $x - y$ pertenece a I y a J por ser ideales, luego $x - y \in I \cap J$. Si $a \in A$ y $x \in I \cap J$, entonces ax y xa pertenecen a I y a J por ser ideales, luego $ax \in I \cap J$ y $xa \in I \cap J$.

5.12. Ideal de las sucesiones acotadas

Demostrar que el conjunto $\mathcal{N}$ de las sucesiones reales nulas, es decir de límite 0, es un ideal del anillo $\mathcal{B}$ de las sucesiones acotadas de números reales.

Solución. Sabemos que toda sucesión convergente está acotada, por tanto $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$. La sucesión nula $0 = (0)$ tiene límite 0, por tanto $0 \in \mathcal{N}$, es decir $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Si $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ son elementos de $\mathcal{N}$, entonces $(x_n) \to 0$ e $(y_n) \to 0$ lo cual implica por conocidas propiedades de los límites que $x - y = (x_n - y_n) \to 0$, luego $x - y \in \mathcal{N}$.

Por último, si $a = (a_n) \in \mathcal{B}$ y $(x_n) \in \mathcal{N}$, entonces (a_n) está acotada y (x_n) es una sucesión nula. Por una conocida propiedad de los límites, $ax = (a_n x_n)$ es sucesión nula, luego $ax \in \mathcal{N}$.
Concluimos que $\mathcal{N}$ es ideal de $\mathcal{B}$.

5.13. Ideal bilátero $f(I)$

Siendo $f : A \to A'$ un homomorfismo de anillos e I un ideal bilátero de A, demostrar que $f(I)$ es un ideal bilátero de $f(A)$ (subanillo de A').

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Arquitectura, UPM).

Solución. Sean y_1, y_2 elementos de $f(I)$. Entonces existen x_1, x_2 elementos de I tales que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Teniendo en cuenta que f es homomorfismo:

$$y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2).$$

Al ser I ideal de A se verifica $x_1 - x_2 \in I$, en consecuencia $y_1 - y_2 \in f(I)$. Sean ahora $b \in f(A)$ e $y \in f(I)$. Entonces, existen elementos $a \in A$, $x \in I$ tales que $b = f(a)$ e $y = f(x)$. Teniendo en cuenta que f es homomorfismo:

$$by = f(a)f(x) = f(ax)\ ,\ yb = f(x)f(a) = f(xa).$$

Por hipótesis, I es un ideal bilátero de A lo cual implica que tanto ax como xa pertenecen a I. Se deduce pues que by e yb pertenecen a $f(I)$. Concluimos que $f(I)$ es ideal bilátero de $f(A)$.

5.14. Anillo cociente

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, e I un ideal de A. Demostrar que $A/I = \{a + I : a \in A\}$ es un anillo con las operaciones:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad (a + I) \cdot (b + I) = ab + I.$$

Demostrar también que si A es conmutativo (unitario), entonces A/I es conmutativo (unitario).

Solución. 1) $(A/I, +, \cdot)$ es grupo abeliano. En efecto, como I es un subgrupo aditivo de A, y la operación $+$ es conmutativa, I es subgrupo normal de A, y según sabemos $A/I = \{a + I : a \in A\}$ es un grupo (además abeliano) con la operación $+$, $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$.

2) $(A/I, \cdot)$ es semigrupo. Lo primero que tenemos que demostrar es que la operación producto está bien definida en A/I, es decir que el producto depende de las clases en sí, y no del representante que elijamos de las mismas. Equivalentemente, tenemos que demostrar que:

$$a + I = a' + I \text{ y } b + I = b' + I \Rightarrow ab + I = a'b' + I.$$

En efecto, si $a + I = a' + I$ y $b + I = b' + I$, entonces $a' \in a + I$ y $b' \in b + I$, o sea $a' = a + x$, $b' = b + y$ para ciertos $x, y \in I$. Ahora bien,

$$a'b' = (a + x)(b + y) = ab + xb + ay + xy.$$

Como I es ideal, la suma $xb+ay+xy$ pertenece a I, y por tanto $a'b' \in ab+I$, luego $a'b' + I = ab + I$. Queda pues demostrado que la operación producto está bien definida en A/I.

Interna. Por la propia definición, el producto de dos elementos de A/I es un elemento de A/I.

Asociativa. Para $a+I$, $b+I$, $c+I$ elementos cualesquiera de A/I, y usando la propiedad asociativa del producto en A :

$$\begin{aligned}&[(a+I)(b+I]\,(c+I)=(ab+I)(c+I)=(ab)c+I.\\&=a(bc)+I=(a+I)(bc+I)=(a+I)\,[(b+I)(c+I)]\,.\end{aligned}$$

3) En A/I el producto es distributivo respecto de la suma. En efecto, para $a+I$, $b+I$, $c+I$ elementos cualesquiera de A/I, y usando la propiedad distributiva en A :

$$\begin{aligned}&(a+I)\,[(b+I)+(c+I]=(a+I)\,[(b+c)+I]=a(b+c)+I=\\&(ab+ac)+I=(ab+I)+(ac+I)=(a+I)(b+I)+(a+I)(c+I).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(a+I)+(b+I]\,(c+I)=[(a+b)+I]\,(c+I)=(a+b)c+I=\\&(ac+bc)+I=(ac+I)+(bc+I)=(a+I)(c+I)+(b+I)(c+I).\end{aligned}$$

Concluimos que $(A/I,+,\cdot)$ es anillo. Por último, si A es conmutativo, para $a+I$, $b+I$, elementos cualesquiera de A/I :

$$(a+I)(b+I)=ab+I=ba+I=(b+I)(a+I)$$

luego A/I es conmutativo. Si A es unitario con elemento unidad 1, para todo elemento $a+I$ de A/I :

$$(a+I)(1+I)=a\cdot 1+I=a+I,\quad (1+I)(a+I)=1\cdot a+I=a+I,$$

es decir A/I es unitario con elemento unidad $1+I$.

5.15. Descomposición canónica de un homomorfismo de anillos

Sea $f:G\to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G,\cdot)$ y $(G',\cdot)$. Demostrar que,
1. $n:G\to G/\ker f,\ n(x)=x\ker f$ es epimorfismo.
2. $g:G/\ker f\to \operatorname{Im} f,\ g(x\ker f)=f(x)$ es isomorfismo.
3. $i:\operatorname{Im} f\to G',\ i(x)=x$ es monomorfismo.
4. El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ n\downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker f & \xrightarrow{g} & \operatorname{Im} f\end{array}$$

es decir, $f=i\circ g\circ n$.

Solución. 1. Como $\ker f$ es un ideal de A, está definido el anillo cociente $A/\ker f$. Para todo a, a' elementos de A :

$$n(a+a') = (a+a') + \ker f = (a+\ker f) + (a'+\ker f) = n(a) + n(a')$$
$$n(aa') = (aa') + \ker f = (a+\ker f)(a'+\ker f) = n(a)n(a'),$$

es decir n es homomorfismo de anillos. Por otra parte, todo elemento $a+\ker f$ es $a+\ker f = n(a)$, luego n es sobreyectiva. Concluimos que n es epimorfismo de anillos.

2. (a) Veamos que la aplicación g está bien definida, es decir que $g(a+\ker f)$ no depende del representante sino de la clase en sí. En efecto, supongamos que $a+\ker f = a'+\ker f$, entonces $a-a' \in \ker f$, que equivale a $f(a-a') = 0$. Pero $f(a-a') = 0 \Leftrightarrow f(a)-f(a') = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(a')$, es decir $g(a+\ker f) = g(a'+\ker f)$.
(b) Veamos que g es homomorfismo de anillos. Para todo $a+\ker f$, $a'+\ker f$ elementos de $A/\ker f$:

$$g[(a+\ker f) + (a'+\ker f)] = g[(a+a') + \ker f] = f(a+a')$$
$$= f(a) + f(a') = g(a+\ker f) + g(a'+\ker f).$$

$$g[(a+\ker f)(a'+\ker f)] = g[(aa') + \ker f] = f(aa')$$
$$= f(a)f(a') = g(a+\ker f)g(a'+\ker f).$$

(c) Veamos que g es monomorfismo. El núcleo de g es:

$$\ker g = \{a+\ker f \in A/\ker f : g(a+\ker f) = f(a) = 0\}$$
$$= \{\ker f\} = \{0+\ker f\},$$

es decir el núcleo de g se reduce a elemento neutro de $A/\ker f$ lo cual implica que g es inyectiva.
(d) Veamos que g es epimorfismo. En efecto, si $b \in \operatorname{Im} f$, entonces $b = f(a)$ para algún $a \in A$, luego $b = g(a+\ker f)$. Esto implica que g es sobreyectiva. Concluimos que g es isomorfismo.

3. Para todo b, b' elementos de $\operatorname{Im} f$:

$$i(b+b') = b+b' = i(b)+i(b'), \quad i(bb') = bb' = i(b)i(b'),$$

es decir i es homomorfismo de anillos. Ademas, $i(b) = i(b')$ implica $b = b'$, luego i es inyectiva.

4. Para todo $a \in A$ se verifica $(i\circ g\circ n)(a) = (i\circ g)(a+\ker f) = i(f(a)) = f(a)$, por tanto, $i \circ g \circ n = f$.

5.16. Concepto de cuerpo

1. Determinar los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{11}$ y deducir que es un cuerpo.
2. Demostrar que $\mathbb{K} = \{x + y\sqrt{3} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ con las operaciones usuales suma y producto de números reales, es un cuerpo.
3. Demostrar que cualquier intersección de subcuerpos de un cuerpo $\mathbb{K}$ es subcuerpo de $\mathbb{K}$.
4. Demostrar que todo cuerpo es dominio de integridad.
5. Demostrar que los únicos ideales de un cuerpo $\mathbb{K}$ son $\{0\}$ y $\mathbb{K}$.
6. Demostrar que en un cuerpo $\mathbb{K}$, la ecuación $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{K}$ y $a \neq 0$ tiene siempre solución única.

Solución. 1. Usando la conocida forma de multiplicar en los anillos $\mathbb{Z}_m$:

$$\begin{aligned}&1 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 = 1, \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 1,\\ &5 \cdot 9 = 9 \cdot 5 = 1, \quad 7 \cdot 8 = 8 \cdot 1 = 1, \quad 10 \cdot 10 = 1.\end{aligned}$$

Por tanto, todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ tiene inverso. Al ser $\mathbb{Z}_{11}$ anillo conmutativo y unitario, es cuerpo.

2. 1) Veamos que $\mathbb{K}$ es subanillo de $\mathbb{R}$, con lo cual estará demostrado que $\mathbb{K}$ es anillo. Claramente, $\mathbb{K} \neq \emptyset$, y para $x + y\sqrt{3}$, $x' + y'\sqrt{3}$ elementos de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}&(x + y\sqrt{3}) - (x' + y'\sqrt{3}) = (x - x') + (y - y')\sqrt{3},\\ &(x + y\sqrt{3})(x' + y'\sqrt{3}) = (xx' + 3yy') + (yx' + xy')\sqrt{3},\end{aligned}$$

y dado que la suma y producto de números racionales es un número racional concluimos que la diferencia y el producto de elementos de $\mathbb{K}$ está en $\mathbb{K}$. Por el teorema de caracterización de subanillos, $\mathbb{K}$ es subanillo. Es además conmutativo por serlo $\mathbb{R}$, y unitario pues $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in \mathbb{K}$.

2) Veamos que todo elemento no nulo de $\mathbb{K}$ tiene inverso en $\mathbb{K}$. Primeramente, demostremos que en $\mathbb{K}$ ocurre:

$$x + y\sqrt{3} = u + v\sqrt{3} \Leftrightarrow x = u \text{ e } y = v. \qquad (1)$$

$\Leftarrow$) Esta implicación es trivial.
$\Rightarrow$) Si $x + y\sqrt{3} = u + v\sqrt{3}$, entonces $(x - u) = (v - y)\sqrt{3}$. No puede ocurrir $v - y \neq 0$, pues en tal caso, $\sqrt{3} = (x - u)/(v - y)$ y llegaríamos al absurdo de que $\sqrt{3}$ sería racional. Por tanto, necesariamente $v = y$ lo cual implica $x - u = 0$, o sea $x = u$.
Sea ahora $x + y\sqrt{3} \in \mathbb{K}$ no nulo. Veamos que existe $x' + y'\sqrt{3} \in \mathbb{K}$ tal que $(x + y\sqrt{3})(x' + y'\sqrt{3}) = 1 = 1 + 0\sqrt{3}$.

Por (1), la igualdad anterior equivale al sistema:

$$\begin{cases} xx' + 3yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

El determinante de la matriz del sistema anterior en las incógnitas x' e y' es $x^2 - 3y^2$. No puede ser $x^2 - 3y^2 = 0$, pues si $y = 0$, entonces $x = 0$ (absurdo pues $x + y\sqrt{3}$ es no nulo), y si $y \neq 0$, entonces $\sqrt{3} = x/y$ (absurdo pues $\sqrt{3}$ no es racional).
Por la regla de Cramer, el sistema (2) tiene solución, luego $x + y\sqrt{3}$ tiene inverso. Hemos demostrado que $\mathbb{K}$ es cuerpo.

3. Sea $\{\mathbb{K}_i\}$ una familia de subcuerpos de $\mathbb{K}$ y $H = \bigcap_i \mathbb{K}_i$. Se verifica $0 \in \mathbb{K}_i$ para todo i, luego $0 \in H \neq \emptyset$. Si $x, y \in H$, entonces $x \in \mathbb{K}_i$, $y \in \mathbb{K}_i$ para todo i y por ser $\mathbb{K}_i$ subgrupo aditivo de $\mathbb{K}$ para todo i, también $x - y \in \mathbb{K}_i$ para todo i, en consecuencia $x - y \in H$. Por tanto H es subgrupo aditivo de $\mathbb{K}$ (además conmutativo por serlo $\mathbb{K}$).
Veamos ahora que $H^* = H - \{0\}$ es subgrupo multiplicativo de $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$. Se verifica $1 \in \mathbb{K}_i$ para todo i, luego $1 \in H^* \neq \emptyset$. Si $x, y \in H^*$, entonces $x, y \in \mathbb{K}_i - \{0\}$, para todo i y por ser $\mathbb{K}_i - \{0\}$ subgrupo multiplicativo de $\mathbb{K}^*$ para todo i, también $xy^{-1} \in \mathbb{K}_i$ para todo i, en consecuencia $xy^{-1} \in H^*$. Por tanto H^* es subgrupo aditivo de $\mathbb{K}^*$ (además conmutativo por serlo $\mathbb{K}^*$).

4. Si $\mathbb{K}$ es cuerpo, es anillo conmutativo y unitario, por tanto basta demostrar que no existen divisores de cero. Sea $a \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$ y supongamos que existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $ab = 0$. Tenemos:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

es decir no existen divisores de cero, luego $\mathbb{K}$ es dominio de integridad.

5. Sea $I \subset \mathbb{K}$ un ideal de $\mathbb{K}$. Si $I = \{0\}$, ya está demostrado. Si $I \neq \{0\}$, existe $x \in I$ con $x \neq 0$. Entonces, todo $a \in \mathbb{K}$ se puede expresar en la forma:

$$a = 1a = x^{-1}xa = (x^{-1}a)x.$$

Como I es ideal, $a \in I$, y por tanto $\mathbb{K} \subset I$. Esto, junto con $I \subset \mathbb{K}$ demuestra que $I = \mathbb{K}$.

6. Efectivamente, si x es solución de la ecuación $ax = b$, entonces:

$$ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow 1x = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b,$$

es decir la única posible solución es $x = a^{-1}b$. Pero este elemento de $\mathbb{K}$ es efectivamente solución de la ecuación, pues $a(a^{-1}b) = aa^{-1}b = 1b = b$.

Nota. En un cuerpo, al elemento $a^{-1}b$ (que es igual a ba^{-1}), se le acostumbra a representar por b/a.

5.17. Cuerpos $\mathbb{Z}_p$

1. Resolver en el cuerpo $\mathbb{Z}_7$ la ecuación $2x + 5 = 3$.
2. Resolver en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ las ecuaciones:
   (a) $x^2 + x + 3 = 0$. $\quad(b)$ $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$.
3. Resolver en $\mathbb{Z}_5$ el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$
4. Sabiendo que el conocido método de los adjuntos para calcular la inversa de una matriz real cuadrada, es también válido para todo cuerpo, hallar en $\mathbb{Z}_7$ la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
5. Demostrar que todo dominio de integridad con un número finito de elementos es un cuerpo.

Solución. 1. Sumando 2 a ambos miembros de la ecuación, queda $2x+0 = 5$, es decir, $2x = 5$. Multiplicando por 4 ambos miembros, queda $1x = 6$, es decir $x = 6$.

2. (a) Llamemos $p(x) = x^2 + x + 3$. Posibles raíces: $0, 1, 2, 3, 4$. Tenemos:

$$p(0) = 3, \quad p(1) = 1 + 1 + 3 = 0, \quad p(2) = 4 + 2 + 3 = 4.$$
$$p(3) = 4 + 3 + 3 = 0, \quad p(4) = 1 + 4 + 3 = 3.$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 1$, $x = 3$.
(b) Llamemos $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$. Posibles raíces: $0, 1, 2, 3, 4$. Tenemos:

$$p(0) = 3, \quad p(1) = 1 + 2 + 4 + 3 = 0, \quad p(2) = 3 + 3 + 3 + 3 = 2.$$
$$p(3) = 2 + 3 + 2 + 3 = 0, \quad p(4) = 4 + 2 + 1 + 3 = 0.$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$.

3. Sea (x, y) solución del sistema. Multiplicando a la segunda igualdad por $2:$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 4y = 3. \end{cases}$$

Restando a la segunda igualdad la primera, obtenemos $y = 1$. Sustituyendo en $x+2y = 4$, queda $x = 4-2 = 2$. Es decir, si (x, y) es solución del sistema, necesariamente $(x, y) = (2, 1)$. Veamos que efectivamente es solución:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 2 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4. \end{cases}$$

Concluimos que la única solución del sistema es $(x, y) = (2, 1)$.

4. Determinante de A : $\det A = 2{\cdot}4-1{\cdot}3 = 1-3 = 1+4 = 5 \neq 0$. Traspuesta de A : $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Adjunta de A : $\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$. Inversa de A : $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.
Comprobemos el resultado:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 3+4 \\ 5+2 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

5. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un dominio de integridad con un número finito de elementos. Dado que A es anillo conmutativo y unitario, para demostrar que A es cuerpo, bastará demostrar que todo elemento no nulo de A tiene elemento inverso. En efecto, sea a_i elemento no nulo de A y consideremos los productos: $a_ia_1,\ a_ia_2,\ \ldots,\ a_ia_n$. Se verifica:

$$a_ia_j = a_ia_k \Leftrightarrow a_ia_j - a_ia_k = 0 \Leftrightarrow a_i(a_j - a_k) = 0.$$

Como $a_i \neq 0$ y A es dominio de integridad, $a_j - a_k = 0$, luego $a_j = a_k$. Esto implica que los productos mencionados son distintos dos a dos, o equivalentemente, $A = \{a_ia_1,\ a_ia_2,\ \ldots,\ a_ia_n\}$.
Uno de los anteriores elementos a_ia_l ha de ser igual a 1, o sea a_i es invertible. Concluimos que A es un cuerpo.

5.18. Característica de un cuerpo

1. Determinar las características de los cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}_p$ (p primo).
2. Demostrar que la característica de un cuerpo, o es infinito, o es un número primo.

Solución. 1. Recordemos que si $\mathbb{K}$ un cuerpo con elemento unidad e. Pueden ocurrir dos casos:
(a) Que exista un número natural $n > 0$ tal que:

$$ne = \underbrace{e + e + \cdots + e}_{n)} = 0$$

(b) Que no exista número natural $n > 0$ tal que:

$$ne = \underbrace{e + e + \cdots + e}_{n)} = 0$$

En el primer caso, se llama característica de $\mathbb{K}$ al menor número natural p tal que $pe = 0$. En el segundo caso, decimos que $\mathbb{K}$ tiene característica infinito (algunos autores dicen que tiene característica 0).

En $\mathbb{Q}$, no existe entero positivo n tal que $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n)} = 0$, por tanto la característica de $\mathbb{Q}$ es ∞. Análogo resultado para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
De la definición de suma en el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, deducimos de manera inmediata que su característica es p.

2. Supongamos que la característica de $\mathbb{K}$ es el número natural p. Si p fuera compuesto, $p = mn$ con $1 < m < p$ y $1 < n < p$ naturales. Como m y n son menores que p, se verificaría $me \neq 0$ y $ne \neq 0$. Como $\mathbb{K}$ es dominio de integridad, $(me)(ne) \neq 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}(me)(ne) &= (\underbrace{e + e + \cdots + e}_{m)})\,(\underbrace{e + e + \cdots + e}_{n)}) \\ &= \underbrace{e + e + \cdots + e}_{mn)} = (mn)e = pe.\end{aligned}$$

Sería $pe \neq 0$ en contradicción con la hipótesis de ser p la característica de $\mathbb{K}$.

5.19. Homomorfismos entre cuerpos

Sea $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ un homomorfismo de cuerpos. Demostrar que:
a) $f(0) = 0$ y $f(-a) = -f(a)$, $\forall a \in \mathbb{K}$.
b) $f(1) = 1$ y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, $\forall a \in \mathbb{K},\ a \neq 0$.
c) $\operatorname{Im} f$ es un subcuerpo de $\mathbb{L}$.
d) f es inyectivo.

Solución. Recordamos que si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ son dos cuerpos, una aplicación $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ se dice que es homomorfismo entre cuerpos, si y sólo si f es un homomorfismo entre los anillos $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ con imagen no trivial, es decir $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$.

a) Se deduce del hecho de ser f un homomorfismo entre los grupos aditivos de $\mathbb{K}$ y de $\mathbb{L}$.

b) Se deduce del hecho de ser f un homomorfismo entre los grupos multiplicativos de $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ y de $\mathbb{L}^* = \mathbb{L} - \{0\}$.

c) f es un homomorfismo entre los anillos $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$, por tanto $\operatorname{Im} f$ es un subanillo de $\mathbb{L}$, y al ser $\mathbb{L}$ anillo conmutativo, también lo es $\operatorname{Im} f$. Además $1 = f(1) \in \operatorname{Im} f$, luego $\operatorname{Im} f$ es también unitario.
Falta demostrar que para todo $b \in \operatorname{Im} f$ con $b \neq 0$, su inverso b^{-1} pertenece a $\operatorname{Im} f$. En efecto, si $b \in \operatorname{Im} f$ con $b \neq 0$, entonces $b = f(a)$ para algún $a \neq 0$ en $\mathbb{K}$ (si fuera $a = 0$, $f(a)$ sería 0). Por tanto, $b^{-1} = f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in \operatorname{Im} f$.

d) f es un homomorfismo entre los anillos $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$, por tanto $\ker f$ es un ideal de $\mathbb{K}$. Al ser $\mathbb{K}$ un cuerpo, sus únicos ideales son $\{0\}$ y $\mathbb{K}$. Si fuera $\ker f = \mathbb{K}$, entonces f sería el homomorfismo nulo, o sea $\operatorname{Im} f = \{0\}$, en contradicción con la definición de homomorfismo entre cuerpos. Ha de ser por tanto $\ker f = \{0\}$, lo cual implica que f es inyectivo.

5.20. Anillo según parámetro

En el conjunto de los números reales se definen las operaciones

$$x * y = x + y + 4 \quad , \quad x \circ y = xy + \lambda x + \lambda y + 12,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar λ para que $(\mathbb{R}, *, \circ)$ sea anillo.

(Propuesto en hojas de problemas, Álgebra, ETS de Arquitectura, UPM).

Solución. Veamos que $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano. La operación $*$ es claramente interna. Para x, y, z números reales cualesquiera se verifica

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y + 4) * z = x + y + 4 + z + 4 = x + y + z + 8,\\ x * (y * z) &= x * (y + z + 4) = x + y + z + 4 + 4 = x + y + z + 8.\end{aligned}$$

Es decir, la operación es asociativa. Para x, y números reales cualesquiera se verifica

$$x * y = x + y + 4 = y + x + 4 = y * x,$$

por tanto la operación es conmutativa. En consecuencia, el número real e es neutro para la operación $*$ si y sólo si $e * x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto equivale a $e+x+4 = x$, es decir $e = -4$ es elemento neutro para la operación $*$. Debido a la conmutatividad, un $x \in \mathbb{R}$ tiene elemento simétrico $x' \in \mathbb{R}$ si y sólo si $x * x' = e$ o bien si $x + x' + 4 = -4$. Existe por tanto x' para cada x siendo éste $x' = -8 - x$.
La operación $\circ$ claramente es interna. Veamos si es asociativa.

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (xy + \lambda x + \lambda y + 12) \circ z\\ &= xyz + \lambda xz + \lambda yz + 12z + \lambda xy + \lambda^2 x + \lambda^2 y + 12\lambda + \lambda z + 12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x \circ (yz + \lambda y + \lambda z + 12) \\ &= xyz + \lambda xy + \lambda xz + 12x + \lambda x + \lambda yz + \lambda^2 y + \lambda^2 z + 12\lambda + 12. \end{aligned}$$

Las dos funciones polinómicas anteriores solamente difieren en los coeficiente de x y de z. Igualando estos obtenemos $\lambda^2 = 12 + \lambda$ y $12 + \lambda = \lambda^2$. Es decir, la operación $\circ$ es asociativa si y sólo si $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ relación que se verifica para $\lambda = 4$ o $\lambda = -3$.
La operación $\circ$ es claramente conmutativa. Esto implica que esta operación es distributiva respecto de $*$ si y sólo si se verifica $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$. Tenemos

$$\begin{aligned} x \circ (y * z) &= x \circ (y + z + 4) \\ &= xy + xz + 4x + \lambda x + \lambda y + \lambda z + 4\lambda + 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \circ y) * (x \circ z) &= (xy + \lambda x + \lambda y + 12) * (xz + \lambda x + \lambda z + 12) \\ &= xy + \lambda x + \lambda y + 12 + xz + \lambda x + \lambda z + 12 + 4. \end{aligned}$$

Las dos funciones polinómicas anteriores solamente difieren en el coeficiente de x y en el término constante. Igualando estos obtenemos $4 + \lambda = 2\lambda$ y $4\lambda + 12 = 28$. Es decir, la operación $\circ$ es asociativa si y sólo si $\lambda = 4$. Concluimos que $(\mathbb{R}, *, \circ)$ es anillo si y sólo si $\lambda = 4$.

5.21. Anillo y grupo de matrices

Dada una matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes subconjuntos:
$\mathcal{M} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$
$\mathcal{N} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA \text{ y } A \text{ regular}\}$
Se pide:
1. Analizar si $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ es un anillo.
2. Analizar si $(\mathcal{N}, \cdot)$ es un grupo.
3. Si es $n = 2$ y $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, hallar $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Aeronáuticos, UPM).

Solución. 1. Sabemos que $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un anillo y además $\mathcal{M} \subset M_n(\mathbb{R})$. Veamos si $\mathcal{M}$ es subanillo de $M_n(\mathbb{R})$ con lo cual estará demostrado que es anillo. Usaremos la conocida caracterización de subanillos.
(a) Como $0M = M0$, se verifica $0 \in \mathcal{M}$ es decir, $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
(b) Sean $A, B \in \mathcal{M}$, entonces:

$$(A - B)M = AM - BM = MA - MB = M(A - B) \Rightarrow AB \in \mathcal{M}.$$

(c) Sean $A, B \in \mathcal{M}$, entonces:

$$(AB)M = A(BM) = A(MB) = (AM)B$$

$$= (MA)B = M(AB) \Rightarrow AB \in \mathcal{M}.$$

En consecuencia, $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ es un anillo.

2. Sabemos que el conjunto de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n y con determinante no nulo es grupo con la operación producto usual (grupo lineal). Como $\mathcal{N} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, para demostrar que $\mathcal{N}$ es grupo bastará demostrar que es un subgrupo del grupo lineal. Usaremos la conocida caracterización de subgrupos.
(a) Como $IM = MI = M$ siendo I regular, se verifica $I \in \mathcal{N}$ es decir, $\mathcal{N} \neq \emptyset$.
(b) Sean $A, B \in \mathcal{N}$. Entonces B es invertible y $BM = MB$, por tanto

$$BM = MB \Rightarrow M = B^{-1}MB \Rightarrow MB^{-1} = B^{-1}M.$$

Como $A \in \mathcal{N}$, A es invertible y $AM = MA$. Entonces

$$(AB^{-1})M = A(B^{-1}M) = A(MB^{-1})$$

$$= (AM)B^{-1} = (MA)B^{-1} = M(AB^{-1}).$$

Dado que A y B^{-1} son invertibles, también lo es el producto AB^{-1}. Hemos demostrado que $AB^{-1} \in \mathcal{N}$. Por tanto $\mathcal{N}$ es subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y como consecuencia es grupo.

3. Si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ e imponiendo $AM = MA$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ x - 2y - t = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos las soluciones $x = \lambda,\ y = 0,\ z = 0,\ t = \lambda\ \ (\lambda \in \mathbb{R})$ es decir $\mathcal{M} = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (matrices escalares). Las matrices de $\mathcal{N}$ son las de $\mathcal{M}$ que además son invertibles, es decir $\mathcal{M} = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

5.22. Máximo común divisor en los enteros de Gauss

Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones usuales de suma y producto de complejos. Se pide:

1. Demostrar que $\mathbb{Z}[i]$ es anillo conmutativo y unitario. (Se llama anillo de los enteros de Gauss).
2. Hallar todos los elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$
3. Se define para $z \in \mathbb{Z}[i]$ la aplicación $\varphi(z) = |z|^2$. Probar que $(\mathbb{Z}[i], \varphi)$ es un anillo euclídeo.
4. Hallar el máximo común divisor de $16+7i$ y $10-5i$ (Utilizar el algoritmo de Euclides).

Solución. 1. Como $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es anillo con las operaciones usuales $+$ y $\cdot$, bastará demostrar que $\mathbb{Z}[i]$ es subanillo de $\mathbb{C}$. Usamos el conocido teorema de caracterización de subanillos:

(i) $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$. Esto es evidente, pues por ejemplo $0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$.
(ii) Para cada par de elementos $a + bi$ y $c + di$ de $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Dado que a, b, c, d son enteros, también lo son $a - c$ y $b - d$ lo cual implica que la diferencia anterior pertenece a $\mathbb{Z}[i]$.
(iii) Para cada par de elementos $a + bi$ y $c + di$ de $\mathbb{Z}[i]$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Como a, b, c, d son enteros, también lo son $ac - bd$ y $ad + bc$ lo cual implica que el producto anterior pertenece a $\mathbb{Z}[i]$. Hemos demostrado pues que $\mathbb{Z}[i]$ es anillo con las operaciones usuales suma y producto de complejos. Dado que $\mathbb{C}$ es conmutativo, también lo es $\mathbb{Z}[i]$. Por otra parte $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$. Concluimos que $\mathbb{Z}[i]$ es anillo conmutativo y unitario.

2. Un elemento $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ no nulo es invertible si y sólo si existe un $a' + b'i \in \mathbb{Z}[i]$ no nulo tal que $(a+bi)(a'+b'i) = 1$. Tomando módulos al cuadrado, obtenemos $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 1$. Como los dos factores anteriores son enteros positivos, ha de ser necesariamente $a^2 + b^2 = 1$ o equivalentemente $a = \pm 1 \ \wedge \ b = 0$ o $a = 0 \ \wedge \ b = \pm 1$. Es decir, los únicos posibles elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$ son $1, -1, i, -i$. Pero estos elementos son efectivamente invertibles al cumplirse $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$, $i \cdot (-i) = 1$ y $(-i) \cdot i = 1$.

3. El anillo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es dominio de integridad, en consecuencia también lo es $\mathbb{Z}[i]$. Veamos que la aplicación $\varphi : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \to \mathbb{N}$, $\varphi(z) = |z|^2$ cumple las condiciones para que $(\mathbb{Z}[i], \varphi)$ sea anillo euclídeo.
(i) Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ tales que $z|w$, entonces, existe $z_1 \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ tal que $w = zz_1$. Por tanto

$$\varphi(z) = |z|^2 \leq |z|^2 |z_1|^2 = |w|^2 = \varphi(w) \Rightarrow \varphi(z) \leq \varphi(w).$$

(ii) Sean $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ con $y \neq 0$, entonces $x/y = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{Q}$. Si u y v son enteros, $y|x$ y estamos en el caso (i). Supongamos pues que u, v no son ambos enteros. Elijamos $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|m - u| \leq 1/2$ y $|n - v| \leq 1/2$ y llamemos $c = m + ni$ y $r = x - cy$. Entonces:

$$\begin{aligned} r &= y(u + iv) - y(m + ni) = y[(u - m) + (v - n)i] \\ \Rightarrow \varphi(r) &= |y|^2 \left[(u - m)^2 + (v - n)^2\right] \leq |y|^2 \left(1/4 + 1/4\right) \\ &= |y|^2 /2 < |y|^2 = \varphi(y). \end{aligned}$$

Es decir, dados $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ con $y \neq 0$ existen $c, r \in \mathbb{Z}[i]$ tales que $x = cy + r$ con $\varphi(r) < \varphi(y)$. Concluimos que $(\mathbb{Z}[i], \varphi)$ es un anillo euclídeo.

4. Efectuemos la división euclídea de $16 + 7i$ entre $10 - 5i$:

$$\frac{16 + 7i}{10 - 5i} = \frac{(16 + 7i)(10 + 5i)}{(10 - 5i)(10 + 5i)} = \frac{125 + 150i}{125} = 1 + \frac{6}{5}i.$$

Entonces, $c = m + ni = 1 + i$ y $r = 16 + 7i - (1 + i)(10 - 5i) = 1 + 2i$. Por tanto

$$\text{mcd } \{16 + 7i, 10 - 5i\} = \text{mcd } \{10 - 5i, 1 + 2i\}.$$

Efectuemos la división euclídea de $10 - 5i$ entre $1 + 2i$:

$$\frac{10 - 5i}{1 + 2i} = \frac{(10 - 5i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{20 - 25i}{5} = 4 - 5i.$$

El resto es $r = 0$ y por tanto:

$$\text{mcd } \{10 - 5i, 1 + 2i\} = \text{mcd } \{1 + 2i, 0\} = 1 + 2i.$$

Es decir, mcd $\{16 + 7i, 10 - 5i\} = 1 + 2i$. En forma de algoritmo de Euclides sería:

	$1+i$	$4-5i$	
$16+7i$	$10-5i$	$1+2i$	0
$1+2i$	0		

5.23. Dominio de integridad no euclídeo

Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + b\sqrt{5}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Probar que con las operaciones usuales suma y producto de números complejos, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es un dominio de integridad.
2. Hallar sus unidades.
3. Demostrar que 6 puede descomponerse en dos formas esencialmente distintas en producto de factores irreducibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Esto probará que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es un dominio de integridad no euclídeo.

(Propuesto, hojas de problemas, Álgebra, ETS de Ing. Agrónomos, UPM).

Solución. 1. Como $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \subset \mathbb{C}$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es anillo con las operaciones usuales $+$ y $\cdot$, bastará demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es subanillo de $\mathbb{C}$. Usamos el conocido teorema de caracterización de subanillos:
(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \neq \emptyset$. Esto es evidente, pues por ejemplo $0 + 0\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[i]$.
(ii) Para cada par de elementos $a + b\sqrt{5}i$ y $c + d\sqrt{5}i$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$:

$$(a + b\sqrt{5}i) - (c + d\sqrt{5}i) = (a - c) + (b - d)\sqrt{5}i.$$

Dado que a, b, c, d son enteros, también lo son $a - c$ y $b - d$ lo cual implica que la diferencia anterior pertenece a $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.
(iii) Para cada par de elementos $a + b\sqrt{5}i$ y $c + d\sqrt{5}i$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$:

$$(a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i) = (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}i.$$

Como a, b, c, d son enteros, también lo son $ac - 5bd$ y $ad + bc$ lo cual implica que el producto anterior pertenece a $\mathbb{Z}[i]$. Hemos demostrado pues que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es anillo con las operaciones usuales suma y producto de complejos. Dado que $\mathbb{C}$ es conmutativo, también lo es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Por otra parte $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Concluimos que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es anillo conmutativo y unitario. Como $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es dominio de integridad, también lo es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ y por tanto es dominio de integridad.

2. Un elemento $a + b\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no nulo es unidad si y sólo si existe un $a' + b'\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no nulo tal que $(a + b\sqrt{5}i)(a' + b'\sqrt{5}i) = 1$. Tomando módulos al cuadrado, obtenemos $(a^2 + 5b^2)(a'^2 + 5b'^2) = 1$. Como los dos factores anteriores son enteros positivos, ha de ser necesariamente $a^2 + 5b^2 = 1$ o equivalentemente $a = \pm 1 \ \wedge \ b = 0$. Es decir, las únicas posibles unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ son $1, -1$. Pero estos elementos son efectivamente unidades al cumplirse $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

3. Expresemos $6 = (a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i)$ como producto de dos factores no nulos. Esto equivale a

$$\begin{cases} ac - 5bd = 6 \\ bc + ad = 0. \end{cases}$$

Resolviendo en las incógnitas c, d obtenemos

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{6a}{a^2 + 5b^2}\ ,\ d = \frac{\begin{vmatrix} a & 6 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-6b}{a^2 + 5b^2}.$$

Dando los valores $a = 1, b = 1$ obtenemos $c = 1, d = -1$ y por tanto

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i). \quad (1)$$

Por otra parte tenemos la factorización

$$6 = 2 \cdot 3 = (2 + 0\sqrt{5}i)(3 + 0\sqrt{5}i). \quad (2)$$

Veamos que los elementos $1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i, 2, 3$ son irreducibles. En efecto, si $x + y\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ divide a $1 + \sqrt{5}i$, existe $u + v\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ tal que

$$1 + \sqrt{5}i = (x + y\sqrt{5}i)(u + v\sqrt{5}i).$$

Tomando módulos al cuadrado queda $6 = (x^2 + 5y^2)(u + 5v^2)$ lo cual implica que $x^2 + 5y^2$ ha de dividir a 6. Esto ocurre en los casos $x = \pm 1, y = 0$ o $x = \pm 1, y = \pm 1$ es decir, los posibles divisores de $1 + \sqrt{5}i$ son

$$\pm 1,\ \pm(1 + \sqrt{5}i),\ \pm(1 - \sqrt{5}i).$$

Los elementos ± 1 y $\pm(1+\sqrt{5}i)$ claramente dividen a $1+\sqrt{5}i$ pero los primeros son unidades y los segundos sus asociados. Por otra parte, $\pm(1 - \sqrt{5}i)$ no dividen a $1 + \sqrt{5}i$ pues

$$\frac{1 + \sqrt{5}i}{\pm(1 - \sqrt{5}i)} = \pm\frac{(1 + \sqrt{5}i)(1 + \sqrt{5}i)}{(1 - \sqrt{5}i)(1 + \sqrt{5}i)} = \pm\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i\right) \notin \mathbb{Z}[\sqrt{5}i].$$

Hemos demostrado que $1 + \sqrt{5}i$ es irreducible. De manera análoga podemos demostrar que $1 - \sqrt{5}i, 2, 3$ también lo son. Debido a las factorizaciones (1) y (2), concluimos que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no es dominio de factorización única, en consecuencia no es dominio euclídeo.

5.24. Binomio de Newton en un anillo

Sean a y b dos elementos permutables de un anillo A, es decir $ab = ba$. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se verifica la fórmula de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Solución. Usaremos el método de inducción.
Paso base. La fórmula es cierta para $n = 1$. En efecto,

$$(a + b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k.$$

Paso de inducción. Supongamos que la fórmula es cierta para n, y veamos que es cierta para $n+1$. Se verifica:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \qquad (*)\end{aligned}$$

(en la última igualdad hemos usado que $ab = ba$).
El primer sumando de la linea $(*)$ se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k &= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k.\end{aligned}$$

El segundo sumando de la linea $(*)$ se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1} \\ &\quad \text{(haciendo el cambio } k = j-1\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1}.\end{aligned}$$

Por tanto, $(a+b)^{n+1}$ es igual a:

$$\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1}.$$

Usando la conocida fórmula de combinatoria $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.\end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

5.25. Anillo de las funciones reales

Sea X un conjunto distinto del vacío y sea $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$. Se definen en $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ las operaciones

Suma. Para todo $f,g\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad \forall x\in X.$
Producto. Para todo $f,g\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),\quad (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\quad \forall x\in X.$

Demostrar que $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+,\cdot)$ es anillo conmutativo y unitario. A este anillo se le llama *anillo de las funciones reales.*

Solución. 1) $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+)$ es grupo abeliano.
Interna. Claramente, la suma de dos funciones de X en $\mathbb{R}$ es función de X en $\mathbb{R}$.
Asociativa. Para todo $f,g,h\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, para todo $x\in X$ y usando la propiedad asociativa de la suma de números reales:

$$[(f+g)+h](x)=[(f+g)(x)]+h(x)=[f(x)+g(x)]+h(x).$$
$$=f(x)+[g(x)+h(x)]=f(x)+[(g+h)(x)]=[f+(g+h)](x).$$

Por la definición de igualdad de funciones, $(f+g)+h=f+(g+h)$.
Elemento neutro. Consideremos la función $0:X\to\mathbb{R}$ definida por $0(x)=0$ para todo $x\in X$. Entonces, para cualquier $f\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R}):$

$$(f+0)(x)=f(x)+0(x)=f(x)+0=f(x)\Rightarrow f+0=f,$$
$$(0+f)(x)=0(x)+f(x)=0+f(x)=f(x)\Rightarrow 0+f=f,$$

por tanto la función 0 es elemento neutro.
Elemento simétrico. Para cada $f\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, definamos la función $-f$ de la siguiente manera: $(-f)(x)=-f(x),\ x\in X$. Entonces, para todo $x\in X:$

$$[f+(-f)](x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)+(-f(x))=0\Rightarrow f+(-f)=0,$$
$$[(-f)+f](x)=(-f)(x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0\Rightarrow(-f)+f=0,$$

es decir todo elemento de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ tiene simétrico.
Conmutativa. Para todo $f,g\in\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, para todo $x\in X$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de números reales:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)\Rightarrow f+g=g+f.$$

2) $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),\cdot)$ es semigrupo. Escribiremos abreviadamente fg en lugar de $f\cdot g$.
Interna. Claramente, el producto dos funciones de X en $\mathbb{R}$ es función de X en $\mathbb{R}$.

Asociativa. Para todo $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, para todo $x \in X$ y usando la propiedad asociativa del producto de números reales:

$$\begin{aligned}[(fg)h](x) &= [(fg)(x)]h(x) = [f(x)g(x)]h(x)\\ &= f(x)[g(x)h(x)] = f(x)[(gh)(x)] = [f(gh)](x),\end{aligned}$$

y por la definición de igualdad de funciones, $(fg)h = f(gh)$.
El semigrupo es además conmutativo pues por la propiedad conmutativa del producto de números reales:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x) \Rightarrow fg = gf.$$

3) Veamos que la operación $\cdot$ es distributiva respecto de la operación $+$. Dado que $\cdot$ es conmutativa, bastará demostrar que para todo $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ se verifica $f(g+h) = fg + fh$. En efecto, usando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en $\mathbb{R}$, para todo $x \in X$:

$$\begin{aligned}&[f(g+h)](x) = f(x)[(g+h)(x)] = f(x)[g(x)+h(x)] =\\ &f(x)g(x) + f(x)h(x) = (fg)(x) + (fg)(x) = [fg + fh](x),\end{aligned}$$

y por la definición de igualdad de funciones, $f(g+h) = fg + fh$.
Hemos demostrado que $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es anillo conmutativo. Es además unitario, pues definiendo $1 : X \to \mathbb{R}$, mediante $1(x) = x$, $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned}(f1)(x) &= f(x)1(x) = f(x)1 = f(x) \Rightarrow f1 = f,\\ (1f)(x) &= 1(x)f(x) = 1f(x) = f(x) \Rightarrow 1f = f,\end{aligned}$$

es decir, la función 1 es elemento neutro del $\cdot$ en $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

5.26. Anillo idempotente

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo idempotente, es decir un anillo que satisface $x^2 = x$ para todo $x \in A$.
1. Demostrar que el anillo es conmutativo.
2. Estudiar la ley interna sobre A definida por $x * y = x + y + xy$.
3. Demostrar que $x \leq y \Leftrightarrow xy = x$ es una relación de orden sobre A.
4. ¿Existe elemento mínimo en $(A, \leq)$?

Solución. 1. Como el anillo es idempotente, se verifica $(x+y)^2 = x + y \ \ \forall x \forall y \in A$. Entonces:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$$

$$\Rightarrow x + y = x + xy + yx + y \Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow xy = -yx.$$

Para todo $u \in A$ y haciendo $x = y = u$, la última igualdad se transforma en $u^2 = -u^2$ o de forma equivalente, $u = -u$, lo cual implica que $xy = yx$ para todo x, y elementos de A. Concluimos que el anillo es conmutativo.

2. Para todo x, y, z elementos de A :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz, \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz.\end{aligned}$$

Es decir, la operación $*$ es asociativa. Para todo x, y elementos de A y teniendo en cuenta que el anillo es conmutativo:

$$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x,$$

lo cual implica que la operación $*$ es conmutativa. Para todo $x \in A$:

$$x * 0 = 0 * x = x + 0 + 0x = x.$$

Es decir, 0 es elemento neutro de $*$. Sea ahora $x \in A$ y supongamos que tiene elemento simétrico x' con respecto de la operación $*$. Esto implica que $x * x' = x' * x = 0$ o equivalentemente $x * x' = 0$ por la propiedad conmutativa. Entonces, usando que $u = -u$:

$$\begin{aligned}&x * x' = 0 \Rightarrow x + x' + xx' = 0 \Rightarrow x(x + x' + xx') = x0 \\ &\Rightarrow x^2 + xx' + x^2 x' = 0 \Rightarrow x + xx' + xx' = 0 \Rightarrow x = 0.\end{aligned}$$

Es decir, el único elemento que tiene simétrico, respecto de la operación $*$ es su neutro. Concluimos que $(A, *)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

3. Para todo $x \in A$ se verifica $xx = x^2 = x$, y por tanto $x \leq x$, es decir se cumple la propiedad reflexiva. Usando que el anillo es conmutativo:

$$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = x \\ yx = y \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Se cumple por tanto la propiedad antisimétrica. Por otra parte

$$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = x \\ yz = y \end{cases} \Rightarrow xyz = x \Rightarrow xz = z \Rightarrow x \leq z,$$

es decir, se cumple la propiedad transitiva. Concluimos que $\leq$ es relación de orden sobre A.

4. Para todo $x \in A$ se verifica $0x = 0$ o de forma equivalente $0 \leq x$ para todo $x \in A$. Por tanto 0 es elemento mínimo en $(A, \leq)$.

5.27. Intersección de subcuerpos

Se llama *subcuerpo* de un cuerpo K a cualquier subconjunto H de K que también es un cuerpo con respecto a la adición y multiplicación de K. Demostrar que cualquier intersección de subcuerpos de un cuerpo K es subcuerpo de K.

Solución. Sea $\{K_i\}$ una familia de subcuerpos de K y $H = \bigcap_i K_i$. Se verifica $0 \in K_i$ para todo i, luego $0 \in H \neq \emptyset$. Si $x, y \in H$, entonces $x \in K_i$, $y \in K_i$ para todo i y por ser K_i subgrupo aditivo de K para todo i, también $x - y \in K_i$ para todo i, en consecuencia $x - y \in H$. Por tanto H es subgrupo aditivo de K (además conmutativo por serlo K).

Veamos ahora que $H^* = H - \{0\}$ es subgrupo multiplicativo de $K^* = K - \{0\}$. Se verifica $1 \in K_i$ para todo i, luego $1 \in H^* \neq \emptyset$. Si $x, y \in H^*$, entonces $x, y \in K_i - \{0\}$, para todo i y por ser $K_i - \{0\}$ subgrupo multiplicativo de K^* para todo i, también $xy^{-1} \in K_i$ para todo i, en consecuencia $xy^{-1} \in H^*$. Por tanto H^* es subgrupo aditivo de K^* (además conmutativo por serlo K^*).

5.28. Cuerpo infinito con característica finita

Construir un cuerpo infinito con característica finita.

Solución. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y sea $\mathbb{K}[[X]]$ el conjunto de las series formales

$$\mathbb{K}[[X]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n : a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Sabemos que $\mathbb{K}[[X]]$ es un dominio de integridad con las operaciones

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n,$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \text{ con } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Sea ahora p un número primo y llamemos $\mathcal{F}$ al cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathbb{Z}_p[[X]]$. Dado que $1 \in \mathbb{Z}_p \subset \mathcal{F}$ es el elemento neutro para la operación $\cdot$, se verifica que $m = p$ es el menor entero positivo que satisface $m1 = 0$, en consecuencia la característica de $\mathcal{F}$ es p. Claramente el conjunto $\mathbb{Z}_p[[X]]$ es infinito, por tanto lo es su cuerpo de fracciones, dado que $\mathbb{Z}_p[[X]] \subset \mathcal{F}$.

5.29. Cuerpo conmutativo con función sobre $\mathbb{R}^+$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo y f una aplicación de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{R}^+$ (números reales no negativos) tal que $\forall x, y \in \mathbb{K}$ se verifica
(a) $f(x+y) \leq \sup\{f(x), f(y)\}$
(b) $f(xy) = f(x)f(y)$
(c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1. Sea u el elemento unidad de $\mathbb{K}$ respecto del producto. Demostrar que $f(u) = 1$.
2. Sea $A = f^{-1}([0,1])$, demostrar que si $x, y \in A$ entonces $x + y \in A$.
3. Sea $x \in A$, demostrar que $-x \in A$ ($-x$ es el elemento simétrico de x en $\mathbb{K}$ respecto de la suma). 4. Estudiar la estructura algebraica más completa de $(A, +, \cdot)$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Elijamos $x = y = u$. Entonces, aplicando (b) :

$$f(uu) = f(u)f(u) \Leftrightarrow f(u) = f^2(u)$$

$$\Leftrightarrow f(u)(1 - f(u)) = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \ \vee \ f(u) = 1.$$

Ahora bien, como $u \neq 0$, usando (c) deducimos que $f(u) = 1$.

2. Si $x, y \in A$ entonces $f(x) \in [0,1]$ y $f(y) \in [0,1]$. Por la propia definición de f se verifica $f(x+y) \geq 0$ y de (a) deducimos $f(x+y) \leq \sup\{f(x), f(y)\} \leq 1$, es decir $0 \leq f(x+y) \leq 1$. En consecuencia $x + y \in f^{-1}([0,1]) = A$.

3. Tenemos $1 = f(u) = f[(-u)(-u)] = [f(-u)]^2 \Rightarrow f(-u) = 1$. Supongamos que $x \in A$, es decir $f(x) \in [0,1]$. Entonces

$$f(-x) = f[(-u)x] = f(-u)f(x) = 1f(x) = f(x) \in [0,1] \Rightarrow -x \in A.$$

4. Veamos que A es subanillo de $\mathbb{K}$.
(i) De $f(0) = 0 \in [0,1]$ se deduce que $0 \in A$, es decir $A \neq \emptyset$.
(ii) Sean $x, y \in A$, usando los apartados 2. y 3. deducimos de forma inmediata que $x - y \in A$.
(iii) Sean $x, y \in A$, entonces $f(x)$ y $f(y)$ pertenecen al intervalo $[0,1]$, por tanto $f(xy) = f(x)f(y) \in [0,1]$, es decir $xy \in A$.
Dado que el producto es conmutativo en $\mathbb{K}$ también lo es en A. Como $f(u) = 1 \in [0,1]$ tenemos $u \in A$ y por tanto A es anillo conmutativo y unitario. Dado que en $\mathbb{K}$ no hay divisores de cero, tampoco los hay en A. Concluimos

que A es un dominio de integridad. Sin embargo, no es cuerpo. En efecto, si $0 \neq x \in A$ entonces $f(x) \in (0,1]$ y

$$1 = f(u) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) \Rightarrow f(x^{-1}) = \frac{1}{f(x)} > 1 \Rightarrow x^{-1} \notin A.$$

5.30. Cuaternios de Hamilton

Sea $\mathcal{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \left\{A = (a, \vec{\alpha}) : a \in \mathbb{R}, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3\right\}$. A cada elemento A de $\mathcal{H}$ se le llama *cuaternio* (o *cuaternión*). En el conjunto $\mathcal{H}$ se define la igualdad de dos elementos $A = (a, \vec{\alpha})$ y $B = (b, \vec{\beta})$ mediante:

$$A = B \Leftrightarrow a = b \text{ y } \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

Definimos la suma $A + B$ y el producto AB mediante:

$$A + B = (a + b, \vec{\alpha} + \vec{\beta}) \ , \quad AB = (ab - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, a\vec{\beta} + b\vec{\alpha} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta})$$

en donde $\cdot$ representa el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y $\wedge$ el producto vectorial.
1. Demostrar que $(\mathcal{H}, +)$ es un grupo abeliano. Precisar el elemento neutro E y el opuesto de A.
2. Demostrar que la multiplicación es distributiva respecto de la suma.
3. Demostrar que $\mathcal{H} - \{E\}$ es un grupo con la operación producto de cuaternios. Precisar el elemento unidad U . Demostrar que el inverso A^{-1} de $A = (a, \vec{\alpha})$ es:

$$A^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}}, \frac{-\vec{\alpha}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}}\right)$$

4. A la vista de los resultados anteriores, ¿qué estructura tiene $\mathcal{H}$?

Solución. 1. (a) Interna. Es claro que si $A, B \in \mathcal{H}$ entonces $A + B \in \mathcal{H}$.
(b) Asociativa. Se deduce de manera sencilla a partir de la asociatividad de la suma en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^3$.
(c) Elemento neutro. Claramente el cuaternio $E = (0, \vec{0})$ cumple $A + E = E + A = A$ para todo $A \in \mathcal{H}$.
(d) Elemento opuesto. Dado $A = (a, \vec{\alpha}) \in \mathcal{H}$, $-A = (-a, -\vec{\alpha}) \in \mathcal{H}$ cumple $A + (-A) = (-A) + A = E$.
(e) Conmutativa. Se deduce de manera sencilla a partir de la conmutatividad de la suma $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^3$.

2. Consideremos los elementos de $\mathcal{H} : A = (a, \vec{\alpha}), B = (b, \vec{\beta}), A = (c, \vec{\gamma})$. Usando conocidas propiedades del producto escalar y vectorial:

$$A(B + C) = (a, \vec{\alpha})(b + c, \vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

$$= (ab + ac - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}, a\vec{\beta} + a\vec{\gamma} + b\vec{\alpha} + c\vec{\alpha} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})$$
$$= (ab - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, a\vec{\beta} + b\vec{\alpha} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) + (ac - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}, a\vec{\gamma} + c\vec{\alpha} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})$$
$$= AB + AC$$

De manera análoga se demuestra $(X + Y)Z = XZ + YZ$ para toda terna de cuaterniones X, Y, Z.

3. (a) Interna. Es claro que si $A, B \in \mathcal{H}$ entonces $AB \in \mathcal{H}$.
(b) Asociativa. Basta desarrollar por separado $(AB)C$, $A(BC)$ y usar $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.
(c) Elemento unidad. Para que $U = (x, \vec{\delta})$ sea elemento unidad, es necesario y suficiente para todo $A \in \mathcal{H} - \{E\}$ se verifique $AU = UA = A$. Es decir:

$$(ax - \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}, a\vec{\delta} + x\bar{\alpha} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\delta}) = (xa - \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha}, x\vec{\alpha} + a\bar{\vec{\delta}} + \vec{\delta} \wedge \vec{\alpha})$$

Es claro que la igualdad se cumple para $U = (1, \vec{0})$.
(d) Elemento inverso. Sea $A = (a, \vec{\alpha}) \in \mathcal{H} - \{E\}$, veamos que efectivamente el cuaternio $A^{-1} = \big(a/(a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}), -\vec{\alpha}/(a^2 + \vec{\alpha}^{\,2})\big)$ pertenece a $\mathcal{H} - \{E\}$ y cumple además $AA^{-1} = A^{-1}A = U$.
Como $(a, \vec{\alpha}) \neq (0, 0)$, $a^2 + \vec{\alpha}^{\,2} \neq 0$ es decir A^{-1} está bien definido. Por otra parte, si $a = 0$ entonces $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ y $-\vec{\alpha}/(a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}) \neq \vec{0}$. Esto prueba que $A^{-1} \in \mathcal{H} - \{E\}$.

$$AA^{-1} = (a, \vec{\alpha}) \left(\frac{a}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}}, \frac{-\vec{\alpha}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}} + \frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}}, \frac{-a\vec{\alpha}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}} + \frac{a\vec{\alpha}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}} + \vec{\alpha} \wedge \left(\frac{-\vec{\alpha}}{a^2 + \vec{\alpha}^{\,2}} \right) \right) = (1, 0)$$

De manera análoga se demuestra que $A^{-1}A = U$.

4. De los resultados anteriores concluimos que $\mathcal{H}$ es un cuerpo. Este cuerpo no es conmutativo pues por ejemplo, $(0, \vec{\alpha})(0, \vec{\beta}) = (0, \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta})$, $(0, \vec{\beta})(0, \vec{\alpha}) = (0, \vec{\beta} \wedge \vec{\alpha})$ y $\vec{\beta} \wedge \vec{\alpha} = -\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}$.

Capítulo 6

Sistemas lineales sobre un cuerpo

6.1. Sistemas lineales escalonados

1. Resolver sobre $\mathbb{R}$ el sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ & & 2\,x_2 & + & 5\,x_3 & = & -15 \\ & & & & 4\,x_3 & = & -12 \end{array}\right.$$

2. Resolver sobre $\mathbb{R}$ el sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 7 \\ & & -\,y & + & 3\,z & = & 2 \end{array}\right.$$

3. Resolver sobre $\mathbb{R}$ el sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 3\,y & = & 2/3 \\ & & 0\,y & = & -1 \end{array}\right.$$

4. Resolver sobre $\mathbb{C}$ el sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2i\,x_1 & + & (1+i)\,x_2 & = & 2/3 \\ & & 2\,x_2 & = & 1-i \end{array}\right.$$

5. Resolver sobre $\mathbb{Z}_5$ los sistemas escalonados

$$a)\;\left\{\begin{array}{r} 3x+2y=4 \\ 3y=1 \end{array}\right. \quad b)\;\left\{\begin{array}{r} x+4y=1 \\ 0y=2 \end{array}\right. \quad c)\;\left\{3x+2y=4\right.$$

Solución. 1. Usando sustitución regresiva,

$$\begin{aligned} &x_3 = -12/4 = -3, \\ &2x_2 = -15 + 15 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \\ &3x_1 = 9 - 0 - 3 = 6 \Rightarrow x_1 = 2. \end{aligned}$$

La única solución del sistema es $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -3)$ (compatible determinado).

2. El sistema se puede escribir en forma equivalente como

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2\,y & = & 7 & + & 2\,z \\ & & -\,y & = & 2 & - & 3\,z \end{array} \right.$$

Dando a z el valor $z = \alpha \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$\begin{aligned} &y = -2 + 3\alpha, \\ &x = 7 + 2\alpha - 2(-2 + 3\alpha) = 11 - 4\alpha. \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son por tanto

$$\begin{cases} x = 11 - 4\alpha \\ y = -2 + 3\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \\ z = \alpha \end{cases}$$

El sistema es compatible e indeterminado.

3. No existe número real y que multiplicado por 0 sea igual a -1, por tanto el sistema es incompatible.

4. Usando sustitución regresiva,

$$\begin{aligned} &x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \\ &2i\,x_2 = \frac{2}{3} - (1 + i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{3} \\ &\quad \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{6i} = \frac{1}{6}i. \end{aligned}$$

La única solución del sistema es $(x_1, x_2) = (i/6,\ 1/2 - 1/2i)$ (compatible determinado).

5. *a*) $y = 1 \cdot 3^{-1} = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow 3x = 4 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La única solución del sistema es $(x, y) = (0, 2)$ (compatible determinado).

b) No existe elemento $y \in \mathbb{Z}_5$ que multiplicado por 0 sea igual a 2, por tanto el sistema es incompatible.
c) Multiplicando ambos miembros por 2 obtenemos

$$\left\{3x + 2y = 4 \Leftrightarrow \left\{x + 4y = 3 \Leftrightarrow \left\{x = 3 - 4y.\right.\right.\right.$$

Dando a y todos los valores de $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&y = 0 \Rightarrow x = 3 - 4 \cdot 0 = 3 - 0 = 3,\\
&y = 1 \Rightarrow x = 3 - 4 \cdot 1 = 3 - 4 = 3 + 1 = 4,\\
&y = 2 \Rightarrow x = 3 - 4 \cdot 2 = 3 - 3 = 0,\\
&y = 3 \Rightarrow x = 3 - 4 \cdot 3 = 3 - 2 = 1,\\
&y = 4 \Rightarrow x = 3 - 4 \cdot 4 = 3 - 1 = 2.
\end{aligned}$$

Las soluciones (x, y) del sistema son por tanto

$$(3, 0),\ (4, 1),\ (0, 2)\ (1, 3),\ (2, 4) \quad \text{(compatible indeterminado).}$$

6.2. Reducción gaussiana

1. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema lineal

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

2. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

4. Resolver en $\mathbb{Z}_7$ el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \\ 5x + 5y = 1. \end{cases}$$

Solución. 1. Aplicando la reducción gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 - F_1 \\ F_4 + 3F_1 \\ F_5 - F_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 - F_2 \\ F_4 - 2F_2 \\ F_5 - 2F_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$F_4 + F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El sistema dado es equivalente al escalonado

$$\begin{cases} x \quad\quad + z &= \ 1 \\ \quad\quad y + z &= \ 1 \\ \quad\quad\quad -2z &= -1 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} z &= 1/2, \\ y &= 1 - 1/2 = 1/2, \\ z &= 1 - 1/2 = 1/2. \end{aligned}$$

La única solución del sistema es $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$ (compatible determinado).

2. Aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \\ F_4 + F_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] F_4 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 3 \end{array}\right]$$

$$5F_4 - 13F_3 \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right].$$

El sistema dado es equivalente al escalonado

$$\begin{cases} x_1 & & +2\,x_3 & = & 1 \\ & -2\,x_2 & +10\,x_3 & = & 2 \\ & & 5\,x_3 & = & -1 \\ & & 0\,x_3 & = & 18. \end{cases}$$

No existe número real x_3 que multiplicado por 0 sea igual a 18, por tanto el sistema es incompatible.

3. Aplicando la reducción gaussiana:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -7 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right] F_3 - F_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El sistema dado es equivalente al escalonado

$$\begin{cases} -x_1 & +2\,x_2 & +\,x_3 & +2\,x_4 & = & 2 \\ & x_2 & +4\,x_3 & +\,5x_4 & = & 5. \end{cases}$$

Llamando $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 - 4\alpha - 5\beta, \\ x_1 &= -2 + 2(5 - 4\alpha - 5\beta) + \alpha + 2\beta \\ &= 8 - 7\alpha - 8\beta. \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 7\alpha - 8\beta \\ x_2 = 5 - 4\alpha - 5\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

El sistema es compatible e indeterminado.

4. Usando las conocidas operaciones de $\mathbb{Z}_7$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{array}\right] 5F_3 - 3F_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El sistema dado es equivalente al sistema escalonado

$$\begin{cases} x + \ 6y = 2 \\ \qquad 5y = 6. \end{cases}$$

Tenemos

$$5y = 6 \Leftrightarrow y = 5^{-1} \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 4,$$
$$x = 2 - 6 \cdot 4 = 2 - 3 = 2 + 4 = 6.$$

La única solución del sistema es $(x, y) = (6, 4)$ (compatible determinado).

6.3. Sistemas lineales según parámetros

1. Discutir y resolver en $\mathbb{R}$ según los valores del parámetro real a el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a. \end{cases}$$

2. Discutir en $\mathbb{R}$ según los valores de los parámetro reales c y d el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + cz = 0 \\ x + cy + z = 0 \\ x + y + cz = d. \end{cases}$$

3. Discutir y resolver en $\mathbb{Z}_{11}$ según los parámetros $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ el sistema lineal

$$\begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x + ay = b. \end{cases}$$

4. Discutir en $\mathbb{R}$ según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \lambda^3. \end{cases}$$

Solución. 1. Aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right] F_1 \leftrightarrow F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - aF_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & \boxed{a-1} & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right] F_3 + F_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right] \equiv$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +a\,z & = & a & \\ & (a-1)\,y & +(1-a)\,z & = & 0 & \quad (1) \\ & & (2-a-a^2)\,z & = & 1-a^2. & \end{array}\right.$$

Primer caso: $2-a-a^2=0$. Resolviendo la ecuación obtenemos $a=-2$ o $a=1$. Para $a=-2$, la última ecuación de (1) es $0z=-3$, por tanto el sistema es incompatible. Para $a=1$, el sistema (1) se transforma en $x+y+z=1$. Dando los valores $y=\lambda$, $z=\mu$ obtenemos las soluciones

$$(x,y,z)=(1-\lambda-\mu,\lambda,\mu), \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R}),$$

y el sistema es por tanto indeterminado.
Segundo caso: $2-a-a^2\neq 0$, o equivalentemente $a\neq 1$ y $a\neq -2$. Tenemos,

$$\begin{aligned} z &= \frac{a^2-1}{a^2+a-2} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}, \\ y &= z = \frac{a+1}{a+2}, \\ x &= a - \frac{a+1}{a+2} - \frac{a(a+1)}{a+2} = \frac{a^2+2a-a-1-a^2-a}{a+2} = -\frac{1}{a+2}, \end{aligned}$$

y el sistema es por tanto compatible y determinado.

2. Aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & c & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & d \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - cF_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & \boxed{c-1} & 1-c & 0 \\ 0 & 1-c & c-c^2 & d \end{array}\right]$$

$$F_3 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-1 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^2 & d \end{array}\right] \equiv$$

$$\begin{cases} x & +y & +c\,z & = & 0 \\ & (c-1)\,y & +(1-c)\,z & = & 0 \\ & & (1-c^2)\,z & = & d. \end{cases} \quad (1)$$

Primer caso: $1-c^2=0$. Equivalentemente $c=\pm 1$ Para $c=-1$, el sistema (1) es

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 0 \\ & -2\,y & -2\,z & = & 0 \\ & & 0\,z & = & d. \end{cases}$$

Si $d \neq 0$ la última ecuación nos dice que el sistema es incompatible, y si $d=0$ el sistema (1) es

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 0 \\ & -2\,y & -2\,z & = & 0. \end{cases}$$

Dando a z el valor $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenemos infinitas soluciones, luego el sistema es indeterminado. Para $c=1$ el sistema (1) es

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ & & 0\,z & = & d. \end{cases}$$

Si $d \neq 0$ la última ecuación nos dice que el sistema es incompatible, y si $d=0$ el sistema (1) es

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0. \end{cases}$$

Dando a z el valor $\lambda \in \mathbb{R}$ y a y el valor $\mu \in \mathbb{R}$ obtenemos infinitas soluciones, luego el sistema es indeterminado.

Segundo caso: $1-c^2 \neq 0$, o equivalentemente $c \neq -1$ y $c \neq 1$. Tenemos,

$$\begin{aligned} &z = \frac{d}{1-c^2} \quad \text{(única para cada } c\text{)}, \\ &y = z \quad \text{(única para cada } c\text{)}, \\ &x = -y - cz \quad \text{(única para cada } c\text{)}, \end{aligned}$$

y el sistema es por tanto compatible y determinado. Podemos concluir:

$$\begin{aligned} &c \neq -1 \wedge c \neq 1, \ \text{compatible y determinado} \\ &c = -1 \begin{cases} d \neq 0 & \text{incompatible} \\ d = 0 & \text{compatible e indeterminado} \end{cases} \\ &c = 1 \begin{cases} d \neq 0 & \text{incompatible} \\ d = 0 & \text{compatible e indeterminado.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Usando las conocidas operaciones de $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{7} & 3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right] 7F_2 - 2F_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 7a-6 & 7b-2 \end{array}\right]$$

$$\equiv \begin{cases} 7x \quad + 3y = 1 \\ \quad (7a-6)y = 7b-2. \end{cases} \qquad (1)$$

Primer caso: $7a - 6 = 0$. Equivalentemente, $7a = 6$, es decir $a = 4$. El sistema (1) se transforma en

$$\begin{cases} 7x \quad + 3y = 1 \\ \quad 0y = 7b-2. \end{cases}$$

La relación $7b-2=0$ se satisface exclusivamente para $b=5$. Para $b \neq 5$, la última ecuación es $0y = \underbrace{b-2}_{\neq 0}$ y el sistema es por tanto incompatible. Para $b=5$ el sistema (1) se transforma en $7x+3y=1$, y multiplicando ambas ecuaciones por 8, en $x+2y=8$, o equivalentemente en $x = 8+9y$. Dando a y todos los valores $y = 0,1,\ldots 10$ de $\mathbb{Z}_{11}$ obtenemos

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x = 8+9y$	8	6	4	2	0	9	7	5	3	1	10

y el sistema es compatible e indeterminado.

Segundo caso: $7a-6 \neq 0$. Equivalentemente, $a \neq 4$. En este caso, $7a-6$ tiene inverso en $\mathbb{Z}_{11}$. Entonces,

$$\begin{aligned} &y = (7b-2)(7a-6)^{-1}, \\ &x = 7^{-1}(1-3y) = 8\left(1-3(7b-2)(7a-6)^{-1}\right). \end{aligned}$$

y el sistema es compatible y determinado. Podemos concluir:

$$\begin{aligned} &a \neq 4, \text{ compatible y determinado} \\ &a = 4 \begin{cases} b \neq 5 & \text{incompatible} \\ b = 5 & \text{compatible e indeterminado.} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Reordenando las ecuaciones,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - \lambda F_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda^2-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^3 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^4 \end{array}\right] F_3 \leftrightarrow F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \\ 0 & \boxed{\lambda - 1} & 0 & 1-\lambda & \lambda - \lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda^2 - \lambda^3 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^4 \end{array}\right] F_4 + F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1-\lambda & \lambda - \lambda^3 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda - 1} & 1 - \lambda & \lambda^2 - \lambda^3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^3-\lambda^4 \end{array}\right] F_4 + F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1-\lambda & \lambda - \lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda^2 - \lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda+\lambda^2-2\lambda^3-\lambda^4 \end{array}\right].$$

Primer caso: $3 - 2\lambda - \lambda^2 = 0$. Equivalentemente, $\lambda = 1$ o $\lambda = -3$. Para $\lambda = 1$ el sistema dado es equivalente a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, y por tanto compatible e indeterminado. Para $\lambda = -3$, la última ecuación del sistema escalonado es $0x_4 = -20$, luego el sistema es incompatible.

Segundo caso: $3 - 2\lambda - \lambda^2 \neq 0$. Equivalentemente, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3$. En este caso, al ser también $\lambda - 1 \neq 0$ y usando sustitución regresiva deducimos inmediatamente que cada x_i es única para cada λ. Podemos concluir:

$$\begin{aligned} &\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -3, \text{ compatible y determinado} \\ &\lambda = 1, \text{ compatible e indeterminado} \\ &\lambda = -3, \text{ incompatible.} \end{aligned}$$

6.4. Aplicaciones de los sistemas lineales

1. Disponemos de tres montones de monedas y duplicamos las monedas del segundo montón tomando las necesarias del primer montón. Duplicamos después las monedas del tercer montón a costa del segundo montón. Por último, duplicamos las monedas del primer montón tomando las necesarias del tercer montón. Al final, el número de monedas en los tres montones es el mimo.
a) ¿Cuál es el mínimo número de monedas que permite hacer esto y como están distribuidas inicialmente?
b) ¿Puede hacerse con 6^{100} monedas?

2. ¿De cuantas maneras pueden comprarse 20 sellos de 5, 25, y 40 u.m. (unidades monetarias) cada uno por un importe total de 500 u.m. de forma que

adquiramos al menos uno de cada clase?

3. La tabla siguiente muestra cuatro productos P_1, P_2, P_3 y P_4 junto con el número de unidades/gramo de vitaminas A, B y C que poseen por unidad de peso. ¿Se puede elaborar una dieta que que contenga 10 unidades de viamina A, 20 de B y 5 de C?

	A	B	C
P_1	1	2	0
P_2	1	0	2
P_3	2	1	0
P_4	1	1	1

Solución. 1. *a*) La situación al inicio y según los trasvases es:

$$\begin{array}{cccc} \text{Inicio} & x & y & z \\ \text{Primer trasvase} & x-y & 2y & z \\ \text{Segundo trasvase} & x-y & 2y-z & 2z \\ \text{Tercer trasvase} & 2(x-y) & 2y-z & 2z-(x-y). \end{array}$$

La situación final es $2(x-y) = 2y-z = 2z-(x-y)$. Llamando N al número total de monedas:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=N \\ 2(x-y)=2y-z \\ (2x-y)=2z-(x-y) \end{matrix}\right. \quad \text{o bien,} \quad \left\{\begin{matrix} x+y+z=N \\ 2x-4y+z=0 \\ 3x-3y-2z=0. \end{matrix}\right.$$

Escalonemos el sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & N \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & N \\ 0 & \boxed{-6} & -1 & -2N \\ 0 & -6 & -5 & -3N \end{array}\right]$$

$$F_3-F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & N \\ 0 & -6 & -1 & -2N \\ 0 & 0 & -4 & -N \end{array}\right]$$

El sistema es equivalente al escalonado

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & N \\ & -6\,y & -z & = & -2N \\ & & -4\,z & = & -N. \end{array}\right.$$

Resolviendo obtenemos

$$z=\frac{N}{4}, \quad y=\frac{7N}{24}, \quad x=\frac{11N}{24}.$$

Como x, y, z ha de der enteros positivos, tiene que ser múltiplos de 24, por tanto el menor número de monedas ha de ser $N = 24$, en cuyo caso $x = 11$, $y = 7$, $z = 6$.

$b)$ Se verifica

$$6^{100} = (2 \cdot 3)^{100} = 2^{100} \cdot 3^{100} = (2^3 \cdot 3) \cdot 2^{97} \cdot 3^{99} = 24 \cdot (2^{97} \cdot 3^{99}),$$

luego $N = 6^{100}$ es múltiplo de 24 y la situación del problema es posible.

2. Llamando x, y, z al número de sellos que vamos a comprar de 5, 25, y 40 u.m. respectivamente,

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 5x + 25y + 40z = 500. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 5 & 25 & 40 & 500 \end{array}\right] \tfrac{1}{5}F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 8 & 100 \end{array}\right] F_2 - F_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 4 & 7 & 80 \end{array}\right] \equiv \begin{cases} x \ + y \ + z = 20 \\ \quad 4y + 7z = 80. \end{cases}$$

Para $z = \lambda$ obtenemos

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}\lambda \\ y = 20 - \dfrac{7}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Como las soluciones han de ser enteros positivos, los valores de λ han de ser enteros positivos y múltiplos de 4. Si $\lambda = 4$ obtenemos $(x, y, z) = (3, 13, 4)$. Si $\lambda = 8$ obtenemos $(x, y, z) = (6, 6, 8)$. Para $\lambda \geq 12$ los valores de y son negativos, por tanto las únicas soluciones al problema son:

$$(x, y, z) = (3, 13, 4), \quad (x, y, z) = (6, 6, 8)$$

3. Llamemos x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a la cantidad de producto P_i que vamos a utilizar para elaborar la dieta. De los datos de la tabla,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] F_2 - 2F_1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & \boxed{-2} & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] F_3 + F_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

De la última ecuación se deduce que $x_3 = -5/3$ lo cual es absurdo pues las cantidades x_i han de ser todas no negativas. Concluimos que no se puede elaborar la dieta.

Capítulo 7

Matrices sobre un cuerpo

7.1. Concepto de matriz, suma de matrices

1. Escribir una matriz genérica A de orden 2×3, otra genérica B de orden 4×3, y otra genérica C de orden 1×1.
2. Para una matriz genérica A cuadrada de orden 3, identificar los elementos de la diagonal principal y los de la diagonal secundaria.
3. Determinar para que valores de x e y son iguales las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & x - 4y \\ x - y + 4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ x + y & 1/2 \end{bmatrix}.$$

4. Hallar $M + N$ y $M - N$, siendo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

5. En $\mathbb{Z}_7^{3\times 2}$ hallar $A + B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \;, \; B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

6. En $\mathbb{K}^{3\times 2}$, escríbanse el elemento neutro para la suma, y la matriz opuesta de una matriz genérica A.

Solución. 1. Serían:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} \quad , \quad C = [c_{11}].$$

2. Diagonal principal: $A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{bmatrix}$.

Diagonal secundaria: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

3. Las matrices A y B tienen el mismo orden. Para que sean iguales, han de se además iguales los correspondientes elementos, es decir:

$$\begin{cases} 5 = 5 \\ x - 4y = -11 \\ x - y + 4 = x + y \\ 0{,}5 = 1/2 \end{cases} \quad \text{o equivalentemente,} \quad \begin{cases} x - 4y = -11 \\ x - y + 4 = x + y. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x = -3$, $y = 2$.

4. Aplicando las definiciones de suma y diferencia de matrices:

$$M + N = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 5/3 \end{bmatrix}, \quad M - N = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

5. Usando la conocida regla de sumar en $\mathbb{Z}_7$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 6+4 \\ 1+4 & 1+0 \\ 3+4 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. El elemento neutro es la matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ su opuesta es $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix}$.

7.2. Grupo aditivo de las matrices sobre un cuerpo

Demostrar que $(\mathbb{K}^{m\times n}, +)$ es un grupo abeliano (grupo aditivo de las matrices de órdenes $m \times n$ con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$).

Solución. 1. Interna. Por la propia definición de suma de matrices, es claro que la suma de dos matrices de ordenes $m\times n$ es otra matriz de orden $m\times n$.

2. Asociativa. Para A, B, C matrices de $\mathbb{K}^{m\times n}$, y usando la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$(A+B)+C = ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] = [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C)\,.$$

3. Existencia de elemento neutro. Para toda matriz A de $\mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A+0 = [a_{ij}]+[0] = [a_{ij}+0] = [a_{ij}] = A,$$
$$0+A = [0]+[a_{ij}] = [0+a_{ij}] = [a_{ij}] = A.$$

4. Existencia de elemento simétrico. Para toda matriz A de $\mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A+(-A) = [a_{ij}]+[-a_{ij}] = [a_{ij}+(-a_{ij})] = [0] = 0,$$
$$(-A)+A = [-a_{ij}]+[a_{ij}] = [(-a_{ij})+a_{ij}] = [0] = 0.$$

5. Conmutativa. Para todo par de matrices A, B de $\mathbb{K}^{m\times n}$, y usando la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$A+B = [a_{ij}]+[b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}] = [b_{ij}+a_{ij}] = [b_{ij}]+[a_{ij}] = B+A.$$

7.3. Producto de un escalar por una matriz

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

calcular $2A-3B$.

2. En $M_2(\mathbb{Z}_5)$, calcular $2A-3B$ siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Resolver en $\mathbb{R}^{2\times 3}$ el sistema:

$$\begin{cases} 2X+3Y = A \\ 3X-4Y = B, \end{cases}$$

siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Demostrar que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, y para todo $A, B \in\in \mathbb{K}^{m\times n}$, se verifica:

1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
4) $1A = A$.

Solución. 1. Tenemos:

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2&-4&8\\2&2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&15&3\\21&-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-19&5\\-19&8&0\end{bmatrix}.$$

2. Usando las conocidas operaciones en $\mathbb{Z}_7$:

$$2A-3B=2A+2B=2\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&1\\3&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\3&2\end{bmatrix}.$$

3. Calculemos Y. Multiplicando por 3 a la primera ecuación y por -2 a la segunda:

$$\begin{cases}6X+9Y=3A\\-6X+8Y=-2B.\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, $17Y=3A-2B$. Multiplicando por $1/17$:

$$Y=\frac{1}{17}(3A-2B)=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}4&-5&-1\\12&6&-1\end{bmatrix}.$$

Calculemos X. Multiplicando por 4 a la primera ecuación y por 3 a la segunda:

$$\begin{cases}8X+12Y=4A\\9X-12Y=3B.\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, $17X=4A+3B$. Multiplicando por $1/17$:

$$Y=\frac{1}{17}(4A+3B)=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}11&-1&10\\16&-9&10\end{bmatrix}.$$

4. Usando las definiciones de suma de matrices, de producto de un escalar por una matriz, y conocidas propiedades de la suma y producto en $\mathbb{K}$:

$$1)\;\; \lambda(A+B)=\lambda\left([a_{ij}]+[b_{ij}]\right)=\lambda[a_{ij}+b_{ij}]=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]$$
$$=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}]=[\lambda a_{ij}]+[\lambda b_{ij}]=\lambda[a_{ij}]+\lambda[b_{ij}]=\lambda A+\lambda B.$$

$$2)\;\; (\lambda+\mu)A=(\lambda+\mu)[a_{ij}]=[(\lambda+\mu)a_{ij}]=[\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}]$$
$$=[\lambda a_{ij}]+[\mu a_{ij}]=\lambda[a_{ij}]+\mu[a_{ij}]=\lambda A+\mu A.$$

$$3)\;\; \lambda(\mu A)=\lambda(\mu[a_{ij}])=\lambda[\mu a_{ij}]=[\lambda(\mu a_{ij})]=[(\lambda\mu)a_{ij}]=(\lambda\mu)[a_{ij}]=(\lambda\mu)A.$$

$$4)\;\; 1A=1[a_{ij}]=[1a_{ij}]=[a_{ij}]=A.$$

7.4. Multiplicación de matrices

1. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, hallar AB y BA.

2. Dadas $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, hallar AB y BA, para comprobar que $AB \neq BA$.

3. En $M_2(\mathbb{Z}_5)$, calcular AB siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Multiplicar por cajas:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

5. Comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, y $C \in \mathbb{K}^{m\times p}$. Si $AB = C$, dar una fórmula para el elemento c_{ij} de C en función de los elementos de A y B.

7. Demostrar la propiedad asociativa del producto de matrices.

8. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verificar las propiedades $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.

9. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Demostrar la propiedad distributiva

$$A(B + C) = AB + AC.$$

10. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Demostrar que

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

11. Sea A una matriz cuadrada de orden 10 cuyos términos están dados por

$$\begin{cases} a_{ij} = 8^{1/i} & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 2 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Determinar el término b_{36} de la matriz $B = A^2$.

12. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcular $\sum_{k=0}^{25} (-1)^k A^{2k}$.

13. Una matriz cuadrada A se dice que es idempotente si y sólo si, $A^2 = A$. Demostrar que si A es idempotente, también lo es $I - A$.

Solución. 1. Tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 12 & -4 & 21 \end{bmatrix}.$$

La matriz B es de orden 2×3, y la A de orden 2×2. Dado que el número de columnas de B no coincide con el de filas de A, no está definido el producto BA.

2. Tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -11 & -16 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}.$$

Efectivamente, $AB \neq BA$.

3. Usando las conocidas operaciones en $\mathbb{Z}_7$:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 2 & 2 + 2 \\ 0 + 4 & 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. La matriz de la izquierda es de la forma $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ con

$$A = [2],\ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de la izquierda es de la forma $\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ con

$$E = [1],\ F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}.$$

$$AE + BG = [2][1] + \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [2] + [1] = [3].$$

$$CE + DG = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1] + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} AF + BH &= [2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF + DH &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 8 & 8 \\ \hline 6 & 13 & 19 \\ 5 & 13 & 9 \end{array}\right].$$

5. Hallemos AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 0 & 24 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Hallemos $(AB)C$:

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 0 & 24 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 72 & 48 & 24 \\ 90 & 72 & 54 \end{bmatrix}.$$

Hallemos BC :

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & -2 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}.$$

Por último, hallemos $A(BC)$:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & -2 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 72 & 48 & 24 \\ 90 & 72 & 54 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $(AB)C = A(BC)$.

6. Las tres matrices A, B y C son de los tipos:

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & b_{nj} & \ldots \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & b_{nj} & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = C,$$

equivale a $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

7. Sean $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B = [b_{jk}] \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $C = [c_{kr}] \in \mathbb{K}^{p\times q}$. Demostremos que $(AB)C = A(BC)$. La matriz AB es:

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right] \in \mathbb{K}^{m\times p}.$$

Hallemos $(AB)C$:

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right) c_{kr} \right] = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kr} \right) \right] \in \mathbb{K}^{m\times q}.$$

De la misma manera,

$$A(BC) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kr} \right) \right] \in \mathbb{K}^{m\times q}.$$

Dado que el orden de la suma es arbitrario es cualquier suma finita, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kr}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kr}\right)$$

para cada par de valores de i y r, es decir $(AB)C = A(BC)$.

8. Tenemos

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\8&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\30&5\end{bmatrix}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}AB+AC&=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\5&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1&1\\7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\23&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\30&5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por tanto, $A(B+C) = AB + AC$. Procediendo de manera análoga:

$$(A+B)C=\begin{bmatrix}0&1\\5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\45&-5\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}AC+BC&=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\5&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\5&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4&0\\23&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\22&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\45&-5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Es decir, $(A + B)C = AC + BC$.

9. Llamemos $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$ y $C = [c_{jk}]$. Entonces,

$$A(B+C)=[a_{ij}]\left([b_{jk}]+[c_{jk}]\right)=[a_{ij}][b_{jk}+c_{jk}]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\right]$$

$$\begin{aligned}&=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]+\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right]\\&=[a_{ij}][b_{jk}]+[a_{ij}][c_{jk}]=AB+AC.\end{aligned}$$

10. Tenemos:

$$\lambda(AB)=\lambda\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]=\left[\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij})b_{jk}\right]=(\lambda A)B,$$

$$\lambda(AB) = \lambda \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] = \left[\lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda b_{jk})\right] = A(\lambda B).$$

11. Podemos escribir

$$b_{36} = \sum_{k=1}^{10} a_{3k}a_{k6} = a_{31}a_{16} + a_{32}a_{26} + a_{33}a_{36} + \cdots + a_{36}a_{66} + \cdots + a_{3,10}a_{10,6}$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8^{1/3} \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 8^{1/6} + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 2$$
$$= 8(2 \cdot 2) + 2\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[6]{8} = 32 + 4 + 2\sqrt{2} = 36 + 2\sqrt{2}.$$

12. Hallemos las potencias pares de A :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2.$$

Veamos por inducción que $A^{2k} = A^2$ para $k = 1, 2, \ldots, 25$. En efecto, acabamos de ver que la fórmula es cierta para $k = 1$. Si es cierta para k :

$$A^{2(k+1)} = A^{2k}A^2 = A^2A^2 = A^4 = A^2,$$

por tanto la fórmula es cierta para $k + 1$. Entonces:

$$\sum_{k=0}^{25} (-1)^k A^{2k} = A^0 - A^2 + A^4 - A^6 + A^8 - \cdots + A^{48} - A^{50}$$

$$= I + (-A^2 + A^2) + (-A^2 + A^2) + \cdots + (-A^2 + A^2) - A^2 = I - A^2.$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{25} (-1)^k A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Si A es idempotente, $A^2 = A$ por tanto:

$$(I - A)^2 = (I - A)(I - A) = I^2 - AI - IA + A^2 = I - A - A + A = I - A,$$

lo cual implica que $I - A$ es idempotente.

7.5. Matriz inversa (1)

1. Demostrar que $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertible. Demostrar que su inversa es única.

3. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, hallar A^{-1} :
(i) Usando el método de Gauss.
(ii) Usando el método de los adjuntos.
(iii) Considerando como incógnitas las columnas de A^{-1}.

4. Calcular al inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, usando el método de Gauss y el de los adjuntos.

5. Hallar A^{-1}, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$, hallar A^{-1} : (i) Usando el método de Gauss. (ii) Usando el método de los adjuntos.

7. Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & i \\ i & i & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cumpliendo $A^3 - 3A^2 + 5A + 7I = 0$. Demostrar que A es invertible y hallar A^{-1} en función de A.

Solución. 1. Sabemos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible si, y sólo si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I$. También sabemos que la condición $AB = I$, implica $BA = AB$, por tanto basta verificar:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

como inmediatamente se comprueba.

2. Si A tuviera dos inversas B y C, se verificaría:

$$AB = BA = I,$$
$$AC = CA = I.$$

Ahora bien,

$$(AB) = I \Rightarrow C(AB) = CI \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow IC = B \Rightarrow C = B.$$

Es decir, la inversa es única.

3. (i) Usando el conocido algoritmo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{2F_2 - 3F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{11} & -3 & 2 \end{array}\right] \underset{11F_1 + F_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 22 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 11 & -3 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{(1/22)F_1 \\ (1/11)F_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & -3/11 & 2/11 \end{array}\right].$$

Es decir, $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

(ii) El determinante de A es $|A| = 11 \neq 0$ y $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Si C_1, C_2 son las columnas de A^{-1} e I_1, I_2 las de la identidad, entonces

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}.$$

Efectuando la multiplicación por cajas, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = I_1 \\ -C_1 + 4C_2 = I_2, \end{cases}$$

que resuelto proporciona la solución

$$C_1 = \frac{4}{11}I_1 - \frac{3}{11}I_2 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix},$$
$$C_2 = \frac{1}{11}I_1 + \frac{2}{11}I_2 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

por tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Aplicando el algoritmo de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} F_1 + F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3F_1 + F_3 \\ 2F_2 + F_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1/3)F_1 \\ (-1/2)F_2 \\ (1/12)F_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/12 & -2/12 & 1/12 \end{array}\right].$$

La matriz inversa de A es por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 12 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usemos ahora el método de los adjuntos. El determinante de A es $|A| = -12 \neq 0$ y $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{Adj}(A) = \frac{-1}{12}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -12 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 12 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Usemos el método de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - 3F_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ F_1 + F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ F_1 + F_3 \\ 2F_2 + F_3 \\ 2F_4 - 5F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ F_1 - F_4 \\ F_2 + 3F_4 \\ F_3 + 3F_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -14 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -14 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ (-1/2)F_2 \\ (-1/2)F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

La inversa de A es por tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. (i)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{2F_2 - 3F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{F_1 - F_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{3F_1 \\ 3F_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$|A| = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 3 - 1 = 2, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Tenemos,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & i \\ i & i & 1 \end{bmatrix} = \ldots = 4 - 2i, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & i \\ i & i & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A) = \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{10} i \right) \begin{bmatrix} 2 & -1-i & -1-i \\ -1-i & 2 & -1-i \\ -1-i & -1-i & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Usando la propiedad distributiva, la igualdad dada se puede escribir en la forma:

$$A(A^2 - 3A + 5I) = -7I,$$

Multiplicando ambos miembros por $-1/7$:

$$A \left[\frac{-1}{7} \left(A^2 - 3A + 5I \right) \right] = I.$$

Es decir, A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \left(A^2 - 3A + 5I \right).$$

7.6. Matriz inversa (2)

1. Sean A y B dos matrices invertibles de orden n. Demostrar que AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Se considera la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

Hallar A^tA y usar el resultado para calcular A^{-1}.

3. Sean A, B, C matrices cuadradas del mismo orden, con B y C invertibles, verificando $(BA)^tB^{-1}(CB^{-1})^{-1} = I$. Demostrar que A es invertible y expresar A^{-1} en función de B y C.

4. Hallar A^{-1}, siendo $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

5. Determinar $k\in\mathbb{Z}_{11}$ para que no sea invertible la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}7&2&3\\10&0&5\\4&2&k\end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_{11}).$$

6. Hallar la inversa de la matriz de orden n :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2^2&\ldots&2^{n-1}\\0&1&2&\ldots&2^{n-2}\\0&0&1&\ldots&2^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ldots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\end{bmatrix}.$$

7. Para cada $a\in\mathbb{R}$ se consideran las matrices de la forma:

$$M_a=\begin{bmatrix}1&a&a^2/2&a^3/6\\0&1&a&a^2/2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Calcular $M_a\cdot M_b$ y usar el resultado obtenido para determinar M_a^{-1}. (Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales UPM).

8. Para cada $x\in\mathbb{R}$ se define $A_x=\begin{bmatrix}x&\sqrt{1+x^2}\\\sqrt{1+x^2}&x\end{bmatrix}$. Demostrar que $A_x^{-1}=A_{-x}$.

Solución. 1. Usando la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I.$$

Por la propia definición de matriz invertible, concluimos que AB lo es, siendo su inversa $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

2. Operando obtenemos

$$A^tA=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

La igualdad anterior la podemos escribir como

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\,A^t\right)A = I_4.$$

si suma $a^2+b^2+c^2+d^2$ es no nula, cosa que ocurre si y sólo si $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. En consecuencia,

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\,A^t, \quad (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0).$$

3. Usando que la traspuesta del producto es el producto de traspuestas cambiados de orden, que la inversa del producto es el producto de las inversas cambiados de orden, que la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa, que la inversa de la inversa es la propia matriz y que la traspuesta de la traspuesta es la propia matriz,

$$(BA)^tB^{-1}(CB^{-1})^{-1} = I \Leftrightarrow I = A^tB^tB^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow I = A^tB^tC^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^t = (B^tC^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \left(A^t\right)^{-1} = B^tC^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^t = B^tC^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \left(B^tC^{-1}\right)^t \Leftrightarrow A^{-1} = \left(C^t\right)^{-1}B.$$

4. Usemos el método de Gauss. Reordenando las filas:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{array}\right].$$

Restando a cada fila la siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&-1&1\\ 0&1&0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{array}\right].$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0&0&-1&1\\ 0&-1&1&0\\ -1&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

5. Usando las conocidas reglas de sumar y multiplicar en $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\det A = 7\cdot 0\cdot k + 10\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 4 - 4\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 7 - 10\cdot 2\cdot k$$

$$= 0 \cdot k + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 4 - 0 \cdot 3 - 10 \cdot 7 - 9 \cdot k$$

$$= 0 + 5 + 7 - 0 - 4 - 9k = 5 + 7 + 7 + 2k = 1 + 7 + 2k = 8 + 2k.$$

La matriz A no es invertible cuando, y sólo cuando $2k+8 = 0$. Multiplicando ambos miembros por 6 :

$$6 \cdot 2 \cdot k + 6 \cdot 8 = 6 \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \cdot k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -4 = 7.$$

Es decir, A no es invertible $\Leftrightarrow k = 7$.

6. Restando a cada fila la siguiente multiplicada por 2 en el algoritmo de Gauss:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 2^{n-2} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 2^{n-3} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right] = \left[I \mid A^{-1}\right].$$

7. Tenemos:

$$M_a M_b = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2/2 & a^3/6 \\ 0 & 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2/2 & b^3/6 \\ 0 & 1 & b & b^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & b+a & \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} & \frac{b^3}{6} + \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2 b}{2} + \frac{a^3}{6} \\ 0 & 1 & b+a & \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a+b & \frac{(a+b)^2}{2} & \frac{(a+b)^3}{6} \\ 0 & 1 & a+b & \frac{(a+b)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_{a+b}.$$

Dado que M_0 es la matriz identidad, $I = M_0 = M_{a+(-a)} = M_a M_{-a}$, lo cual implica que M_a es invertible y su inversa es M_{-a}. Es decir,

$$M_a^{-1} = M_{-a} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2/2 & -a^3/6 \\ 0 & 1 & -a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Bastará demostrar que $A_x\, A_{-x} = I$. En efecto,

$$A_x\, A_{-x} = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+x^2} & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+x^2} & -x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x^2+1+x^2 & x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} \\ -x\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} & 1+x^2-x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.7. Inversa de orden n por el método de Gauss

Hallar la inversa de la matriz de orden $n > 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución. Apliquemos el método de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right].$$

Restando a cada fila (salvo la última), la última:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right].$$

Sumando a la última fila todas las demás:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{array}\right].$$

Multiplicando a cada fila (salvo la última) por $1-n$ y sumándole la última:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & n-1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{array}\right].$$

Multiplicando a todas las filas por $1/(n-1)$, obtenemos a la izquierda la matriz identidad I_n, por tanto A^{-1} es:

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{bmatrix}.$$

7.8. Inversa de orden n por sistema de columnas

Hallar la inversa de la matriz de orden n :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Dado que la matriz A es triangular superior, conviene hallar su inversa tomando como incógnitas las columnas de A^{-1}, pues el sistema correspondiente es particularmente sencillo. Tenemos;

$$A^{-1}A = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \ldots & I_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} C_1 = I_1 \\ 2C_1 + C_2 = I_2 \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 = I_3 \\ \ldots \end{matrix}\right.$$

Obtenemos sucesivamente:

$$C_1 = I_1,\ C_2 = -2I_1 + I_2,\ C_3 = I_1 - 2I_2 + I_3,\ C_4 = I_2 - 2I_3 + I_3,\ \ldots$$

La matriz A^{-1} es por tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.9. Ecuaciones y sistemas matriciales

1. ean A, B dos matrices cuadradas de orden n, con A invertible. Resolver la ecuación $AX = B$. Como aplicación, calcular X tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n, con A invertible. Resolver la ecuación $XA = B$. Como aplicación, calcular X tal que:

$$X \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Sean A, B, C tres matrices cuadradas de orden n, con A, B invertibles. Resolver la ecuación $AXB = C$. Como aplicación, calcular X tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}.$$

4. Resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \end{cases}$$

usando el concepto de matriz inversa.

5. Resolver la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Resolver la ecuación $AX = B$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} AX - BY = 0 \\ BX + AY = C, \end{cases}$$

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Sean $A \in M_m(\mathbb{R})$ y $B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices invertibles y sea $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
a) Obtener las matrices X, Y, Z en función de A, B, C de manera que se satisfaga la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ O & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix}.$$

b) Usar el resultado del apartado anterior, calcular la inversa de la matriz:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. 1. Tenemos las equivalencias:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

La única solución de la ecuación $AX = B$ es por tanto la matriz cuadrada de orden n, $X = A^{-1}B$. Para la ecuación concreta dada, y teniendo en cuenta que la matriz de la izquierda es invertible:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Tenemos las equivalencias:

$$XA = B \Leftrightarrow (XA)A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1}$$

$$\Leftrightarrow XI = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

La única solución de la ecuación $AX = B$ es por tanto la matriz cuadrada de orden n, $X = BA^{-1}$. Para la ecuación concreta dada, y teniendo en cuenta que el coeficiente de X es una matriz invertible:

$$X = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Tenemos las equivalencias:

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow IXI = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

La única solución de la ecuación $AXB = C$ es por tanto la matriz cuadrada de orden n, $X = A^{-1}CB^{-1}$. Para la ecuación concreta dada, y teniendo en cuenta que las matrices que multiplican a X por la izquierda y derecha son invertibles:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. El sistema se puede escribir en la forma

$$Ax = b, \text{ con } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

La matriz A es invertible, como fácilmente se comprueba. Entonces,

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Por tanto,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. La matriz coeficiente de X tiene determinante nulo. Determinemos las soluciones de la ecuación dada, planteando un sistema lineal.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ -x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Llamando $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, obtenemos todas las soluciones del sistema anterior:

$$x_1 = -1 + \alpha,\ x_2 = 1 + \beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Las soluciones de la ecuación dada son por tanto:

$$X = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 1+\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

6. Se verifica $\det A = 0$, por tanto A no es invertible. Esto implica que no existe matriz X tal que $AX = B = I$. La ecuación no tiene solución.

7. Dado que B es invertible, $AX = BY$ equivale a $Y = B^{-1}AX$. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$BX + AB^{-1}AX = C \Leftrightarrow (B + AB^{-1}A)X = C.$$

Operando el coeficiente de X :

$$B + AB^{-1}A = \cdots = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

matriz que es invertible. Por tanto,

$$X = (B + AB^{-1}A)^{-1}C = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Y = B^{-1}AX = B^{-1}A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. *a*) Si la matriz nula O pertenece a $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ y es fácil verificar que está definido el producto por cajas si $O \in$ Entonces,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Z \\ O & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} AX & AZ + CY \\ O & BY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AX = I_m \\ AZ + CY = O \\ BY = I_n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = A^{-1} \\ AZ + CY = O \\ Y = B^{-1}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = A^{-1} \\ AZ = -CY \\ Y = B^{-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = A^{-1} \\ Z = -A^{-1}CB^{-1} \\ Y = B^{-1}. \end{cases}$$

b) Llamando

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix},\ O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

usando los resultados del apartado anterior, y operando:

$$N^{-1}=\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1/2&1/2\\0&0&1/2&1/2\end{bmatrix}.$$

7.10. Transposición de matrices

1. Se consideran las matrices reales:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\\2&3\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&2&5\end{bmatrix}.$$

Verificar:
a) $(A^T)^T=A$.
b) $(A+B)^T=A^T+B^T$.
c) $(\lambda A)^T=\lambda A^T,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Se consideran las matrices reales:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\\2&3\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&2&5\end{bmatrix}.$$

Verificar que $(AB)^T=B^TA^T$.

3. Sean $A,B\in\mathbb{K}^{m\times n}$ y $\lambda\in\mathbb{K}$. Demostrar que:
a) $\left(A^T\right)^T=A$.
b) $(A+B)^T=A^T+B^T$.
c) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.

4. Sea $A\in M_n(\mathbb{K})$ invertible. Demostrar que la inversa de su traspuesta es la traspuesta de su inversa.

5. Sea $A\in M_n(\mathbb{K})$ simétrica e inveritble. Demostrar que A^{-1} es simétrica.

6. Sean $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas. Demostrar que AB es simétrica $\Leftrightarrow AB=BA$.

Solución. 1. *a*) $(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A.$

b) $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = A^T + B^T.$

c) $(\lambda A)^T = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \\ 2\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2\lambda & 3\lambda & 2\lambda \\ -\lambda & 4\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \lambda A^T.$

2.
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 3 & 14 & 17 \\ 2 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow (AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 10 \\ -7 & 17 & 13 \end{bmatrix}.$$
$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 10 \\ -7 & 17 & 13 \end{bmatrix}.$$
Concluimos que $(AB)^T = B^TA^T$.

3. *a*) Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces $A^T = [a'_{ji}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$ con $a'_{ji} = a_{ij}$. Pero $\left(A^T\right)^T = [a''_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ con $a''_{ij} = a'_{ji}$. Es decir, $a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$, por tanto $\left(A^T\right)^T = A$.

b) Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A^T = [a'_{ji}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$ con $a'_{ji} = a_{ij}$. Si $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B^T = [b'_{ji}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$ con $b'_{ji} = b_{ij}$. Entonces,
$$(A+B)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T = [c_{ji}] \text{ con } c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$
Por otra parte,
$$A^T + B^T = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = [c_{ji}],$$
lo cual implica que $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c) Razonando de manera análoga:
$$(\lambda A)^T = [\lambda a_{ij}]^T = [\lambda a_{ji}] = \lambda[a_{ji}] = \lambda A^T.$$

4. Trasponiendo la igualdad $AA^{-1} = I$:

$$\left(AA^{-1}\right)^T = I^T \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^T A^T = I \Rightarrow \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Es decir, la inversa de la traspuesta de A es la traspuesta de la inversa de A.

5. Usando que la traspuesta de la inversa es la inversa de la traspuesta:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}.$$

Es decir, A^{-1} es simétrica.

6. $\Rightarrow$) Si AB es simétrica, entonces $(AB)^T = AB$, luego $B^T A^T = AB$. Pero por hipótesis, A y B son simétricas, con lo cual $BA = AB$.
$\Leftarrow$) Si $AB = BA$, trasponiendo y usando que A y B son simétricas:

$$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB \Rightarrow AB \text{ es simétrica.}$$

7.11. Descomposición $A = uv^t$

Sea A una matriz real cuadrada de orden n y rango 1. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones y demostrar aquellas que son ciertas.
1) Existen vectores columna u, v tales que $A = uv^T$.
2) Existe un único número real α tal que $A^2 = \alpha A$.
3) Supóngase que la traza de A es 2. Entonces, $A - I$ es invertible. En caso afirmativo, calcular su inversa.
Sugerencia: calcular $(A - I)^2$.

Solución. 1) Como el rango de una matriz proporciona el máximo número de vectores tanto fila como columna linealmente independientes, se deduce que existe una columna no nula de la matriz A, y las restantes son combinación lineal de ella. Sea $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ tal columna. Entonces, A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \ldots & u_1 & \ldots & \lambda_n u_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_n & \ldots & u_n & \ldots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \left[\lambda_1, \ldots, 1, \ldots, \lambda_n\right].$$

Llamando $v = \left[\lambda_1, \ldots, 1, \ldots, \lambda_n\right]^T$, obtenemos $A = uv^T$. La afirmación es cierta.

2) La matriz A^2 es $A^2 = \left(uv^T\right)\left(uv^T\right) = u\left(v^T u\right)v^T$. Llamando α al escalar $v^T u$, obtenemos $A^2 = \alpha A$. Si existiera otro β real tal que $A^2 = \beta A$, entonces,

$$0 = A^2 - A^2 = \alpha A - \beta A = (\alpha - \beta)A \underbrace{\Rightarrow}_{A \neq 0} \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

El número α es único y por tanto la afirmación es cierta.

3) Tenemos

$$\alpha = v^T u = \lambda_1 u_1 + \cdots + 1 \cdot u_i + \cdots + \lambda_n u_n = \text{traza A} = 2$$

$$\Rightarrow A^2 = 2A \Rightarrow (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 2A - 2A + I = I.$$

De la igualdad $(A-I)(A-I) = I$, se deduce que $A - I$ es invertible y que $(A-I)^{-1} = A - I$. La afirmación es cierta.

7.12. Matriz nilpotente e inversa

Una matriz cuadrada A se dice que es nilpotente, si existe un p natural tal que $A^p = 0$. Demostrar que si A es nilpotente, entonces $I - A$ es invertible e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots .$$

Aplicar este resultado al cálculo de la inversa de:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Si $A^p = 0$, entonces $A^m = 0$ si $m \geq p$, en consecuencia:

$$I + A + A^2 + \cdots = I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1},$$

por tanto la suma es finita. Por otra parte:

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$$

$$= I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1} - A - A^2 - \cdots - A^{p-1} - A^p = I,$$

lo cual implica que $I - A$ es invertible e $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$. Expresando M en la forma $M = I - A$, obtenemos:

$$A = I - M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos las potencias de A :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A^4 = 0.$$

Por tanto,

$$M^{-1} = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.13. Potencia enésima por binomio de Newton

(a) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ dos matrices que conmutan, es decir $AB = BA$. Demostrar por inducción que se verifica la fórmula del binomio de Newton:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

(b) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que $N^3 = 0$ y como aplicación, hallar A^n.

(c) Hallar A^n, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. (a) Usemos el método de inducción
Paso base. La fórmula es cierta para $n = 1$. En efecto,

$$(A+B)^1 = A + B = \binom{1}{0} A^1 B^0 + \binom{1}{1} A^0 B^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} A^{1-k} B^k.$$

Paso de inducción. Supongamos que la fórmula es cierta para n, y veamos que es cierta para $n+1$. Se verifica:

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \\ &= A\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k + B\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}. \quad (*)\end{aligned}$$

(en la última igualdad hemos usado que $AB = BA$). El primer sumando de la linea $(*)$ se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k &= \binom{n}{0}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k \\ &= \binom{n+1}{0}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k.\end{aligned}$$

El segundo sumando de la linea $(*)$ se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1} + \binom{n+1}{n+1}A^0B^{n+1} \\ &\text{(haciendo el cambio } k=j-1) : \\ &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}A^{n+1-j}B^j + \binom{n+1}{n+1}A^0B^{n+1}.\end{aligned}$$

Por tanto, $(A+B)^{n+1}$ es igual a:

$$\binom{n+1}{0}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]A^{n+1-k}B^k + \binom{n+1}{n+1}A^0B^{n+1}.$$

Usando la conocida fórmula de combinatoria $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$:

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k + \binom{n+1}{n+1}A^0B^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k.\end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

(b) Tenemos:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos escribir $A = 2I + N$. Además, $(2I)N = 2(IN) = 2(NI) = N(2I)$, es decir $2I$ y N conmutan, luego es aplicable la fórmula del binomio de Newton para hallar A^n. Como $N^3 = 0$, se verifica $N^4 = N^5 = \ldots = 0$, por tanto:

$$A^n = (2I+N)^n = \binom{n}{0}(2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}N + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}N^2$$

$$= 2^n I + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & n2^n & \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

(c) Podemos expresar: $A = I + N$ con $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hallemos las potencias de N :

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; N^4 = 0.$$

Dado que $IN = NI$, podemos aplicar la fórmula del binomio de Newton para calcular $(I+N)^n$. Teniendo en cuenta que $N^m = 0$ si $m \geq 4$:

$$A^n = (I+N)^n = \binom{n}{0}I^n + \binom{n}{1}I^{n-1}N + \binom{n}{2}I^{n-2}N^2 + \binom{n}{3}I^{n-3}N^3$$

$$= I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}N^3.$$

Operando y simplificando,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.14. Traza de una matriz, propiedades

Sea $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama traza de A y se representa por $\operatorname{tr} A$, a la suma de los elementos de la diagonal principal de A, es decir:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Demostrar que para cualquier par de matrices A, B de $M_n(\mathbb{K})$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica:
a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.
c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. *d*) $AB - BA \neq I$.

Solución. *a*) $\operatorname{tr}(A+B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$

b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{tr} A.$

c) Calculemos $\operatorname{tr}(AB)$. Sabemos que el elemento c_{ij} de la matriz producto AB es $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, por tanto:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}} a_{ik}b_{ki}. \quad (1)$$

De manera análoga:

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}} b_{ik}a_{ki}. \quad (2)$$

Es claro que en (1) y (2) aparecen exactamente los mismos sumandos. Por ejemplo, el sumando $a_{23}b_{32}$ de (1) que corresponde a los subíndices $i = 2$, $k = 3$, es el sumando de (2) que corresponde a los subíndices $i = 3$, $k = 2$. Concluimos que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

d) Supongamos que fuera $AB - BA = I$. Tomando trazas en la igualdad anterior,

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I) = n.$$

Usando las conocidas propiedades $\operatorname{tr}(M+N) = \operatorname{tr} M+\operatorname{tr} N$, $\operatorname{tr}(\lambda M) = \lambda \operatorname{tr} M$ y $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$:

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB + (-1)BA) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}((-1)BA)$$

$$= \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(BA) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Es decir, tendríamos $n = 0$, lo cual es absurdo pues $n \geq 1$. Concluimos que $AB - BA \neq I$.

7.15. Matrices mágicas

Todas las matrices con las que trabajamos en este problema serán matrices 3×3 con elementos a_{ij} reales. Una tal matriz se dice que es *mágica* sí y sólo si son iguales la ocho sumas:

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3},\quad a_{1j} + a_{2j} + a_{3j},\quad a_{11} + a_{22} + a_{33},\quad a_{31} + a_{22} + a_{13}$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$. Es decir, si es común la suma de los elementos cada fila, de cada columna y de cada una de las diagonales. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\quad B = A^t,\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Demostrar que cualquier matriz M es la suma de una simétrica M_1 y de una antisimétrica M_2 y que esta descomposición es única.
2. Demostrar que la suma de dos matrices mágicas es mágica, que la traspuesta de una matriz mágica es mágica y que el producto de un escalar por una matriz mágica es mágica. Demostrar que si M es mágica también lo son M_1 y M_2. Verificar que A, B, C son mágicas.
3. Construir todas las matrices mágicas antisimétricas.
4. Construir todas las matrices mágicas simétricas, comenzando por estudiar el caso en el que la suma común es nula.

5. Construir todas las matrices mágicas. Demostrar que forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ¿Cúal es la dimensión de este espacio?
6. Calcular $A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB$. Demostrar que $AB + BA$ es combinación lineal de C y de I.
7. ¿ Cuál es la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos matrices mágicas sea mágica?. Determinar todas las matrices mágicas que son producto de dos mágicas.
8. Demostrar que el producto de una matriz mágica por una combinación lineal de I y de C es mágica.
9. Demostrar que las potencias pares de una matriz mágica no son matrices mágicas (salvo un caso particular a precisar), pero las potencias impares de una matriz mágica son siempre mágicas.
10. ¿Cuando una matriz mágica es invertible? En su caso hallar la inversa ¿Es la inversa una matriz mágica? Estudiar si son mágicas las potencias negativas de una matriz mágica.

Solución. 1. Supongamos que M se puede descomponer en la forma $M = M_1 + M_2$ con M_1 simétrica y M_2 antisimétrica. Transponiendo:

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 \\ M^t &= M_1 - M_2. \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos necesariamente:

$$M_1 = \frac{1}{2}(M + M^t), \quad M_2 = \frac{1}{2}(M - M^t).$$

Es claro que $M = M_1 + M_2$. Veamos que la matriz M_1 es simétrica y que M_2 es antisimétrica:

$$\begin{aligned} M_1^t &= [(1/2)(M + M^t)]^t = (1/2)[M^t + (M^t)^t] = (1/2)[M^t + M] = M_1, \\ M_2^t &= [(1/2)(M - M^t)]^t = (1/2)[M^t - (M^t)^t] = (1/2)[M^t - M] = -M_2. \end{aligned}$$

2. La verificación de estas propiedades es inmediata a partir de la definición de matriz mágica. Claramente A, B, C son mágicas.

3. Cualquier matriz antisimétrica M_2 de orden 3×3 es de la forma:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

La matriz será mágica sí, y solamente si:

$$\beta - \gamma = \gamma - \alpha = \alpha - \beta = \gamma - \beta = \alpha - \gamma = \beta - \alpha = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$M_2 = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

4. Escribiendo una matriz simétrica mágica, obligando que tenga suma común cero y resolviendo el correspondiente sistema, obtenemos las matrices de la forma:

$$\mu \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Las matrices mágicas simétricas de suma común s se obtendrán sumando $s/3$ a cada elemento de las matrices encontradas anteriormente. Llamando $\nu = s/3$ obtenemos la forma de todas las matrices mágicas simétricas:

$$M_1 = \mu \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R}).$$

5. Toda matriz mágica es de la forma $M = M_1 + M_2$:

$$M = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{2}(\lambda - \mu)A - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)B + \nu C = \alpha A + \beta B + \nu C.$$

Denominando por $\mathcal{M}$ al conjunto de todas las matrices mágicas, hemos demostrado que $\mathcal{M} = L[A, B, C]$. Esto implica que $\mathcal{M}$ es subespacio de $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Es fácil demostrar que $\{A, B, C\}$ es sistema libre, en consecuencia es base de $\mathcal{M}$ y por tanto $\dim \mathcal{M} = 3$.

6. Operando obtenemos:

$$A^2 = B^2 = AC = CA = BC = CB = 0, \ C^2 = 3C, \ AB + BA = 12I - 4C.$$

7. Usando la base $\{A, B, C\}$ y los resultados del apartado anterior podemos escribir la forma del producto de dos matrices mágicas:

$$(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\lambda A + \mu B + \nu C) = \ldots =$$
$$3\gamma\nu C + \begin{bmatrix} 2\beta\lambda + 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda - 6\alpha\mu \\ -4\beta\lambda & 8\beta\lambda & -4\beta\lambda \\ 2\beta\lambda - 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda + 6\alpha\mu \end{bmatrix}.$$

La matriz $3\gamma\nu C$ es mágica. Obligando a que el segundo sumando sea matriz mágica obtenemos $(12\beta\lambda + 12\alpha\mu = 0) \ \wedge \ (12\beta\lambda - 12\alpha\mu = 0)$ con lo cual el producto de dos matrices mágicas es mágica sí y solamente si $\beta\lambda = 0$ y $\alpha\mu = 0$ son nulos. Tenemos:

$$\begin{gathered}\alpha=\beta=0 \Rightarrow \gamma C(\lambda A+\mu B+\nu C)=3\gamma\nu C\\ \alpha=\lambda=0 \Rightarrow (\beta B+\gamma C)(\mu B+\nu C)=3\gamma\nu C\\ \beta=\mu=0 \Rightarrow (\alpha A+\gamma C)(\lambda A+\nu C)=3\gamma\nu C\\ \lambda=\mu=0 \Rightarrow \gamma C(\alpha A+\beta B+\gamma C)=3\gamma\nu C.\end{gathered}$$

En consecuencia, las únicas matrices mágicas que son producto de dos mágicas son las de la forma ηC con $\eta \in \mathbb{R}$.

8. Toda matriz mágica es de la forma $\alpha A+\beta B+\gamma C$ y toda combinación lineal de I y de C de la forma $\alpha' I+\beta' C$. Multiplicando:

$$(\alpha A+\beta B+\gamma C)(\alpha' I+\beta' C)=\alpha\alpha' A+\beta\beta' B+(\gamma\alpha'+3\gamma\beta')C.$$

es decir, el producto es una matriz mágica.

9. El cuadrado de una matriz mágica M es $M^2=(\alpha A+\beta B+\gamma C)^2$. Del apartado 7 deducimos que M^2 es mágica sí y solamente si, $\alpha\beta=0$. Calculando M^2 obtenemos:

$$M^2=\ldots=12\alpha\beta I+(3\gamma^2-4\alpha\beta)C.$$

M^3 es el producto de una mágica (M) por una combinación lineal de I y de C (M^2). Por el apartado 8 concluimos que M^3 es mágica. Por recurrencia obtenemos:

$$M^{2n-1} \text{ mágica} \Rightarrow M^{2n}=hI+kC \ \Rightarrow M^{2n+1} \text{ mágica}.$$

Si $\alpha\beta=0$ entonces $M^n=3^{n-1}\gamma^n C$, que es mágica. Para $\alpha\beta\neq 0$ obtenemos:

$$\begin{gathered}M^{2n}=(12\alpha\beta)^n I+(1/3)[(3\gamma)^{2n}-(12\alpha\beta)^n]C\\ M^{2n+1}=(12\alpha\beta)^n(\alpha A+\beta B)+\gamma(3\beta)^n C.\end{gathered}$$

10. Operando obtenemos $\det(M)=-36\alpha\beta\gamma$, entonces M es invertible sí y solamente si los escalares $\det(M)\alpha,\beta,\gamma$ son no nulos. Calculando obtenemos:

$$M^{-1}=\frac{1}{36}\left(\frac{3}{\beta}A+\frac{3}{\alpha}B+\frac{4}{\gamma}C\right)=\alpha' A+\beta' B+\gamma' C,$$

que es una matriz mágica. Dado que $\alpha'\beta'\neq 0$ los resultados del apartado 9 se mantienen:

$$M^{-2p}=(M^{-1})^{2p} \text{ no es mágica y } M^{-(2p+1)}=(M^{-1})^{2p+1} \text{ es mágica.}$$

7.16. Matriz de Markov

Un vector de $\mathbb{R}^n$ $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es un *vector probabilístico* cuando sus componentes son mayores o iguales que cero y suman uno, es decir $x_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Una matriz cuadrada $n \times n$ es una *matriz de Markov* cuando sus columnas son vectores probabilísticos. Se pide:
(a) Demostrar que una matriz cuadrada $(n \times n)$ A es de Markov cuando y sólo cuando para cualquier vector probabilístico (de $\mathbb{R}^n$) X el vector AX es también probabilístico.
(b) Si A y B son matrices de Markov $(n \times n)$ ¿ Es $A + B$ de Markov? ¿ Es AB de Markov? Dar las demostraciones o construir contraejemplos.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Consideremos las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Supongamos que A es matriz de Markov y que X es vector probabilístico. Entonces

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Por ser A de Markov, $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j y por ser X probabilístico, $x_i \geq 0$ para todo i. Esto implica que todas las componentes de AX son mayores o iguales que cero. Por otra parte, teniendo en cuenta que la suma de las componentes de cada columna de A es 1 y que la suma de las componentes de X también es 1 obtenemos que la suma de todas las componentes de AX es

$$\begin{aligned} &(a_{11} + \ldots + a_{n1})x_1 + \ldots + (a_{1n} + \ldots + a_{nn})x_n \\ &= 1x_1 + \ldots + 1x_n = x_1 + \ldots + x_n = 1. \end{aligned}$$

Es decir, AX es vector probabilístico. Recíprocamente, supongamos que para todo vector probabilístico X se verifica que AX es probabilístico. Elijamos los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Claramente estos vectores son probabilísticos y por hipótesis también lo son

$$AE_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ AE_n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pero estos vectores son las columnas de A, lo cual implica que A es matriz de Markov.

(b) Consideremos las matrices $A = B = I_2$ (matriz identidad de orden 2), claramente A y B son de Markov, sin embargo $A + B = 2I_2$ no es de Markov. El primer enunciado es falso. Sean ahora A y B matrices de Markov siendo $B_1, \ldots, B_n$ las columnas de B. Entonces $AB = A[B_1, \ldots, B_n] = [AB_1, \ldots, AB_n]$. Pero por lo demostrado en el apartado anterior, $AB_1, \ldots, AB_n$ son vectores probabilísticos lo cual implica que AB es de Markov. El segundo enunciado es cierto.

7.17. Inversa generalizada

1. Sea A una matriz (cuadrada o rectangular). Se dice que una matriz G es una g-inversa (o inversa generalizada) de A cuando $AGA = A$. Naturalmente que G ha de ser de tipo $n \times m$ en el caso de ser A del tipo $m \times n$. Si A es cuadrada e invertible, entonces es fácil comprobar que la inversa A^{-1} es (la única) g-inversa de A, de manera que el concepto de g-inversa es una generalización del concepto de inversa. Lo que sigue es, además de una prueba de evaluación una invitación al estudio de las matrices g-inversas.
(a) <u>Cálculo de las g-inversas en un caso particular</u>. Se $\tilde{A}$ la matriz $m \times n$ que escrita por cajas presenta la forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde la submatriz I_r es la matriz unidad de orden r, y siendo nulas las otras tres submatrices. Comprobar que la traspuesta $\tilde{A}^t$ es una g-inversa de $\tilde{A}$. Hallar todas las matrices G que son g-inversas de $\tilde{A}$.
(b) <u>Existencia de g-inversas</u>. Si A es una matriz $m \times n$ y de rango r, entonces se sabe (y el alumno lo puede admitir si no lo sabe) que existen matrices cuadradas e invertibles P y Q tales que $PAQ = \tilde{A}$, donde $\tilde{A}$ es precisamente la matriz del apartado anterior. Comprobar que $G = Q\tilde{A}P$ es una g-inversa de A. Esto demuestra que toda matriz A posee alguna g-inversa, y en general no es única como se habrá comprobado en el apartado anterior.
(c) Relación de simetría. Comprobar que con los datos del apartado anterior A es también g-inversa de G. Se pregunta si esto es general, es decir ¿si G

es g-inversa de A, entonces A es g-inversa de G?. Dar una demostración o construir un contraejemplo.

2. Aplicación de las g-inversas al estudio de los sistemas de ecuaciones. Sea G una g-inversa de A, y sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones, donde A es la matriz $m \times n$ de coeficientes, x es el vector columna $n \times 1$ de las incógnitas y b es el vector columna $m \times 1$ de los términos independientes.
(a) Compatibilidad. Demostrar que la igualdad $AGb = b$ es condición necesaria para que el sistema sea compatible. ¿Es también condición suficiente? Dar una demostración o construir un contraejemplo.
(b) Resolución Si el sistema es compatible, demostrar que $x = Gb + (I_n - GA)z$ es solución (donde I_n es la matriz unidad de orden n, y z es un vector columna $n \times 1$ arbitario).

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. (a) Veamos que $\tilde{A}^t$ es g-inversa de $\tilde{A}$ es decir que $\tilde{A}\tilde{A}^t\tilde{A} = \tilde{A}$. Para ello usamos la multiplicación por cajas. Escribimos en cada caso el orden de las matrices nulas que aparecen para comprobar que el producto por cajas tiene sentido.

$$\tilde{A}\tilde{A}^t = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{A}\tilde{A}^t\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \tilde{A}.$$

Hallemos ahora todas las matrices G que son g-inversas de $\tilde{A}$. Si G es g-inversa de $\tilde{A}$ entonces G tiene orden $n \times m$ y podemos expresarla por cajas en la forma

$$G = \begin{bmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times(m-r)} \\ Z_{(n-r)\times r} & T_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix},$$

o abreviadamente $G = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$. Entonces, G es g-inversa de $\tilde{A}$ si y sólo si $\tilde{A}G\tilde{A} = \tilde{A}$. Equivalentemente

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = I_r.$$

En consecuencia, todas las matrices g-inversas de $\tilde{A}$ son todas las matrices $n \times m$ de la forma

$$G = \begin{bmatrix} I_r & Y \\ Z & T \end{bmatrix}.$$

(b) Usando el apartado anterior tenemos

$$AGA = A(Q\tilde{A}^tP)A = (AQ)\tilde{A}^t(PA) =$$
$$(P^{-1}\tilde{A})\tilde{A}^t(\tilde{A}Q^{-1}) = P^{-1}(\tilde{A}\tilde{A}^t\tilde{A})Q^{-1} =$$
$$P^{-1}\tilde{A}Q^{-1} = A.$$

Es decir, $G = Q\tilde{A}^tP$ es g-inversa de A.

(c) Veamos que A es g-inversa de G, es decir $GAG = A$. Tenemos

$$GAG = (Q\tilde{A}^tP)A(Q\tilde{A}^tP) = (Q\tilde{A}^t)(PAQ)(\tilde{A}^tP)$$
$$Q(\tilde{A}^t\tilde{A}\tilde{A}^t)P = Q(\tilde{A}\tilde{A}^t\tilde{A})^tP = Q\tilde{A}P = G.$$

El resultado no es general. Elijamos por ejemplo las matrices de órdenes $n \times n : A = 0$ (matriz nula) y $G = I$ (matriz unidad). Entonces

$$AGA = 0I0 = 0 = A\ ,\ GAG = I0I = 0 \neq G.$$

Es decir, G es g-inversa de A pero A no es g-inversa de G.

2. (a) Por hipótesis $AGA = A$. Si el sistema $Ax = b$ es compatible, existe $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax_0 = b$. Entonces $Ax_0 = b \Rightarrow AGAx_0 = b \Rightarrow AGb = b$. La condición también es suficiente pues si $AGb = b$, entonces $x_0 = Gb$ es solución del sistema.
(b) Tenemos

$$A(Gb + (I_n - GA)z) = AGb + Az - AGAz = AGb + Az - Az = AGb = b,$$

lo cual demuestra que todo vector de la forma $Gb + (I_n - GA)z$ es solución del sistema $Ax = b$.

Capítulo 8

Determinantes sobre un cuerpo

8.1. Determinantes sencillos (1)

1. Calcular los determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}.\quad b)\ \begin{vmatrix} x+1 & -x \\ -x & x+1 \end{vmatrix}.\quad c)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

$d)\ \begin{vmatrix} z & -1 \\ z & z \end{vmatrix}\quad (z = \cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3).$

2. Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, hallar $\det A$: *a*) En $\mathbb{R}$. *b*) En $\mathbb{Z}_5$. *c*) En $\mathbb{Z}_7$. *d*) En $\mathbb{Z}_{11}$.

3. Calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

4. Establecer la identidad siguiente, sin desarrollar los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$: *a*) En $\mathbb{R}$. *b*) $\mathbb{Z}_5$.

6. Calcular el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

a) Desarrollado por los elementos de la primera fila.
b) Fabricando tres ceros en una linea.

Solución. 1. *a*) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 4 = 21 + 8 = 29.$

b) $\begin{vmatrix} x+1 & -x \\ -x & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$

d) $\begin{vmatrix} z & -1 \\ z & z \end{vmatrix} = z^2 + z = z(z+1)$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$

2. *a*) $\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 6 - 16 = -10.$
b) $\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 1 - 1 = 0.$
c) $\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 6 - 2 = 4.$
d) $\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 6 - 5 = 1.$

3. Restando a la segunda columna la primera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 13547 & 1 \\ 28423 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 100(13547 - 28423) = 100(-14876) = -1\,487\,600.$$

4. Podemos escribir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix}.$$

5. Aplicando la regla de Sarrus:
a) $\Delta = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2$
$= 8 + 0 + 9 - 0 - 2 - 6 = 9.$
b) $\Delta = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2$
$= 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2$
$= 3 + 0 + 4 - 0 - 2 - 1 = 2 - 3 = 3 + 4 + 3 + 4 = 2 + 3 + 4 = 0 + 4 = 4.$

6. *a*) Tenemos:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 7 & -5 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$-5 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & -5 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-329) - 3 \cdot (-223) + (-2) \cdot 37 - 5 \cdot 197 = -689.$$

b) Efectuando las transformaciones $F_2 - 4F_1,\ F_3 - 2F_1,\ F_3 + 3F_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 15 & -23 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 15 & -23 \\ 1 & -1 & -6 \\ 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = -689.$$

8.2. Determinantes sencillos (2)

1. Calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Calcular $\Delta = \det \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Demostrar, sin calcularlo, que el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 15, sabiendo que 165, 180 y 195 lo son.

4. Demostrar, sin desarrollar, la siguiente igualdad de determinantes, sabiendo que $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix}.$$

5. Calcular A^2, A^{-1} y $\det A$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Desarrollar el siguiente determinante llegando a una expresión formada por factores de primer grado

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}.$$

Solución. 1. Efectuando la transformación $C_1 - 5C_2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -30 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -19 & 1 & 0 & 0 \\ -30 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Efectuando la transformación $F_4 - 5F_3$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -19 & 1 & 0 & 0 \\ -30 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & -30 & -19 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -19 & 1 & 0 \\ -30 & 5 & 1 \\ 0 & -30 & -19 \end{vmatrix} = 665.$$

2. Tenemos $\Delta = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ con: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, por tanto:

$$\Delta = \det A \cdot \det C = (-7) \cdot 11 = -77.$$

3. Sumando a la tercera columna la primera multiplicada por 100 y la segunda multiplicada por 10 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5 \\ 1 & 8 & 1 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 0 \\ 1 & 9 & 1 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 165 \\ 1 & 8 & 180 \\ 1 & 9 & 195 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 15p \\ 1 & 8 & 15q \\ 1 & 9 & 15r \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & p \\ 1 & 8 & q \\ 1 & 9 & r \end{vmatrix} = 15\Delta_1 \quad (p, q, r \in \mathbb{Z}).$$

Los elementos del determinante Δ_1 son números enteros, y dado que la suma resta y producto de enteros son operaciones internas en $\mathbb{Z}$, deducimos que Δ_1 es entero, en consecuencia Δ es múltiplo de 15.

4. Usando que si a una linea de un determinante se la multiplica por k, el determinante queda multiplicado por k:

$$\begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\frac{1}{y}\begin{vmatrix} 2yx & xy & 2xy \\ x^2 & 2 & y^2 \\ x^3 & 4 & y^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xy}{xy}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ x^2 & 2 & y^2 \\ x^3 & 4 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{2}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix}.$$

5.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4I \Rightarrow AA = 4I \Rightarrow A\left(\frac{1}{4}A\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A.$$

Restando a las filas $2, 3$, y 4, la primera

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(8+8) = -16.$$

6. La primera, segunda y tercera fila son divisibles por $x-1$, $x-2$ y $x-3$ respectivamente. Podemos escribir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & (x+1)(x-1) & (x-1)(x^2+x+1) \\ 2(x-2) & (x+2)(x-2) & (x-2)(x^2+2x+4) \\ 3(x-3) & (x+3)(x-3) & (x-3)(x^2+3x+9) \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 2 & x+2 & x^2+2x+4 \\ 3 & x+3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix}.$$

Efectuando las transformaciones $F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 3F_1$:

$$\Delta = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & -x & -x^2+2 \\ 0 & -2x & -2x^2+6 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)(-x)\begin{vmatrix} 1 & -x^2+2 \\ 2 & -2x^2+6 \end{vmatrix} = (-2x)(x-1)(x-2)(x-3).$$

8.3. Determinantes por triangularización (1)

1. Calcular el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ x & x & a & b & c \\ x & x & x & a & b \\ x & x & x & x & a \\ x & x & x & x & a \end{vmatrix}.$$

2. Calcular el determinante $\Delta_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}$.

3. Calcular el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

4. Calcular el determinante $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$.

5. Calcular el determinante de orden n, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$.

Solución. 1. Dado un determinante, es interesante para su cálculo intentar la triangularización, dado que el determinante de una matriz triangular es sencillamente igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Restando a cada columna la siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a & a-b & b-c & c-d & d \\ 0 & x-a & a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & x-a & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & x-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-a)^4 x.$$

2. Restando a cada fila (a partir de la segunda), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = n!.$$

3. Efectuando las transformaciones $F_2 - 2F_1,\ F_3 - F_2, F_4 - F_2, \ldots, F_n - F_2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot (n-2) = -2[(n-2)!].$$

4. Sumando a cada fila (menos a la primera), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

5. Restando a tolas las filas (salvo a la primera), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}.$$

Sumando a la primera columna la suma de todas las demás:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

8.4. Determinantes por triangularización (2)

1. Calcular el determinante $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$

2. Calcular el determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & x & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & x & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & x \end{vmatrix}.$$

Resolver la ecuación $D(x) = 0$.

3. Se considera el determinante de orden n,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 7 & \dots & 7 \\ -1 & -1 & 1 & 7 & \dots & 7 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Resolver la ecuación $\Delta_n = 2^5$.

4. Calcular $\det A$, siendo $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por $a_{ij} = \text{mín}\{i, j\}$.

Solución. 1. Restando a cada fila (menos a la primera), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)!.$$

2. Sumando a cada columna las demás:

$$D(x) = \begin{vmatrix} x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & x & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & 2 & x & 3 & \ldots & n-1 & n \\ x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & 2 & 3 & x & \ldots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & 2 & 3 & 4 & \ldots & x & n \\ x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+1+2+3+\cdots+(n-1)+n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & x & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & x & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & x & \ldots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & x \end{vmatrix}.$$

Usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética y efectuando las transformaciones $C_2 - C_1$, $C_3 - 2C_1$, $C_4 - 3C_1$, ... , $C_{n+1} - nC_1$:

$$D(x) = \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x-3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & x-(n-1) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & x-n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right)(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n).$$

Las soluciones de la ecuación $D(x) = 0$ son por tanto:

$$x = -\frac{n(n+1)}{2},\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3,\ \ldots,\ x = n.$$

3. Sumando a todas las filas (menos a la primera), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & \ldots & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & \ldots & 8 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix} = 2^{n-1}.$$

Por otra parte, $\Delta_n = 2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Leftrightarrow n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6$.

4. El determinante de A es

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Restando a cada fila la anterior:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

8.5. Determinantes por inducción

1. Calcular el determinante de orden n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

2. Calcular el determinante de orden n,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Calcular el determinante de orden n

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

4. Calcular el determinante de orden n:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}.$$

5. Calcular el determinante de orden n, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$

Solución. 1. Hallemos los determinantes de órdenes 1, 2 y 3 para analizar si siguen alguna relación.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + x^6.$$

El cálculo de los determinantes anteriores permite conjeturar la fórmula

$$\Delta_n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}.$$

Demostremos la fórmula por inducción. El paso base ya está demostrado. Supongamos que la fórmula conjeturada es cierta para todo $k \leq n$, y demostremos que también es válida para $n+1$. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x^2)\Delta_n - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x^2)\Delta_n - x^2\Delta_{n-1} = (1+x^2)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})$$
$$-x^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}) = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$
$$+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n+2}-x^2-x^4-x^6-\cdots-x^{2n}$$
$$= 1+x^2+x^4+x^6\cdots+x^{2(n+1)}.$$

Es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

2. Hallemos los determinantes de órdenes 1, 2 y 3 para analizar si siguen alguna relación.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Es decir, $\Delta_1 = 2^1 - 1$, $\Delta_2 = 2^2 - 1$, $\Delta_3 = 2^3 - 1$, lo cual permite conjeturar la fórmula

$$\Delta_n = 2^n - 1.$$

Demostremos la fórmula por inducción. El paso base ya está demostrado. Supongamos que la fórmula conjeturada es cierta para todo $k \le n$, y demostremos que también es válida para $n+1$. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$\Delta_{n+1} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2^n + \Delta_n$$

$$= 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Por tanto, la fórmula es cierta para $n + 1$.

3. Hallemos los determinantes de órdenes 1, 2 y 3 para analizar si siguen alguna relación.

$$D_1(x) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ D_2(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 1 + 2x,$$

$$D_3(x) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 1 + 2x + 3x^2.$$

El cálculo de los determinantes anteriores permite conjeturar la fórmula

$$D_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Demostremos la fórmula por inducción. El paso base ya está demostrado. Supongamos que la fórmula conjeturada es cierta para todo $k \leq n$, y demostremos que también es válida para $n + 1$. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$D_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} n+1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)x^n + D_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n.$$

Es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

4. Hallemos los determinantes de órdenes 1, 2 y 3 para analizar si siguen alguna relación.

$$D_1(x) = \begin{vmatrix} 2x \end{vmatrix} = 2x,\ D_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 3x^2,$$

$$D_3(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 4x^3.$$

El cálculo de los determinantes anteriores permite conjeturar la fórmula

$$D_n(x) = (n+1)x^n.$$

Demostremos la fórmula por inducción. El paso base ya está demostrado. Supongamos que la fórmula conjeturada es cierta para todo $k \le n$, y demostremos que también es válida para $n+1$. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$D_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2xD_n(x) - 1\begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2xD_n(x) - x^2 D_{n-1}(x) = 2x(n+1)x^n - x^2 n x^{n-1} = (n+2)x^{n+1}.$$

Es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

5. Restando a tolas las filas (salvo a la primera), la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}.$$

Sumando a la primera columna la suma de todas las demás:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

8.6. Determinante de Vandermonde

1. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & -1 \\ 4 & x^2 & 9 & 1 \\ 8 & x^3 & 27 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

2. Calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 \end{vmatrix}$, siendo log el logaritmo decimal.

3. Demostrar la fórmula del determinante de Vandermonde

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

4. (a) Demostrar que el siguiente sistema lineal es determinado

$$S : \begin{cases} x + 2y + 4z + 8w = 16 \\ x - 2y + 4z - 8w = 16 \\ x + 3y + 9z + 27w = 81 \\ x - 4y + 16z - 64w = 256. \end{cases}$$

(b) Resolverlo usando de forma adecuada el polinomio

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 4).$$

5. Determinar las relaciones que han de verificar $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ para que sea nulo el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \cos\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Expresar el siguiente determinante en forma de determinante de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ bcd & cda & dab & abc \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \quad (abcd \neq 0).$$

Solución. 1. El determinante Δ dado es de Vandermonde, por tanto,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-4)(-1 - x)(-3)(3 - x)1(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = 2.$$

2. El determinante es de Vandermonde, por tanto,

$$\Delta = (\log 2000 - \log 200)\,(\log 2000 - \log 20)\,(\log 2000 - \log 2)$$

$$\cdot\,(\log 200 - \log 20)\,(\log 200 - \log 2)\,(\log 20 - \log 2)$$

$$= (\log 10)\,(\log 100)\,(\log 1000)\,(\log 10)\,(\log 100)\,(\log 10)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12.$$

3. Demostremos la fórmula por inducción. Tenemos

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i),$$

por tanto la fórmula es cierta para $n = 2$. Sea cierta la fórmula para todo $k \leq n - 1$, entonces, restando a cada fila la anterior multiplicada por x_1 :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{2 \leq r \leq n} (x_r - x_1) \cdot V(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \leq r \leq n} (x_r - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

lo cual implica que la fórmula es cierta para n.

4. (a) El determinante de la matriz A del sistema es

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix} = \det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & 9 & 16 \\ 8 & -8 & 27 & -64 \end{vmatrix}.$$

El determinante anterior es de Vandermonde con los elementos de la segunda fila distintos dos a dos, luego $\det A \neq 0$. Entonces, el rango de A es 4, que coincide con el de la matriz ampliadda y con el número de incógnitas. El sistema S es determinado.

(b) El polinomio p se anula para los valores 2, -2, 3 y -4. Si denotamos

$$p(\lambda) = \lambda^4 - w\lambda^3 - z\lambda^2 - y\lambda - x, \qquad (1)$$

las cuatro ecuaciones del sistema S equivalen a

$$p(2) = 0, \ p(-2) = 0, \ p(3) = 0, \ p(-4) = 0,$$

y desarrollando $(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 4)$ obtenemos

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 16\lambda^2 - 4\lambda + 48. \qquad (2)$$

Identificando (1) y (2), obtenemos la única solución del sistema

$$x = 48,\ y = 4,\ z = 16,\ w = -1.$$

5. Usando que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta e intercambiando la primera fila con la tercera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta & \cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta & \cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Sumando a la tercera fila la primera:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta & \cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 2\cos^2\alpha & 2\cos^2\beta & 2\cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$$

El último determinante es de Vandermonde, en consecuencia $\Delta = 0$ si, y sólo si los tres cosenos $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, no son distintos dos a dos.

6. Efectuando las transformaciones aC_1, bC_2, cC_3 y dC_4 :

$$\Delta = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ abcd & bcda & cdab & dabc \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abcd}{abcd} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

8.7. Regla de Cramer

1. Comprobar que el siguiente sistema en $\mathbb{R}$ es de Cramer y resolverlo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

2. Usando la regla de Cramer resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

$i)$ En $\mathbb{R}$. $\quad ii)$ En $\mathbb{Z}_7$.

3. Convertir el siguiente sistema en $\mathbb{R}$ en uno de Cramer y resolverlo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

Solución. 1. Recordamos que un sistema lineal $Ax = b$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es de Cramer, si y sólo si tiene el mismo número n de ecuaciones que de incógnitas y además $\Delta = \det A \neq 0$. Por otra parte, todo sistema de Cramer es compatible y determinado y denotando por Δ_i al determinante obtenido al sustituir la columna i-ésima de A por b, la única solución del sistema es

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \qquad \text{(Regla de Cramer).} \quad \square$$

En nuestro caso,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{44}{22} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{22} = \frac{-44}{22} = -2.$$

2. $i)$ La única solución del sistema es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5} = 0{,}4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

$ii)$ Análogamente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5} = 2 \cdot 3 = 6, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5} = 6.$$

3. La tercera ecuación es la suma de la primera y la segunda, luego podemos eliminarla. El sistema se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 = -2 + x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Dado que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, para todo x_3, x_4 el sistema anterior es de Cramer. Entonces,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - x_3 - x_4 & 2 \\ -2 + x_3 - 3x_4 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = -3 + 2x_3 - 2x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - x_3 - x_4 \\ 2 & -2 + x_3 - 3x_4 \end{vmatrix}}{-2} = 2 - 3x_3/2 + x_4/2.$$

Denotanto $x_3 = \alpha$, $x_3 = \beta$ obtenemos todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2\alpha - 2\beta \\ x_2 = 2 - 3\alpha/2 + \beta/2 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta. \end{cases}$$

8.8. Ceros por encima o debajo de la diagonal secundaria

1. Calcular el determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Calcular el determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Solución. 1. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$\Delta_n = 1 \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\Delta_{n-1}.$$

Usando la relación anterior sucesivamente y teniendo en cuenta que $\Delta_1 = 1$,

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}\Delta_{n-1} = (-1)^{n+1}(-1)^n\Delta_{n-2} = (-1)^{n+1}(-1)^n(-1)^{n-1}\Delta_{n-3}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n(-1)^{n-2}\dots(-1)^3\Delta_1 = (-1)^{3+4+\dots n+(n+1)}.$$

Por la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$3 + 4 + \dots n + (n+1) = \frac{3 + (n+1)}{2}(n-1).$$

Por tanto, $\Delta_n = (-1)^{(n+4)(n-1)/2}$.

2. Restando a cada fila la anterior:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la última columna:

$$\Delta_n = n(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Restando a cada fila la siguiente:

$$\Delta_n = n(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aparece el mismo determinante del apartado anterior, pero de orden $n-1$, por tanto:

$$\Delta_n = n(-1)^{n+1}(-1)^{3+4+\cdots n} = (-1)^{(n+4)(n-1)/2}n.$$

8.9. Determinante y sucesión de Fibonacci

Sea $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ la sucesión de Fibonacci y consideremos la matriz:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Probar que $\det A_n$ coincide con el termino enésimo de la sucesión.

Solución. La sucesión de Fibonacci $\{x_n\}$ está determinada por las condiciones $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ si $n \geq 3$. Tenemos

$$|A_1| = |1| = 1, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Por otra parte, desarrollando por los elementos de la primera columna para $n \geq 3$, obtenemos

$$|A_n| = 1 \cdot |A_{n-1}| + (-1)(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1}$$

$$= |A_{n-1}| + 1 \cdot |A_{n-2}| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|\,.$$

Concluimos que $\{|A_n|\}$ es la sucesión de Fibonacci.

8.10. Determinante con números combinatorios

Calcular el determinante de orden $p + 1$

$$\Delta(m, p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \ldots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \ldots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \binom{m+p}{2} & \ldots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix} \quad (m \geq p).$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Caminos, UPM).

Solución. Restando a cada fila la anterior y usando la conocidas fórmulas

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \; \binom{n}{0} = 1, \; \binom{n}{1} = n,$$

$$\Delta(m,p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{p} \\ 0 & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p-1} \\ 0 & \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \binom{m+p-1}{0} & \binom{m+p-1}{1} & \dots & \binom{m+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p-1} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{m+p-1}{0} & \binom{m+p-1}{1} & \dots & \binom{m+p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \Delta(m,p-1).$$

Por tanto

$$\Delta(m,p) = \Delta(m,p-1) = \Delta(m,p-2) = \ldots = \Delta(m,1)$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1.$$

8.11. Producto de enteros que son suma de cuatro cuadrados de enteros

Demostrar que el producto de dos números enteros, cada uno de ellos suma de cuatro cuadrados de enteros, es también la suma de cuatro cuadrados de enteros.
Sugerencia: considerar determinantes de la forma

$$\det \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

con z, w complejos cuyas partes real e imaginaria son números enteros.

Solución. Sean $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$ con x_1, y_1, x_2, y_2 enteros. Entonces,

$$m = \det \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = z\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

es decir, m es la suma de cuatro cuadrados de enteros.

Recíprocamente, si m es suma de cuatro cuadrados de enteros, es claro que m es un determinante de la forma anterior. Entonces, si m y n son suma de cuatro cuadrados de enteros, usando que el determinante del producto es el producto de los determinantes y conocidas propiedades de la conjugación de los números complejos:

$$mn = \det \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} h & -t \\ \overline{t} & \overline{h} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} zh - w\overline{t} & -zt - w\overline{h} \\ \overline{w}h + \overline{z}\overline{t} & -\overline{w}t + \overline{z}\overline{h} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} zh - w\overline{t} & -\overline{\left(zt + w\overline{h}\right)} \\ \overline{zt + w\overline{h}} & \overline{zh - w\overline{t}} \end{bmatrix}.$$

Dado que los números complejos z, w, h y t tiene partes real a imaginaria enteras, también las tienen $zh - w\overline{t}$ y $zt + w\overline{h}$, es decir mn es un determinante de la forma dada, luego es la suma de cuatro cuadrados de enteros.

8.12. Determinante e inversa de orden n

Se considera la matriz

$$M_n = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 + a_4 & -a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} & a_{n-1} + a_n & -a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n & a_n \end{bmatrix}$$

siendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales no nulos y sea $D_n = \det M_n$.
1. Calcular D_1, D_2, D_3. (Nótese que $M_1 = [a_1]$)
2. Encontrar una relación entre D_n y D_{n+1}.
3. Calcular D_n.
4. Sean $b_1 = \dfrac{1}{a_1},\ b_i = b_{i-1} + \dfrac{1}{a_i},\ i = 2, 3, \ldots n$ y sea

$$A_n = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & \ldots & b_1 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 & \ldots & b_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_3 & b_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Hallar $|A_n|$ en función de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
5. Calcular el producto $M_n \cdot A_n$ y deducir M_n^{-1}.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Para hallar D_2 sumamos a la primera fila la segunda y para D_3 sumamos a la segunda fila la tercera.

$$D_1 = \det[a_1] = a_1,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ -a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2,$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 0 & -a_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_3D_2 = a_1a_2a_3.$$

2. Sumando a la penúltima fila la última:

$$D_{n+1} =$$
$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3+a_4 & -a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_n & a_n+a_{n+1} & -a_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n+1} & a_{n+1} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3+a_4 & -a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_n & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n+1} & a_{n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1}D_n.$$

3. Los cálculos efectuados en el primer apartado sugieren la fórmula $D_n = a_1a_2\ldots a_n$. Demostrémosla por inducción. Está demostrado que es cierta para $n = 1$. Se cierta para n, entonces por el apartado anterior, $D_{n+1} = a_{n+1}D_n = a_1a_2\ldots a_na_{n+1}$ es decir, la fórmula es cierta para $n+1$.

4. Sumando a la penúltima fila la última y usando las relaciones entre los números a_j y b_j obtenemos

$$|A_n| = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & \ldots & b_1 & b_1 \\ 0 & b_2-b_1 & b_2-b_1 & \ldots & b_2-b_1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & b_3-b_2 & \ldots & b_3-b_2 & b_3-b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1}-b_{n-2} & b_{n-1}-b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n-b_{n-1} \end{vmatrix} =$$
$$b_1(b_2-b_1)(b_3-b_2)\ldots(b_{n-1}-b_{n-2})(b_n-b_{n-1}) = \frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}.$$

5. Usando de nuevo las relaciones entre los números a_j y b_j fácilmente obtenemos $M_n \cdot A_n = I_n$ de lo cual se deduce que $M_n^{-1} = A_n$.

8.13. Determinante de I + v w

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ y $v \in \mathbb{K}^{1\times n}$. Demostrar que

$$\det(I_n + vw) = 1 + wv.$$

Solución. Es fácil verificar la igualdad para matrices de órdenes $n+1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ 0 & I_n + vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^t w^t & -w \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I_n \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes y teniendo en cuenta que $v^t w^t = (wv)^t = wv$ por ser wv de orden 1×1 :

$$1 \cdot \det(I_n + vw) = (1 + v^t w^t) \cdot 1 \Rightarrow \det(I_n + vw) = 1 + wv.$$

8.14. Determinante por inducción y sistema lineal

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y para cada par $a, b \in \mathbb{C}$ se considera la matriz

$$A_n(a) = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

y el sistema $A_n(a)X = (0, 0, \dots, 0, b)^t$, donde $X \in \mathbb{C}^{(n,1)}$. Se pide:

1. Calcular los determinantes de $A_1(a),\ A_2(a)$ y $A_3(a)$.
2. Obtener una relación lineal entre los determinantes de $A_n(a),\ A_{n+1}(a)$ y $A_{n+2}(a)$.
3. Hallar, en función de a y n, una expresión del determinante de $A_n(a)$ y demostrar su validez.
4. Determinar todos los valores de a y b para los que el sistema dado es compatible determinado, indeterminado e incompatible.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Los determinantes pedidos son

$$\det A_1(a) = 1 + a,\ \det A_2(a) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ a & 1+a \end{vmatrix} = 1 + a + a^2,$$
$$\det A_3(a) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 0 \\ a & 1+a & 1 \\ 0 & a & 1+a \end{vmatrix} = 1 + a + a^2 + a^3.$$

2. Desarrollando por los elementos de la primera columna

$$\det A_{n+2}(a) = (1+a) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a \end{vmatrix} -$$
$$a \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)\det A_{n+1} - a \det A_n(a).$$

Esta igualdad equivale a

$$\det A_{n+1}(a) = (1+a)\det A_n - a \det A_{n-1}(a) \quad (n \geq 2). \qquad (1)$$

3. El cálculo de los determinantes del primer apartado permite conjeturar la fórmula

$$\det A_n(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n. \qquad (2)$$

Veamos que la fórmula (2) es cierta aplicando el método de inducción.
Paso base. La fórmula (2) es cierta para $n = 1, 2, 3$ como se vio en el primer apartado.
Paso de inducción. Supongamos que (2) es cierta para todo $k \leq n$. Veamos que es cierta para $n + 1$. Usando (1):

$$\det A_{n+1}(a) = (1+a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) - a(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) =$$
$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1} - a - a^2 - a^3 - \ldots - a^n =$$
$$1 + a + a^2 + a^3 \ldots + a^{n+1}.$$

La fórmula (2) es también cierta para $n + 1$.

4. Usando la fórmula de la suma de los términos una progresión geométrica tenemos

$$\det A_n(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}. \quad (a \neq 1)$$

es decir, los valores que anulan a $\det A_n(a)$ son las raíces de orden $n+1$ de la unidad excluida la raíz 1:

$$\det A_n(a) = 0 \Leftrightarrow a = w_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Llamemos B a la matriz ampliada. Si $a \neq w_k$ se verifica $\text{rg}A_n(a) = n = \text{rg}B$ siendo n el número de incógnitas con lo cual el sistema es compatible y determinado. Si $a = w_k$ entonces $\det A_n(a) = 0$ pero $\det A_{n-1}(a) \neq 0$ pues salvo la raíz 1 las raíces de orden $n+1$ de la unidad son distintas de las de orden n (corresponden a los vértices de un polígono regular de $n+1$ y n lados respectivamente con centro el origen). Es decir, $\text{rg}A_n(a) = n-1$. Hallemos el rango de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & 1+a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots &&&&& \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \end{vmatrix} = b\det A_{n-1}(a).$$

Si $b \neq 0$ el rango de B es n y si $b = 0$ el rango de B es $n-1$. Podemos concluir:

$$\begin{cases} a \neq w_k \text{ comp. determinado} \\ a = w_k \begin{cases} b = 0 \text{ incompatible} \\ b \neq 0 \text{ indeterminado.} \end{cases} \end{cases}$$

Capítulo 9

Espacios vectoriales

9.1. Primeras propiedades de los espacios vectoriales

1. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in E$:
(a) $0x = 0$. $\quad (b)$ $\lambda 0 = 0$. $\quad (c)$ $\lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda = 0$ ó $x = 0)$.

2. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in E$:
(a) $-(\lambda x) = (-\lambda x) = \lambda(-x)$.
(b) $(\lambda x = \mu x$ y $x \neq 0) \Rightarrow \lambda = \mu$.
(c) $(\lambda x = \lambda y$ y $\lambda \neq 0) \Rightarrow x = y$.

3. Demostrar que en todo espacio vectorial E, la propiedad conmutativa de la suma de vectores, se puede deducir a partir de los restantes axiomas.

Solución. 1. (a) Tenemos $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$, por tanto $0x = 0x + (-0x) = 0$.
(b) Tenemos $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$, por tanto $\lambda 0 = \lambda 0 + (-\lambda 0) = 0$.
(c) Si $\lambda \neq 0$, existe el inverso λ^{-1} en $\mathbb{K}$. Entonces,

$$\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0 \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)x = 0 \Rightarrow 1x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

2. (a) Tenemos

$$(-\lambda)x + \lambda x = (-\lambda + \lambda)x = 0x = 0 \Rightarrow -(\lambda x) = (-\lambda)x.$$
$$\lambda(-x) + \lambda x = \lambda(-x + x) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow -(\lambda x) = \lambda(-x).$$

(b) Se verifica $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda x - \mu x = 0 \Rightarrow (\lambda - \mu)x = 0$. Como $x \neq 0$, ha de ser $\lambda - \mu = 0$, es decir $\lambda = \mu$.

(c) Se verifica $\lambda x = \lambda y \Rightarrow \lambda x - \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda(x - y) = 0$. Como $\lambda \neq 0$, ha de ser $x - y = 0$, es decir $x = y$.

3. Para todo $x, y \in E$ se verifica:

$$\begin{aligned}(1+1)(x+y) &= 1(x+y) + 1(x+y)\\ &= x + y + x + y. \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+1)(x+y) &= (1+1)x + (1+1)y\\ &= 1x + 1x + 1y + 1y\\ &= x + x + y + y. \qquad (2)\end{aligned}$$

Igualando (1) y (2), queda $x+y+x+y = x+x+y+y$. Cancelando términos, se obtiene $y + x = x + y$.

9.2. Espacio vectorial $\mathbb{K}^n$

1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y definamos en $\mathbb{K}^n$ $(n \geq 1)$ la operación suma:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Definamos además la operación ley externa:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Demostrar que $\mathbb{K}^n$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con las operaciones anteriormente definidas.
Nota. Casos particulares importantes de este espacio vectorial son $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ y $(\mathbb{Z}_p)^n$ (p primo).

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran los vectores $x = (0, -1, 2)$ e $y = (4, 1, 2)$. Determinar el vector $z = 3x - 5y$.

Solución. 1. 1) $(\mathbb{K}^n, +)$ es grupo abeliano.
Interna. Dado que la suma de dos elementos de $\mathbb{K}$ es un elemento de $\mathbb{K}$, la suma de dos elementos de $\mathbb{K}^n$ pertenece a $\mathbb{K}^n$.
Asociativa. Para todo $(x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n),\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ y usando la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_n) + [(y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)]\\ &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)\\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n))\\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n)\\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n)\\ &= [(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)] + (z_1, \ldots, z_n).\end{aligned}$$

Conmutativa. Para todo $(x_1,\dots,x_n),\ (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ y usando la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}&(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\&=(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n)=(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Elemento neutro. Para todo $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, el elemento de $\mathbb{K}^n$, $0=(0,\dots,0)$ satisface:

$$\begin{aligned}&0+x=x+0=(x_1,\dots,x_n)+(0,\dots,0)\\&=(x_1+0,\dots,x_n+0)=(x_1,\dots,x_n)=x.\end{aligned}$$

Elemento simétrico. Para todo $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, el elemento de $\mathbb{K}^n$, $-x=(-x_1,\dots,-x_n)$ satisface:

$$\begin{aligned}&(-x)+x=x+(-x)=(x_1,\dots,x_n)+(-x_1,\dots,-x_n)\\&=(x_1+(-x_1),\dots,x_n+(-x_n))=(0,\dots,0)=0.\end{aligned}$$

Concluimos que $(\mathbb{K}^n,+)$ es grupo abeliano.

2) Se satisfacen los cuatro axiomas de ley externa. En efecto, para todo $(x_1,\dots,x_n),\ (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, para todo $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ y usando conocidas propiedades de $\mathbb{K}$:

1. $\lambda(x+y)=\lambda(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=\lambda(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
$=((\lambda(x_1+y_1),\dots,\lambda(x_n+y_n))=(\lambda x_1+\lambda y_1,\dots,\lambda x_n+\lambda y_n)$
$=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)+(\lambda y_1,\dots,\lambda y_n)=\lambda(x_1,\dots,x_n)+\lambda(y_1,\dots,y_n)$
$=\lambda x+\lambda y.$
2. $(\lambda+\mu)x=(\lambda+\mu)(x_1,\dots,x_n)=((\lambda+\mu)x_1,\dots,(\lambda+\mu)x_n)$
$=(\lambda x_1+\mu x_1,\dots,\lambda x_n+\mu x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)+(\mu x_1,\dots,\mu x_n)$
$=\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x_1,\dots,x_n)=\lambda x+\mu x.$
3. $(\lambda\mu)x=(\lambda\mu)(x_1,\dots,x_n)=((\lambda\mu)x_1,\dots,(\lambda\mu)x_n)$
$=(\lambda(\mu x_1),\dots,\lambda(\mu x_n))=\lambda(\mu x_1,\dots,\mu x_n)$
$=\lambda\,(\mu(x_1,\dots,x_n))=\lambda(\mu x).$
4. $1x=1(x_1,\dots,x_n)=(1x_1,\dots,1x_n)=(x_1,\dots,x_n)=x.$

Concluimos que $\mathbb{K}^n$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con las operaciones dadas.

2. Usando las conocidas operaciones suma y ley externa:

$$\begin{aligned}&z=3x-5y=3(0,-1,2)-5(4,1,2)\\&=(0,-3,6)+(-20,-5,-10)=(-20,-8,-4).\end{aligned}$$

9.3. Espacio vectorial de las matrices sobre un cuerpo

(a) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar que $\mathbb{K}^{m\times n}$ (matrices de órdenes $m \times n$ con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$) es un espacio vectorial con las operaciones habituales suma y producto por un escalar.
Nota. Casos particulares importantes de este espacio vectorial son $\mathbb{Q}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$ y $(\mathbb{Z}_p)^{m\times n}$ (p primo).

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 3}$ se consideran los vectores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar el vector $C = -A + 3C$.

Solución. (a) Veamos que $(\mathbb{K}^{m\times n}, +)$ es un grupo abeliano
1. Interna. Por la propia definición de suma de matrices, es claro que la suma de dos matrices de ordenes $m \times n$ es otra matriz de orden $m \times n$.
2. Asociativa. Para A, B, C matrices de $\mathbb{K}^{m\times n}$, y usando la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] =$$
$$[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)\,.$$

3. Existencia de elemento neutro. Para toda matriz A de $\mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A + 0 = [a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A,$$
$$0 + A = [0] + [a_{ij}] = [0 + a_{ij}] = [a_{ij}] = A.$$

4. Existencia de elemento simétrico. Para toda matriz A de $\mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [0] = 0,$$
$$(-A) + A = [-a_{ij}] + [a_{ij}] = [(-a_{ij}) + a_{ij}] = [0] = 0.$$

5. Conmutativa. Para todo par de matrices A, B de $\mathbb{K}^{m\times n}$, y usando la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{K}$:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A.$$

Veamos que se verifican las propiedades de ley externa. Es claro que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se verifica $\lambda A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
Usando las definiciones de suma de matrices, de producto de un escalar por una matriz, y conocidas propiedades de la suma y producto en $\mathbb{K}$:

1. $\lambda(A + B) = \lambda\left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})]$
$= [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] = \lambda A + \lambda B.$

$$2. \; (\lambda+\mu)A = (\lambda+\mu)[a_{ij}] = [(\lambda+\mu)a_{ij}] = [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}]$$
$$= [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \mu[a_{ij}] = \lambda A + \mu A.$$

$$3. \; \lambda(\mu A) = \lambda(\mu[a_{ij}]) = \lambda[\mu a_{ij}] = [\lambda(\mu a_{ij})] = [(\lambda\mu)a_{ij}] = (\lambda\mu)[a_{ij}] = (\lambda\mu)A.$$

$$4. \; 1A = 1[a_{ij}] = [1a_{ij}] = [a_{ij}] = A.$$

(b) Usando las conocidas operaciones en $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$C = -A + 3C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 2 \\ -6 & 14 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.4. Espacio vectorial $\mathbb{K}[x]$

(a) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de los polinomios en la indeterminada x y coeficientes en $\mathbb{K}$. Se consideran las operaciones suma y ley externa habituales. Demostrar de manera esquemática, que $\mathbb{K}[x]$ es espacio vectorial con las operaciones mencionadas.
Nota. Casos particulares importantes de este espacio vectorial son $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ y $(\mathbb{Z}_p)[x]$ (p primo).

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ se consideran los vectores $p(x) = 3x^2 - x + 5$ y $q(x) = x^3 + x$. Determinar el vector $r(x) = 2p(x) - 4q(x)$.

Solución. (a) La suma de dos elementos de $\mathbb{K}[x]$, claramente pertenece a $\mathbb{K}[x]$. Debido a la asociatividad de la suma en $\mathbb{K}$, se verifica la asociatividad en $\mathbb{K}[x]$. Debido a la conmutatividad de la suma en $\mathbb{K}$, se verifica la conmutatividad en $\mathbb{K}[x]$. El polinomio nulo 0 de $\mathbb{K}[x]$, verifica $p(x) + 0 = p(x)$ $\forall p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Para toda $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, el polinomio $-p(x) \in \mathbb{K}[x]$ verifica $p(x) + (-p(x)) = 0$. Es decir, $(\mathbb{K}[x], +)$ es grupo abeliano.

Considerando la propiedades de los elementos de $\mathbb{K}$, y las definiciones de suma y ley externa relativas a polinomios, podemos verificar $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$:

1. $\lambda\,(p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$.
2. $(\lambda + \mu)p(x) = \lambda p(x) + \mu p(x)$.
3. $\lambda\,(\mu p(x)) = (\lambda\mu)p(x)$.
4. $1p(x) = p(x)$.

(b) Usando las conocidas operaciones en $\mathbb{R}[x]$:

$$r(x) = 2p(x) - 4q(x) = \left(6x^2 - 2x + 10\right) - \left(4x^3 + 4x\right)$$
$$= -4x^3 + 6x^2 - 6x + 10.$$

9.5. Espacio vectorial de las funciones reales

(a) Sea X un conjunto distinto del vacío y sea $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$. Se definen en $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ las operaciones:
Suma. Para todo f,g elementos de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X.$$

Ley externa. Para todo $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Demostrar que $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones anteriormente definidas.
Nota. Un caso particular importante es $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (espacio vectorial de las funciones reales de variable real).

(b) En el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ se consideran los vectores f y g definidos por $f(x) = x + e^x$ y $g(x) = 7x + 2\cos x$. Determinar el vector $h = 3f + 4g$.

Solución. (a) 1) $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+)$ es grupo abeliano.
Interna. Claramente, la suma de dos funciones de X en $\mathbb{R}$ es función de X en $\mathbb{R}$.
Asociativa. Para todo $f,g,h \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, para todo $x \in X$ y usando la propiedad asociativa de la suma de números reales:

$$\begin{aligned}&[(f+g)+h](x) = [(f+g)(x)] + h(x) = [f(x)+g(x)] + h(x)\\ &= f(x) + [g(x)+h(x)] = f(x) + [(g+h)(x)] = [f+(g+h)](x).\end{aligned}$$

Por la definición de igualdad de funciones, $(f+g)+h = f+(g+h)$.
Elemento neutro. Consideremos la función $0 : X \to \mathbb{R}$ definida por $0(x) = 0$ para todo $x \in X$. Entonces, para cualquier $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}&(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow f + 0 = f,\\ &(0+f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \Rightarrow 0 + f = f,\end{aligned}$$

por tanto la función 0 es elemento neutro.
Elemento simétrico. Para cada $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, definamos la función $-f$ de la siguiente manera: $(-f)(x) = -f(x),\ x \in X$. Entonces, para todo $x \in X$:

$$\begin{aligned}&[f+(-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 \Rightarrow f + (-f) = 0,\\ &[(-f)+f](x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 \Rightarrow (-f) + f = 0,\end{aligned}$$

es decir todo elemento de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ tiene simétrico.

Conmutativa. Para todo $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, para todo $x \in X$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de números reales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f + g = g + f.$$

2) Se cumplen los cuatro axiomas de ley externa. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, para todo $x \in X$ y usando la definición de igualdad de funciones:

1. $(\lambda(f+g))(x) = \lambda((f+g)(x)) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$
$= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x) \Rightarrow \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$
2. $((\lambda + \mu)f)(x) = (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x)$
$= (\lambda f + \mu f)(x) \Rightarrow (\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f.$
3. $((\lambda\mu)f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda((\mu f)(x)) = (\lambda(\mu f))(x)$
$\Rightarrow (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f).$
4. $(1f)(x) = 1f(x) = f(x) \Rightarrow 1f = f.$

Observación. De manera análoga y sustituyendo $\mathbb{R}$ por cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ se demuestra que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ es espacio vectorial.
(b) Usando las conocidas operaciones en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} h(x) &= (3f + 4g)(x) = 3f(x) + 4g(x) = 3x + 3e^x + 28x + 8\cos x \\ &= 31x + 3e^x + 8\cos x \quad (\forall x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

9.6. Subcuerpo como espacio vectorial

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $k \subset \mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{K}$. Se considera en $\mathbb{K}$, su suma y por otra parte, la operación ley externa $k \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(\lambda, x) \to \lambda x$, en donde λx representa el producto en $\mathbb{K}$. Demostrar que $\mathbb{K}$ es espacio vectorial sobre el cuerpo k, con las operaciones dadas.
Nota. Un caso particular se obtiene para $k = \mathbb{K}$, es decir todo cuerpo es espacio vectorial sobre sí mismo con las operaciones mencionadas.

Solución. 1) Dado que $(\mathbb{K}.+, \cdot)$ es por hipótesis un cuerpo, $(\mathbb{K}.+)$ es grupo abeliano.

2) Sean $\lambda, \mu \in k$ y $x, y \in \mathbb{K}$. Dado que $k \subset \mathbb{K}$, los elementos λ, μ, x, e y pertenecen a $\mathbb{K}$. Usando las propiedades de la estructura de cuerpo en $\mathbb{K}$,

obtenemos de manera inmediata:

1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.
2. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$.
3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu x)$.
4. $1x = x$.

Concluimos que $\mathbb{K}$ es espacio vectorial sobre el cuerpo k, con las operaciones dadas.

9.7. Subespacios vectoriales, caracterización

1. Analizar si $F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. Analizar si $F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

3. Analizar si $F = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p(1)\}$ es subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

4. Se considera el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Analizar en cada caso si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son o no subespacios.
1) $F_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 x_2 = 0\}$.
2) $F_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 + \ldots + x_n = 1\}$.
3) $F_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.
4) $F_4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \in \mathbb{Z}\}$.

5. Sea $E = \mathbb{K}^{n \times n}$ el espacio vectorial usual de las matrices cuadradas de ordenes $n \times n$ y con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea el subconjunto de E dado por $F = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ A^t = A\right\}$, es decir el subconjunto de E formado por las matrices simétricas. Demostrar que F es subespacio de E.

6. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real usual de las funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se considera el subconjunto de $E : F = \{f \in E : f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$ es decir, el subconjunto de las funciones pares. Demostrar que F es subespacio de E.

7. Estudiar si $G = \{p \in \mathbb{R}[x] : p'(x) = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

8. Averiguar si $F = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^2 = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $F \subset E$. Demostrar que F es subespacio vectorial de E, si y sólo si se cumplen las tres siguientes

condiciones:
(i) $0 \in F$.
(ii) Para todo $x \in F$ y para todo $y \in F$ se verifica $x + y \in F$.
(iii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in F$ se verifica $\lambda x \in F$.

Solución. 1. (i) El vector nulo $0 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ satisface $0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$, por tanto pertenece a F.
(ii) Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ son vectores de F, satisfacen $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ e $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$. El vector suma $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ verifica

$$\begin{aligned}&(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)\\&= (x_1 - x_2 + 2x_3) + (y_1 - y_2 + 2y_3) = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

es decir, las componentes de $x + y$ cumplen la condición para pertenecer a F, luego $x + y \in F$.
(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, x_3) \in F$, el vector $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ verifica

$$\lambda x_1 - \lambda x_2 + 2\lambda x_3 = \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

es decir, las componentes de λx cumplen la condición para pertenecer a F, luego $\lambda \in F$. Concluimos que F subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. (i) El vector nulo $0 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ satisface $0^2 - 0^2 = 0$, por tanto pertenece a F.
(ii) Elijamos los vectores $x = (1, 1, 0)$ e $y = (1, -1, 0)$. Claramente x e y pertenecen a F, sin embargo, $x + y = (1, 0, 0)$ no pertenece. Concluimos que F no es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

3. (i) El vector cero de $\mathbb{R}[x]$ es el polinomio cero, que claramente satisface la condición para pertenecer a F.
(ii) Si $p, q \in F$, se verifica $(p+q)(0) = p(0)+q(0) = p(1)+q(1) = (p+q)(1)$, es decir, $p + q \in F$.
(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in F$, se verifica $(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = \lambda p(1) = (\lambda p)(1)$, es decir, $\lambda p \in F$. Concluimos que F es subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

4. 1) (i) El vector cero de $\mathbb{R}^n$ esto es $(0, \ldots, 0)$ pertenece a F_1 pues $x_1 x_2 = 0 \cdot 0 = 0$. (ii) Elijamos $x = (1, 0, \ldots, 0)$, $y = (0, 1, \ldots, 0)$. Evidentemente x e y pertenecen a F_1, sin embargo $x + y = (1, 1, \ldots, 0) \notin F_1$. Es decir, F_1 no es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2) (i) $(0, \ldots, 0) \notin F_2$ pues $x_1 + \ldots + x_n = 0 + \ldots + 0 = 0 \neq 1$. Es decir, F_2 no es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

3) (i) $(0,\ldots,0) \in F_3$ pues $x_1 + \ldots + x_n = 0 + \ldots + 0 = 0$. (ii) Consideremos los vectores $x = (x_1,\ldots,x_n) \in F_3$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in F_3$, entonces por la definición de F_3 se verifica $x_1 + \ldots + x_n = 0$ e $y_1 + \ldots + y_n = 0$. Tenemos $x + y = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n)$ y además

$$(x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n) = (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) = 0 + 0 = 0,$$

es decir $x + y \in F_3$. (iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1,\ldots,x_n) \in F_3$, entonces $x_1 + \ldots + x_n = 0$ y además $\lambda x = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$. Por tanto $\lambda x_1 + \ldots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \ldots + x_n) = \lambda 0 = 0$ es decir, $\lambda x \in F_3$. Concluimos que F_3 es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4) (i) $(0,\ldots,0) \in F_4$ pues $x_1 = 0 \in \mathbb{Z}$. (ii) Sean $x = (x_1,\ldots,x_n) \in F_4$ e $y = (y_1,\ldots,y_n) \in F_4$, entonces $x_1 \in \mathbb{Z}$, $y_1 \in \mathbb{Z}$. Tenemos $x + y = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n)$ y además $x_1 + y_1 \in \mathbb{Z}$, es decir $x + y \in F_4$. (iii) Elijamos $\lambda = 1/2 \in \mathbb{R}$ y $x = (1,0,\ldots,0)$. Evidentemente $x \in F_4$, sin embargo $\lambda x = (1/2,0,\ldots,0) \notin F_4$.. Concluimos que F_4 no es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

5. (i) La matriz nula 0 pertenece a F pues $0^t = 0$.
(ii) Sean $A,\ B$ matrices de F, entonces $A^t = A$ y $B^t = B$. Como la traspuesta de la suma es la suma de las traspuestas, tenemos $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$ es decir, $A + B \in F$.
(iii) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \in F$, entonces $A^t = A$. Como la traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar por la traspuesta de la matriz, tenemos $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$ es decir, $\lambda A \in F$. Concluimos pues que F es subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$.
Nota. De manera totalmente análoga se demostraría que el subconjunto de $\mathbb{K}^{n\times n}$ formado por las matrices antisimétricas es también subsespacio de E.

6. (i) El vector cero de E es la función $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $0(t) = 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, por tanto $0(-x) = 0(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Es decir, $0 \in F$.
(ii) Sean $f, g \in F$. Usando la definición de suma de funciones tenemos para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

es decir $f + g \in F$.
(iii) Sean $\lambda \in \mathbb{R},\ f \in F$. Usando la definición de producto de un escalar por una función tenemos para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$

por tanto $\lambda f \in F$. Concluimos pues que F es subespacio de E.
Nota. De manera análoga se demostraría que el subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ for-

mado por las funciones impares es también subespacio de E.

7. (i) El vector cero de $\mathbb{R}[x]$ es el polinomio cero, que claramente satisface la condición para pertenecer a G.
(ii) Si $p, q \in G$, se verifica $(p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) = 0+0 = 0$, es decir $p+q \in G$.
(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in G$, se verifica $(\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda \cdot 0 = 0$, es decir, $\lambda p \in G$. Concluimos que G es subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

8. (i) El vector cero de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz cero, que claramente satisface la condición para pertenecer a F.
(ii) Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $A^2 = 0$, $B^2 = 0$ y $(A+B)^2 \neq 0$ como fácilmente se comprueba. Es decir, A y B pertenecen a F pero no así $A+B$. Concluimos que F no es subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Supongamos que $F \subset E$ es subespacio vectorial de E, entonces (por definición de subespacio) F es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Como consecuencia inmediata de los axiomas de espacio vectorial, se verifican las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema.

Recíprocamente, supongamos que se verifican las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema. De (i) deducimos que $F \neq \emptyset$. Por otra parte para todo $y \in F$ tenemos por (iii) que $-y = (-1)y \in F$. De (ii) deducimos $x+(-y) = x-y \in F$. Es decir, $(F,+)$ es grupo abeliano. También de (iii) deducimos que la ley externa está bien definida sobre F y además se cumplen sus correspondientes cuatro axiomas de igualdad. Todo esto implica que F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y por tanto, subespacio de E.

9.8. Suma e intersección de subespacios

1. Demostrar que la intersección de dos subespacios de un espacio vectorial E, es también subespacio de E.

2. Sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia de subespacios de un espacio vectorial E. Demostrar que $\bigcap_{i\in I} F_i$ es también subespacio de E.

3. Sean F_1 y F_2, subespacios de un espacio vectorial E. Demostrar que

$$F_1 + F_2 = \{x \in E : \exists u \in F_1 \; \exists v \in F_2 \text{ con } x = u + v\}$$

es subespacio de E (*subespacio suma* de F_1 y F_2).

4. Sean $F_1, \ldots, F_m$, subespacios de un espacio vectorial E. Demostrar que

$$F_1 + \ldots + F_m = \{x \in E : \exists u_1 \in F_1 \ldots \exists u_m \in F_m \text{ con } x = u_1 + \ldots + u_m\}$$

es subespacio de E (*subespacio suma* de $F_1, \ldots, F_m$).

5. Demostrar que la unión de subespacios vectoriales, no es en general subespacio vectorial.

6. Demostrar que la suma de dos subespacios vectoriales es el menor de todos los subespacios que contienen a la unión.

7. Sean F_1, F_2, F_3 subespacios de un espacio vectorial E tales que:

$$F_1 + F_3 = F_2 + F_3, \quad F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3, \quad F_1 \subset F_2.$$

Demostrar que $F_1 = F_2$.

Solución. 1. Sean F_1 y F_2, subespacios de E. Veamos que $F_1 \cap F_2$ también lo es.
(i) Como F_1 y F_2 son subespacios de E, el vector 0 pertenece a ambos, luego $0 \in F_1 \cap F_2$.
(ii) Si $x, y \in F_1 \cap F_2$, entonces $x \in F_1$, $x \in F_2$, $y \in F_1$, e $y \in F_2$. Por ser F_1 y F_2 subespacios, se verifica $x + y \in F_1$ y $x + y \in F_2$, es decir $x + y \in F_1 \cap F_2$.
(iii) Si λ es escalar y $x \in F_1 \cap F_2$, entonces $x \in F_1$ y $x \in F_2$. Por ser F_1 y F_2 subespacios, se verifica $\lambda x \in F_1$ y $\lambda x \in F_2$, es decir $\lambda x \in F_1 \cap F_2$.

2. (i) Para todo $i \in I$, F_i es subespacio de E, luego $0 \in F_i$ para todo $i \in I$. Esto implica que $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
(ii) Si $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$, entonces $x \in F_i$, e $y \in F_i$, para todo $i \in I$. Por ser F_i subespacio para todo $i \in I$, se verifica $x + y \in F_i$ para todo $i \in I$, es decir $x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
(iii) Si λ es escalar y $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$, entonces $x \in F_i$ para todo $i \in I$. Por ser F_i subespacio para todo $i \in I$, se verifica $\lambda x \in F_i$, para todo $i \in I$, es decir $\lambda x \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

3. (i) El vector 0 pertenece a F_1 y F_2 por ser estos subespacios, y además $0 = 0 + 0$, luego $0 \in F_1 + F_2$.

(ii) Si $x, x' \in F_1 + F_2$, entonces $x = u + v$, $x' = u' + v'$ con $u, u' \in F_1$ y $v, v' \in F_2$. Entonces, $x + x' = (u + u') + (v + v')$. Como F_1 y F_2 son subespacios, $u + u' \in F_1$ y $v + v' \in F_2$, por tanto $x + x' \in F_1 + F_2$
(iii) Si λ es escalar y $x \in F_1 + F_2$, entonces $x = u + v$ con $u \in F_1$ y $v \in F_2$. Entonces, $\lambda x = \lambda u + \lambda v$. Como F_1 y F_2 son subespacios, $\lambda u \in F_1$ y $\lambda v \in F_2$, por tanto $\lambda x \in F_1 + F_2$.

4. (i) El vector 0 pertenece a $F_1, \ldots, F_m$ por ser estos, subespacios, y además $0 = 0 + \ldots + 0$, luego $0 \in F_1 + \ldots + F_m$.
(ii) Si $x, x' \in F_1 + \ldots + F_m$, entonces $x = u_1 + \ldots + u_n$, $x' = u_1' + \ldots + u_m'$ con $u_i, u_i' \in F_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Se verifica:

$$x + x' = (u_1 + u_1') + \ldots + (u_m + u_m'),$$

y como los F_i son subespacios, $u_i + u_i' \in F_i$ para todo i, por tanto $x + x' \in F_1 + \ldots + F_m$
(iii) Si λ es escalar y $x \in F_1 + \ldots + F_m$, entonces $x = u_1 + \ldots + u_m$ con $u_i \in F_i$ para todo i. Se verifica $\lambda x = \lambda u_1 + \ldots + \lambda u_m$ y como los F_i son subespacios, $\lambda u_i \in F_i$ para todo i, por tanto $\lambda x \in F_1 + \ldots + F_m$.

5. Elijamos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dados por $F_1 = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $F_1 = \{(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$. Es inmediato comprobar que ambos son subespacios de $\mathbb{R}^2$.
El vector $x = (1, 0)$ pertenece a F_1 y el $y = (0, 1)$, a F_2, luego ambos pertenecen a $F_1 \cup F_2$. Sin embargo $x + y = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$, es decir $F_1 \cup F_2$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

6. Sean F_1, F_2 subespacios vectoriales del espacio vectorial E. Si $x \in F_1 \cup F_2$, o bien $x \in F_1$, o bien $x \in F_2$. Si $x \in F_1$, entonces $x = x + 0 \in F_1 + F_2$, y si $x \in F_2$, entonces $x = 0 + x \in F_1 + F_2$. Hemos demostrado que $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$.
Vamos ahora que $F_1 + F_2$, es el menor de entre todos los subespacios de E que contienen a $F_1 \cup F_2$. En efecto, sea F subespacio de E con $F_1 \cup F_2 \subset F$. Si $x \in F_1 + F_2$, entonces $x = u + v$ con $u \in F_1$ y $v \in F_2$, luego u y v están en $F_1 \cup F_2$ y por tanto en F. Como F es subespacio, necesariamente $x = u + v \in F$. En consecuencia, $F_1 + F_2 \subset F$, lo cual concluye la demostración.

7. Sea $u \in F_2$. Entonces, $u \in F_2 + F_3 = F_1 + F_3$, luego existen $u_1 \in F_1$ y $u_3 \in F_3$ tales que $u = u_1 + u_3$. De la hipótesis $F_1 \subset F_2$, deducimos que $u_1 \in F_2$ y al ser $u_3 = u + (-u_1)$ con $u \in F_2$ y $-u_1 \in F_2$, también $u_3 \in F_2$. Es decir, $u_3 \in F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3$, luego $u_3 \in F_1$. Tenemos por tanto que $u = u_1 + u_3$ es la suma de dos vectores del subespacio F_1, lo cual implica que

$u \in F_1$. Hemos demostrado que $F_2 \subset F_1$, que junto con la hipótesis $F_1 \subset F_2$, implica $F_1 = F_2$.

9.9. Suma directa de dos subespacios

1. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^2$ dados por $F_1 = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $F_2 = \{(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

2. Sea $\mathbb{K}^{n \times n}$ el espacio vectorial real usual de las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ los subespacios de $\mathbb{K}^{n \times n}$ formados por las matrices simétricas y antisimétricas respectivamente. Demostrar que si carac$(\mathbb{K}) \neq 2$, entonces $\mathbb{K}^{n \times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

3. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real usual de las funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sean los subespacios de E:

$$\mathcal{P} = \{f \in E : f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

formado por las funciones pares e

$$\mathcal{I} = \{f \in E : f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

formado por las funciones impares. Demostrar que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

4. Sea E el espacio vectorial de las funciones reales y continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se consideran los subconjuntos de E dados por

$$F = \{f \in E : \int_a^b f(t)\, dt = 0\}, \quad G = \{f \in E : f \text{ es constante}\}.$$

(a) Demostrar que F y G son subespacios de E. (b) Demostrar que F y G son suplementarios en E. (Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

5. Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se consideran los subespacios de V :

$$U_1 = \{f \in V : f(0) = f(1) = 0\}, U_2 = \{f \in V : f(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que U_1 y U_2 son suplementarios.

6. Sea $p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado ≥ 1. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}[x]$:

$$F_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) \text{ es múltiplo de } p_1(x)\},$$
$$F_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}\, p(x) < \text{grado}\, p_1(x)\}.$$

Demostrar que $\mathbb{R}[x] = F_1 \oplus F_2$.

Solución. 1. Recordemos que si E es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y F_1 y F_2 son subespacios de E, se dice que E es *suma directa* de estos subespacios o bien que F_1 y F_2 son *suplementarios en* E, y se escribe $E = F_1 \oplus F_2$, si y sólo si se verifica
(i) $E = F_1 + F_2$. (ii) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. $\square$

Si $x = (x_1, x_2) \in F_1 \cap F_2$, entonces $x \in F_1$ y $x \in F_2$, por tanto $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$ lo cual implica que $x = 0$. Hemos demostrado que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Sea ahora $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces podemos expresar:

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2).$$

Como $(x_1, 0) \in F_1$ y $(0, x_2) \in F_2$, $x \in F_1 + F_2$. Hemos demostrado que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

2. Sea $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, entonces $A \in \mathcal{S}$ y $A \in \mathcal{A}$ lo cual implica $A^T = A$ y $A^T = -A$. Restando estas dos últimas igualdades obtenemos $(1+1)A = 0$. Como carac$(\mathbb{K}) \neq 2$, $1 + 1 \neq 0$ y por tanto $A = 0$. Es decir, $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y supongamos que A se puede expresar en la forma $A = A_1 + A_2$ con A_1 simétrica y A_2 antisimétrica. Trasponiendo la igualdad anterior tendríamos $A^T = A_1 - A_2$. Sumando y restando las dos igualdades obtenemos que caso de existir la descomposición, A_1 y A_2 han de ser necesariamente

$$A_1 = \frac{1}{1+1}\left(A + A^T\right)\ ,\ A_2 = \frac{1}{1+1}\left(A - A^T\right).$$

Denotemos por 2 al elemento $1 + 1 \neq 0$ de $\mathbb{K}$.

$$A_1^T = \left(\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_1,$$

$$A_2^T = \left(\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_2,$$

y claramente $A = A_1 + A_2$. Hemos pues demostrado que toda matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es suma de una simétrica y otra antisimétrica, por tanto $\mathbb{K}^{n\times n} = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. Concluimos que $\mathbb{K}^{n\times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

3. Sea $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, entonces $f \in \mathcal{P}$ y $f \in \mathcal{I}$ lo cual implica $f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Restando las dos igualdades anteriores obtenemos $2f(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ o bien $f(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, es decir f es la función

cero: $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

Sea $f \in E$ y supongamos que f se puede expresar en la forma $f = f_1 + f_2$ con f_1 par y f_2 impar, entonces $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sustituyendo x por $-x$ obtenemos $f(-x) = f_1(x) - f_2(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sumando y restando las dos igualdades obtenemos que caso de existir la descomposición, f_1 y f_2 han de ser necesariamente

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \ , \ f_2(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

Por otra parte

$$f_1(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = f_1(x), \ f_2(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -f_2(x),$$

y claramente $f = f_1 + f_2$. Hemos pues demostrado que toda funcion $f \in E$ es suma de una par y otra impar, por tanto $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Concluimos que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

4. (a) El vector cero de E es la función $0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante $0(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y sabemos que es continua. Además $\int_a^b 0 \ dt = 0$, es decir, $0 \in F$. Por otra parte, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para $f, g \in F$ sabemos que $\lambda f + \mu g$ es continua. Además

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) \ dt = \lambda \int_a^b f(t) \ dt + \mu \int_a^b g(t) \ dt = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$

es decir $\lambda f + \mu g \in F$. Concluimos que F es subespacio de E. La función cero es constante, las funciones constantes son continuas y cualquier combinación lineal de funciones constante es constante. En consecuencia G es subespacio de E.

(b) Veamos que $F \cap G = \{0\}$. Efectivamente, si $f \in F \cap G$ entonces $f \in F$ y $f \in G$ lo cual implica $\int_a^b f(t) \ dt = 0$ y $f(t) = k$ (constante). Pero $\int_a^b k \ dt = k(b - a) = 0$. Como $b - a \neq 0$ se concluye que $f(t) = k = 0$.
Veamos ahora que $E = F + G$. Sea $f \in E$ y escribamos $f = (f - k) + k$ con k constante. Las funciones $f - k$ y k son continuas y $k \in G$. Basta imponer que $f - k \in F$:

$$f - k \in F \Leftrightarrow \int_a^b (f(t) - k) dt = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t) dt = k(b - a) \Leftrightarrow k = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

Eligiendo el k anterior, se verifica $f = (f - k) + k$ con $f - k \in F$ y $k \in G$. Hemos demostrado que $F \cap G = \{0\}$ y $E = F + G$, es decir que F y G son suplementarios en E.

5. Si $f \in U_1 \cap U_2$, entonces $f \in U_1$ y $f \in U_2$. Por pertenecer a U_2, f es de la forma $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Por pertenecer a U_1, se verifica $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$, es decir $0 = b$ y $a + b = 0$, luego $a = b = 0$. La función f es por tanto la función nula de V. Hemos demostrado que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Sea $f \in V$. Podemos expresar:

$$f(x) = (f(x) - ax - b) + (ax + b).$$

El sumando $ax + b$ pertenece a U_2 para cualquier par $a, b \in \mathbb{R}$. Veamos si existen a y b de tal manera que el primer sumando $g(x) = f(x) - ax - b$ pertenezca a U_1. Para ello se ha de verificar $g(0) = g(1) = 0$, o de forma equivalente,

$$\begin{cases} f(0) - b = 0 \\ f(1) - a - b = 0, \end{cases}$$

que proporciona los valores $a = f(1) - f(0)$ y $b = f(0)$. Es decir, todo vector de V es suma de uno de U_1 y otro de U_2 o equivalentemente $V = U_1 + U_2$. Concluimos que U_1 y U_2 son suplementarios.

6. Sea $p(x) \in F_1 \cap F_2$. Entonces, por pertenecer a F_1, existe $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = q(x)p_1(x)$. Por pertenecer a F_2, $\operatorname{grado} p(x) < \operatorname{grado} p_1(x)$. Necesariamente ha de ser $q(x) = 0$, pues si no fuera así, tendríamos $\operatorname{grado} p(x) \geq \operatorname{grado} p_1(x)$, lo cual es absurdo. Por tanto $p(x) = 0p_1(x) = 0$. Hemos demostrado que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Efectuando la división euclídea de $p(x)$, podemos expresar:

$$p(x) = q(x)p_1(x) + r(x)(\operatorname{grado} r(x) < \operatorname{grado} p_1(x)),$$

con $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Pero $q(x)p_1(x) \in F_1$ y $r(x) \in F_2$, luego $\mathbb{R}[x] = F_1 + F_2$. Concluimos que $\mathbb{R}[x] = F_1 \oplus F_2$.

9.10. Suma directa de varios subespacios

1. Demostrar que las tres siguientes afirmaciones son equivalentes
(a) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_m$.
(b) $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$ y la descomposición de todo vector $x \in E$ en la forma $x = v_1 + v_2 + \ldots + v_m$ con $v_i \in F_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$ es única.
(c) $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$ y la igualdad $v_1 + v_2 + \ldots + v_m = 0$ con $v_i \in F_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$ implica $v_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

2. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$ dados por $F_1 = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0, \beta, 0) : \beta \in \mathbb{R}\}$ y $F_3 = \{(0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$ Demostrar que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

3. Sea E el espacio vectorial real de las funciones reales definidas sobre $[0, 1]$. Sean por otra parte los subespacios de E

$$F_1 = \{\ f \in E : f \text{ es nula fuera de } [0, 1/3]\ \},$$
$$F_2 = \{\ f \in E : f \text{ es nula fuera de } (1/3, 2/3)\ \},$$
$$F_3 = \{\ f \in E : f \text{ es nula fuera de } [2/3, 1]\ \}.$$

Demostrar que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Solución. 1. Recordamos que si E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $F_1, F_2, \ldots, F_m$ son subespacios de E, se dice que E es suma directa de estos subespacios, si y sólo si se verifica (i) $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$.
(ii) Para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ se verifica $F_i \bigcap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$ o dicho de otra forma, la intersección de cada subespacio con la suma de los demás ha de ser el vector nulo.
Notas. 1) Para $m = 2$ esta definición coincide con la ya dada de suma directa de dos subespacios.
2) Si se cumplen las condiciones (i) y (ii) anteriores se escribe $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_m$. □

$(a) \Rightarrow (b)$. Sea $v \in E$. Como $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$, podemos expresar $v = v_1 + \ldots v_m$ con $v_1 \in F_1, \ldots, v_m \in F_m$. Supongamos que $v = v_1' + \ldots + v_m'$ con $v_1' \in F_1$, ..., $v_m' \in F_m$. Entonces $v_1 - v_1' = (v_2' - v_2) + \ldots + (v_m' - v_m)$. Ahora bien,

$$v_1 - v_1' \in F_1 \text{ y } (v_2' - v_2) + \ldots + (v_m' - v_m) \in F_2 + \ldots + F_m.$$

Como $F_1 \cap (F_2 + \ldots + F_m) = \{0\}$ se deduce $v_1 - v_1' = 0$, o sea $v_1 = v_1'$. Cambiando los índices. concluimos de forma análoga que $v_2 = v_2'$, $\ldots, v_m = v_m'$. Queda demostrado (b).

$(b) \Rightarrow (c)$. Por hipótesis se verifica $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$. Sean ahora $v_1 \in F_1$, ... ,$v_m \in F_m$ tales que $v_1 + \ldots + v_m = 0$. La igualdad $v_1 + \ldots + v_m = 0 + \ldots + 0$ y la hipótesis de unicidad en (b) implican que $v_1 = 0$, ... , $v_m = 0$. Queda probado (c).

$(c) \Rightarrow (a)$. Sea $w \in F_1 \cap (F_2 + \ldots + F_m)$. Como $w \in F_2 + \ldots + F_m$ podemos expresar $w = v_2 + \ldots + v_m$ con $v_2 \in F_2, \ \ldots, v_m \in F_m$. Entonces $(-w) + v_2 + \ldots + v_m = 0$ con $-w \in F_1$, $v_2 \in F_2$, $\ldots v_m \in F_m$.

La hipótesis hecha en (c) implica $-w = 0$ lo cual demuestra que

$$F_1 \cap (F_2 + \ldots + F_m) = \{0\}.$$

Cambiando los índices se demuestra de forma análoga que $F_i \bigcap \left(\sum_{j\neq i} F_j\right) = \{0\}$ para todo i.

2. Todo vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar en la forma:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3),$$

y dado que $(x_1, 0, 0) \in F_1$, $(0, x_2, 0) \in F_2$ y $(0, 0, x_3) \in F_3$, se verifica $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$.
Sean ahora, $v_1 = (\alpha, 0, 0) \in F_1$, $v_2 = (0, \beta, 0) \in F_2$ y $v_3 = (0, 0, \gamma)$ tales que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} &v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

3. Sea $f \in E$ y consideremos las funciones $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0, 1/3] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 1/3], \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (1/3, 2/3) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (1/3, 2/3), \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [2/3, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [2/3, 1). \end{cases}$$

Claramente $f_i \in F_i$ para todo $i = 1, 2, 3$ y $f = f_1 + f_2 + f_3$ es decir, $E = F_1 + F_2 + F_3$. Por otra parte, de la igualdad $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ con $f_i \in F_i$ con $i = 1, 2, 3$ fácilmente deducimos que $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Concluimos pues que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

9.11. Combinación lineal de vectores

1. En el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^2$ estudiar si el vector $x = (-14, 8)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (-1, 7)$, $v_2 = (4, 2)$.

2. En el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 estudiar si A es combinación lineal de B y C siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. En el espacio vectorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ demostrar que:
(a) $\cos^2 x$ es combinación lineal de 1 y $\cos 2x$.
(b) $(\cos(x+1))(\cos(x-1))$ es combinación lineal de 1 y $\cos^2 x$.

4. Sea el subconjunto infinito de $\mathbb{R}[x]$, $S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. Demostrar que $\mathbb{R}[x] = \langle S \rangle$.

5. Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset E$. Demostrar que:
(a) $L[S]$ es subespacio vectorial de E.
(b) $L[S]$ es el menor de todos los subespacios vectoriales de E que contienen a S.

Solución. 1. Expresemos $(-14, 8) = \lambda_1(-1, 7) + \lambda_2(4, 2)$. Esta igualdad equivale al sistema

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 4\lambda_2 = -14 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 = 8, \end{cases}$$

y escalonando obtenemos que es compatible (en concreto, que tiene como única solución $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$). En consecuencia x es combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2$.

2. Expresemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta igualdad equivale al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_2 = 1 \\ 0 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

que claramente no es compatible, en consecuencia A no es combinación lineal de B y C.

3. (a) Usando conocidas fórmulas de trigonometría:

$$\begin{aligned}&\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)\\&= -1 + 2\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = (1/2)\cdot 1 + (1/2)\cos 2x.\end{aligned}$$

Es decir, $\cos^2 x$ es combinación lineal de 1 y $\cos 2x$.
(b) Usando conocidas fórmulas de trigonometría

$$\begin{aligned}&(\cos(x+1))(\cos(x-1)) = (\cos x\cos 1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 1)(\cos x \cos 1 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 1)\\&= \cos^2 x \cos^2 1 - \sin^2 x \sin^2 1 = \cos^2 x\cos^2 1 - (1-\cos^2 x)\sin^2 1\\&= (-\operatorname{sen}^2 1)\cdot 1 + (\cos^2 1 + \sin^2 1)\cdot \cos^2 x = (-\operatorname{sen}^2 1)\cdot 1 + 1\cdot\cos^2 x.\end{aligned}$$

Es decir, $(\cos(x+1))(\cos(x-1))$ es combinación lineal de 1 y $\cos^2 x$.

4. Claramente, $\langle S\rangle \subset \mathbb{R}[x]$ por ser $\mathbb{R}[x]$ espacio vectorial. Por otra parte, si $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, entonces $p(x)$ es de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ con todos los $a_i \in \mathbb{R}$, o bien:

$$p(x) = a_0\cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

lo cual implica que $p(x)\in\langle S\rangle$ al ser combinación lineal de un subconjunto finito de S. Concluimos que $\mathbb{R}[x] = \langle S\rangle$.

5. (a) El vector 0 se puede expresar como $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m$, es decir $0\in L[S]$. Sean ahora $x, y\in L[S]$, entonces $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$, $y = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m \quad (\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K})$. Sumando obtenemos

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_m + \mu_m)v_m,$$

con $\lambda_i + \mu_i \in \mathbb{K}$, por tanto $x + y \in L[S]$. Por otra parte para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $x\in L[S]$, se verifica $\lambda x = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$ con $\lambda\lambda_i\in\mathbb{K}$, en consecuencia $\lambda x \in L[S]$. Hemos demostrado pues que $L[S]$ es subespacio de E.
(b) Sea F un subespacio vectorial de E tal que $S\subset F$. Veamos que $L[S]\subset F$. En efecto sea $x \in L[S]$, entonces x es de la forma $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$. Pero los vectores $v_1, \ldots, v_m$ pertenecen a F que por hipótesis es subespacio vectorial lo cual implica que $\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_m v_m$ pertenecen a F y también $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$. Es decir, $x\in F$.

9.12. Dependencia e independencia lineal de vectores

1. En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^2$ analizar si $v_1 = (2,-1),\ v_2 = (3,2)$ son linealmente independientes.

2. En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^3$ analizar si son linealmente independientes los vectores $v_1 = (1, 2, -1),\ v_2 = (2, -1, -3),\ v_3 = (-3, 4, 5)$.

3. Sean u, v, w vectores linealmente independientes en un espacio vectorial real E. Demostrar que $u + v, u - v, u - 2v + w$ también son linealmente independientes.

4. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado 2. Demostrar que el sistema de vectores $S = \{p(x), p'(x), p''(x)\}$ es libre.

5. En el espacio vectorial real $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ demostrar que los siguientes vectores son linealmente independientes los vectores $f(x) = e^{2x},\ g(x) = x^2,\ h(x) = x$.

6. Demostrar que en todo espacio vectorial cualquier vector no nulo es linealmente independiente.

7. Demostrar que el sistema $S = \{f_k(x) = \operatorname{sen} kx : k = 1, 2, \ldots, n\}$ es libre en $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

8. Demostrar que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es un sistema libre en $\mathbb{R}[x]$.

9. Demostrar las siguientes propiedades: (a) El vector cero no puede pertenecer a un sistema libre.
(b) Todo subsistema de un sistema libre es libre.
(c) Todo supersistema de un sistema ligado es ligado.
(d) Un sistema es ligado si y sólo si existe un vector del sistema que es combinación lineal de los demás.

10. En el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, demostrar que los vectores $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = x$, son linealmente independientes.

11. Demostrar que las funciones $f_k(x) = x^{\alpha_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ con $\alpha_k \in \mathbb{R}$, y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, son linealmente independientes.

12. Se consideran las funciones

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = e^{r_k x}$$

con $k = 1, \ldots n$, $r_k \in \mathbb{R}$ y $n \geq 2$. Demostrar que estas funciones son linealmente independientes $\Leftrightarrow r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$.

13. Demostrar que la familia infinita $\mathcal{F} = \{f_i(x) = \cos^k x : k = 1, 2, \ldots\}$ es libre en el espacio vectorial real de las funciones definidas en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Solución. 1. La igualdad $\lambda_1(2,-1) + \lambda_2(3,2) = (0,0)$ equivale al sistema

$$\left\{\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Sumando a la primera ecuación la segunda multiplicada por 2 obtenemos $7\lambda_2 = 0$ o bien, $\lambda_2 = 0$. Sustituyendo en la segunda deducimos $\lambda_1 = 0$. Es decir, v_1, v_2 son linealmente independientes.

2. La igualdad $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ equivale al sistema

$$H : \left\{\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Escalonamos el sistema

$$H \sim \left\{\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ -5\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + \quad 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right. \sim \left\{\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + \quad 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

El sistema lineal homogéneo H es indeterminado, es decir tiene soluciones distintas de la trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Concluimos que los vectores v_1, v_2, v_3 no son son linealmente independientes.

3. La igualdad $\lambda_1(u+v) + \lambda_2(u-v) + \lambda_3(u-2v+w) = 0$ equivale a la igualdad $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)u + (\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)v + \lambda_3 w = 0$. Por hipótesis u, v, w son linealmente independientes lo cual implica

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Resolviendo obtenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, de lo cual deducimos que los vectores $u+v, u-v, u-2v+w$ son linealmente independientes.

4. Como $p(x)$ es de grado 2, es de la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c reales y $a \neq 0$. Tenemos,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 p(x) + \lambda_2 p'(x) + \lambda_3 p''(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1(ax^2 + bx + c) + \lambda_2(2ax + b) + \lambda_3(2a) = 0 \\ &\Rightarrow a\lambda_1 x^2 + (b\lambda_1 + 2a\lambda_2)x + c\lambda_1 + b\lambda_2 + 2a\lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

lo cual proporciona el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a\,\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ b\,x_1 & + & 2a\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ c\,\lambda_1 & + & b\,\lambda_2 & + & 2a\,\lambda_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Dado que $a \neq 0$, deducimos fácilmente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

5. Supongamos que $\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x = 0$. Esta igualdad es una igualdad de funciones, por tanto se ha de verificar para todo $x \in \mathbb{R}$. Dando a x los valores $0, 1, 2$ obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ e^2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ e^4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{array}\right.$$

Resolviendo, obtenemos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$, es decir las funciones dadas son linealmente independientes.

6. Sea $v \neq 0$ un vector de un espacio vectorial dado E. Supongamos que ocurriera $\lambda v = 0$ para un $\lambda \neq 0$. Entonces:

$$\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda v) = 0 \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)v = 0 \Rightarrow 1v = 0 \Rightarrow v = 0,$$

lo cual es absurdo. Se deduce que $\{v\}$ es sistema libre.

7. Lo demostraremos aplicando el método de inducción. El sistema es libre para $n = 1$. Efectivamente, la función $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ no es el vector nulo de E, por tanto $\{f_1\}$ es libre.
Supongamos que el sistema $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen}(n-1)x\}$ es libre. Veamos que también lo es el sistema $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx\}$. Consideremos la igualdad

$$\lambda_1 \operatorname{sen} x + \lambda_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + \lambda_n \operatorname{sen} nx = 0. \quad (1)$$

Derivando obtenemos:

$$\lambda_1 \cos x + 2\lambda_2 \cos 2x + \ldots + n\lambda_n \cos nx. \quad (2)$$

Derivando de nuevo:

$$-\lambda_1 \operatorname{sen} x - 2^2\lambda_2 \operatorname{sen} 2x - \ldots - n^2\lambda_n \operatorname{sen} nx = 0. \quad (3)$$

Sumando a la igualdad (3) la (1) multiplicada por n^2 :

$$(n^2-1)\lambda_1 \operatorname{sen} x + (n^2-2^2)\lambda_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + (n^2-(n-1)^2)\lambda_{n-1} \operatorname{sen}(n-1)x = 0.$$

Por hipótesis de inducción

$$(n^2-1)\lambda_1 = (n^2-2^2)\lambda_2 = \ldots = (n^2-(n-1)^2)\lambda_{n-1} = 0.$$

Esto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Sustituyendo estos λ_i en (1) queda $\lambda_n \operatorname{sen} nx = 0$. Dando a x el valor $\pi/2n$ queda $\lambda_n \operatorname{sen}(\pi/2) = \lambda_n = 0$. Es decir, $S = \{f_k(x) = \operatorname{sen} kx : k = 1, 2, \ldots, n\}$ es sistema libre en E.

8. Sea $\{x^{k_1}, \ldots, x^{k_m}\}$ un subconjunto finito de S. Dado que los exponentes k_i son distintos dos a dos, de la igualdad

$$\lambda_1 x^{k_1} + \cdots + \lambda_m x^{k_m} = 0,$$

se deduce por el principio de igualdad de polinomios que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Concluimos que S es sistema libre.

9. (a) Sea el sistema $S = \{0, v_2, \ldots, v_m\}$. Se verifica la igualdad $1 \cdot 0 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$ lo cual implica que S es ligado.
(b) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ sistema libre. Veamos que el subsistema $S_1 = \{v_1, \ldots, v_p\}$ también es libre. Efectivamente, si fuera ligado existirían escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ no todos nulos tales que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0$. Esto implicaría que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + 0v_{p+1} + \ldots + 0v_m = 0$ no siendo nulos todos los escalares: S sería ligado, lo cual es absurdo.
(c) Si el supersistema fuera libre, por lo demostrado en (b) el sistema sería libre, lo cual es absurdo.
(d) Supongamos que el sistema $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es ligado. Entonces existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ no todos nulos tal que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 \neq 0$. Entonces

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow v_1 = -(\lambda_1^{-1}\lambda_2)v_2 - \ldots - (\lambda_1^{-1}\lambda_m)v_m.$$

Es decir, existe un vector del sistema que es combinación lineal de los demás. Recíprocamente, supongamos que existe un vector de del sistema (por ejemplo v_1) que es combinación lineal de los demás, entonces v_1 es de la forma $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_m$ lo cual implica $1 \cdot v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_m = 0$: el sistema es ligado.

10. Supongamos que $\lambda_1 \operatorname{sen} x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 x = 0$. Esta igualdad es una igualdad de funciones, por tanto se ha de verificar para todo $x \in \mathbb{R}$. Dando a x los valores $0, \pi/4, \pi/2$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda_2 + \dfrac{\pi}{4}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \dfrac{\pi}{2}\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

que proporciona la única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, es decir las funciones dadas son linealmente independientes.

11. Consideremos una combinación lineal de los vectores dados, igualada a la función cero:

$$\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 x^{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x^{\alpha_n} = 0.$$

Dando a x los valores $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, obtenemos el sistema lineal:

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 2^{\alpha_1} + \lambda_2 2^{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n 2^{\alpha_n} = 0 \\ \lambda_1 2^{2\alpha_1} + \lambda_2 2^{2\alpha_2} + \ldots + \lambda_n 2^{2\alpha_n} = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1 2^{(n-1)\alpha_1} + \lambda_2 2^{(n-1)\alpha_2} + \ldots + \lambda_n 2^{(n-1)\alpha_n} = 0. \end{matrix}\right. \qquad (*)$$

La matriz M del sistema es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^{\alpha_1} & 2^{\alpha_2} & \ldots & 2^{\alpha_n} \\ 2^{2\alpha_1} & 2^{2\alpha_2} & \ldots & 2^{2\alpha_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 2^{(n-1)\alpha_1} & 2^{(n-1)\alpha_2} & \ldots & 2^{(n-1)\alpha_n} \end{bmatrix},$$

es decir una matriz de Vandermonde. Su determinante es por tanto,

$$\det(M) = (2^{\alpha_n} - 2^{\alpha_{n-1}})\,(2^{\alpha_n} - 2^{\alpha_{n-2}}) \cdots (2^{\alpha_3} - 2^{\alpha_1})\,(2^{\alpha_2} - 2^{\alpha_1}).$$

Por hipótesis los números α_i son distintos dos a dos, luego $\det(M) \neq 0$. Esto implica que el sistema lineal homogéneo $(*)$ sólo tiene la solución trivial $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. En consecuencia, las funciones dadas son linealmente independientes.

12. $\Rightarrow$) Supongamos que dos de los números r_k fueran iguales (sin pérdida de generalidad, supongamos que $r_1 = r_2$), entonces,

$$1e^{r_1 x} + (-1)e^{r_2 x} + 0e^{r_3 x} + \cdots + e^{r_n x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

no siendo nulos todos los escalares, luego $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis.

$\Leftarrow$) Demostremos esta implicación por inducción respecto a n. Veamos que es cierta para $n = 2$. Supongamos que $r_1 \neq r_2$ y consideremos la igualdad de funciones $\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = 0$. Dando a x los valores 0 y 1, obtenemos

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ e^{r_1}\lambda_1 + e^{r_2}\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

y el determinante de la matriz del sistema es $D = e^{r_2} - e^{r_1}$. Pero la función exponencial es inyectiva y $r_1 \neq r_2$, luego $D \neq 0$. Esto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y por tanto $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son linealmente independientes.
Supongamos ahora que la propiedad es cierta para n, y consideremos las $n+1$ funciones:

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x},\ \ldots,\ e^{r_n x},\ e^{r_{n+1} x} \text{ con } r_i \neq r_j \text{ si } i \neq j.$$

Escribamos una combinación lineal de las funciones anteriores igualada a la función nula:

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{r_n x} + \lambda_{n+1} e^{r_{n+1} x} = 0.$$

Dividiendo al igualdad anterior entre $e^{r_{n+1} x}$:

$$\lambda_1 e^{(r_1 - r_{n+1})x} + \lambda_2 e^{(r_2 - r_{n+1})x} + \cdots + \lambda_n e^{(r_n - r_{n+1})x} + \lambda_{n+1} = 0. \quad (*)$$

Derivando la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (r_1 - r_{n+1}) e^{(r_1 - r_{n+1})x} + \lambda_2 (r_2 - r_{n+1}) e^{(r_2 - r_{n+1})x} \\ &+ \cdots + \lambda_n (r_n - r_{n+1}) e^{(r_n - r_{n+1})x} = 0. \end{aligned}$$

Dado que los n números $r_j - r_{n+1}$ $(j = 1, \ldots, n)$ son distintos dos a dos, se deduce de la hipótesis de inducción que

$$\lambda_1 (r_1 - r_{n+1}) = 0,\ \lambda_2 (r_2 - r_{n+1}) = 0,\ \ldots,\ \lambda_n (r_n - r_{n+1}) = 0,$$

lo cual implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Sustituyendo estos escalares en la igualdad $(*)$, queda $\lambda_{n+1} = 0$. Hemos demostrado que la propiedad es cierta para $n+1$.

13. Bastará demostrar que para cada $n = 1, 2, \ldots$ la familia finita $\mathcal{F}_n = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es libre. Sea la igualdad

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos^2 x + \cdots + \lambda_n \cos^n x = 0 \qquad \forall x \in [0, \pi/2].$$

La aplicación $g : [0, \pi/2] \to [0, 1]$ dada por $g(x) = t = \cos x$ sabemos que es una biyección, en consecuencia, la igualdad $\lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n = 0$ se ha de verificar para todo $t \in [0, 1]$. Queda por tanto una ecuación polinómica con infinitas raíces, lo cual implica que el primer miembro ha de ser el polinomio nulo, es decir $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

9.13. Base de un espacio vectorial

1. Demostrar que los vectores $u_1 = (2,3)$ y $u_2 = (-7,1)$ forman un base de $\mathbb{R}^2$.

2. Demostrar que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base del espacio vectorial $\mathcal{S}$ de las matrices cuadradas, reales y simétricas de orden 2, siendo:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Demostrar que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base del espacio vectorial $\mathcal{A}$ de las matrices cuadradas, reales y antisimétricas de orden 3, siendo:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar que:

$$B = \{(1,0,\ldots,0),\ (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,\ldots,1)\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$ (base canónica de $\mathbb{K}^n$).

5. Demostrar que

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$
$$\ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \}$$

es base del espacio vectorial $\mathbb{K}^{m \times n}$ (base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$).

6. Demostrar que $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es base del espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ de grado $\leq n$. (base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$).

7. $a)$ Hallar una base de $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
$b)$ Hallar una base de $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Demostrar que en $\mathbb{R}[x]$ no existen bases con un número finito de vectores.

9. Demostrar que $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es base de $\mathbb{R}[x]$.

10. Sobre el cuerpo de los números reales se consideran las matrices de la forma:
$$\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ 3a\lambda & -2\mu + b\lambda \end{bmatrix}$$
con a, b constantes reales y λ, μ parámetros reales.
$a)$ ¿Es este conjunto un subespacio vectorial?
$b)$ En caso afirmativo, determinar una base.

Solución. 1. $i)$ B es sistema libre. Tenemos:

$$\lambda_1(2,3) + \lambda_2(-7,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 7\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos la única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, es decir u_1 y u_2 son linealmente independientes.
$ii)$ B es sistema generador. Sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(2,3) + \lambda_2(-7,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 7\lambda_2 = x_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = x_2. \end{cases}$$

Escalonando el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} \ 2\lambda_1 - 7\lambda_2 = x_1 \\ 23\lambda_2 = 2x_2 - 3x_1, \end{cases}$$

que claramente tiene solución en $\mathbb{R}$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, es decir $\{u_1, u_2\}$ genera a $\mathbb{R}^2$. Concluimos que B es base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

2. $i)$ B es sistema libre. Los vectores dados pertenecen a $\mathcal{S}$.Tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

$ii)$ B es sistema generador. Toda matriz simétrica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Entonces,
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
lo cual implica que B es sistema generador de $\mathcal{S}$. Concluimos que B es base del espacio vectorial $\mathcal{S}$.

3. *i*) B es sistema libre. Los vectores dados pertenecen a $\mathcal{A}$.Tenemos:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

ii) B es sistema generador. Toda matriz antisimétrica de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual implica que B es sistema generador de $\mathcal{A}$. Concluimos que B es base del espacio vectorial $\mathcal{A}$.

4. *i*) B es sistema libre. En efecto, tenemos:

$$\lambda_1(1, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$
$$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

ii) B es sistema generador. Todo vector de $\mathbb{K}^n$ es de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con los x_i elementos de $\mathbb{K}$. Entonces,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1),$$

lo cual prueba que B es sistema generador. Concluimos que B es base del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.

5. *i*) B es sistema libre. Llamemos A_{ij} $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ a la matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ tal que el elemento a_{ij} es 1 y los restantes elementos son nulos. Entonces, B es $B = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{m,\,n-1}, A_{mn}\}$ (mn matrices). Nótese

que la igualdad $\lambda_{11}A_{11} + \lambda_{12}A_{12} + \ldots + \lambda_{m,\,n-1}A_{m,\,n-1} + \lambda_{mn}A_{mn} = 0$ implica:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1,\,n-1} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2,\,n-1} & \lambda_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_{m-1,\,1} & \lambda_{m-1,\,2} & \ldots & \lambda_{m-1,\,n-1} & \lambda_{m-1,\,n} \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \ldots & \lambda_{m,\,n-1} & \lambda_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de lo que se deduce que todos los escalares λ_{ij} son nulos.

ii) B es sistema generador. Toda matriz A de $\mathbb{K}^{m\times n}$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m-1,\,1} & a_{m-1,\,2} & \ldots & a_{m-1,\,n-1} & a_{m-1,\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,\,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix},$$

con los a_{ij} elementos de $\mathbb{K}$. Entonces, A se puede expresar en la forma:

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{m,\,n-1}A_{m,\,n-1} + a_{mn}A_{mn},$$

luego B genera $\mathbb{K}^{m\times n}$. Concluimos que B es base de $\mathbb{K}^{m\times n}$.

6. *i*) B es sistema libre. Usando el principio de identidad de polinomios, de la igualdad $\lambda_0\cdot 1+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\ldots+\lambda_n x^n = 0$ se deduce $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

ii) B es sistema generador. Todo vector de $\mathbb{R}_n[x]$ es de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Entonces,

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

lo cual implica que B es sistema generador de $\mathbb{R}_n[x]$. Concluimos que B es base de $\mathbb{R}_n[x]$.

7. *a*) Elijamos el sistema de $\mathbb{C}^n$:

$$B = \{u_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ u_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, u_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

De la igualdad $\lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_nu_n = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, claramente se deduce $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, luego B es sistema libre. Por otra parte, todo vector de $\mathbb{C}^n$ es de la forma $z = (z_1, \ldots, z_n)$ con los $z_i \in \mathbb{C}$. Entonces, $z = z_1u_1 + \ldots + z_nu_n$, lo cual implica que B genera a $\mathbb{C}^n$. Concluimos que

B es base de $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

b) Elijamos el sistema de $\mathbb{C}^n : B' = \{u_1, \dots, u_n, iu_1, \dots, iu_n\}$. La igualdad $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \mu_1(iu_1) + \ldots + \mu_n(iu_n) = 0$ con $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ equivale a:

$$(\lambda_1 + i\mu_1, \dots, \lambda_n + i\mu_n) = (0, \dots, 0).$$

Igualando componentes y partes real e imaginaria, deducimos $\lambda_i = \mu_i$ para todo i, por tanto B' es sistema libre. Por otra parte, todo vector de $\mathbb{C}^n$ es de la forma

$$z = (a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) \text{ con } a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $z = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1(iu_1) + \ldots + b_n(iu_n)$ lo cual implica que B' genera a $\mathbb{C}^n$. Concluimos que B' es base de $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Supongamos que existiera un base $B = \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ de $\mathbb{R}[x]$ formada por n polinomios. Si m es el mayor de los grados de los polinomios de B, entonces

$$x^{m+1} \neq \lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_n p_n(x)$$

para cualquier elección de los escalares λ_i (el segundo miembro tiene grado $\leq m$). Es decir, B no sería sistema generador (en contradicción con la hipótesis).

9. Vimos que B genera a $\mathbb{R}[x]$. Veamos ahora que B es sistema libre. En efecto, sea $\{x^{k_1}, \dots, x^{k_m}\}$ un subconjunto finito de B. Dado que los exponentes k_i son distintos dos a dos, de la igualdad

$$\lambda_1 x^{k_1} + \ldots + \lambda_m x^{k_m} = 0,$$

se deduce por el principio de igualdad de polinomios que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Concluimos que B es base de $\mathbb{R}[x]$.[

10. a) El conjunto $\mathcal{M}$ dado se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{M} = \{\ \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3a & b \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \},$$

por tanto $\mathcal{M} = L[S]$, siendo S el conjunto formado por las dos matrices anteriores, y todo conjunto de la forma $L[S]$, sabemos que es subespacio.
b) Las dos matrices anteriores generan a $\mathcal{M}$. Además, son linealmente independientes pues de la igualdad

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3a & b \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se deduce inmediatamente que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. por tanto, una base de $\mathcal{M}$ es

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \}.$$

9.14. Subespacio de las matrices diagonales, dimensión y base

Una matriz $D = [d_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ se dice que es *diagonal* si $d_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Demostrar que el subconjunto $\mathcal{D}$ de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices diagonales es subespacio de $M_n(\mathbb{K})$. Hallar la dimensión y una base de $\mathcal{D}$.

Solución. Toda matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar en la forma:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} = d_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + d_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \dots + d_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Esto implica que $\mathcal{D} = \langle B \rangle$, siendo

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \},$$

lo cual demuestra automáticamente que $\mathcal{D}$ es subespacio $M_n(\mathbb{K})$ y que B es sistema generador del mismo. Es además sistema libre pues la misma combinación lineal que aparece en $(*)$ igualada a 0 implica de manera trivial $d_{ij} = 0$. Concluimos que B una base de $\mathcal{D}$ y que $\dim \mathcal{D} = n$.

9.15. Subespacio de las matrices escalares, dimensión y base

Una matriz $E \in M_n(\mathbb{K})$ se dice que es *escalar*, si es diagonal y todos los elementos de la diagonal principal son iguales. Demostrar que el subconjunto $\mathcal{E}$ de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices escalares es subespacio de $M_n(\mathbb{K})$. Hallar la dimensión y una base de $\mathcal{E}$.

Solución. Toda matriz escalar $E \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar en la forma:

$$E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Esto implica que $\mathcal{E} = \langle B \rangle$, siendo

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \} = \{I\},$$

lo cual demuestra automáticamente que $\mathcal{E}$ es subespacio $M_n(\mathbb{K})$ y que B es sistema generador del mismo. Es además sistema libre pues I es vector no nulo. Concluimos que B una base de $\mathcal{E}$ y que $\dim \mathcal{E} = 1$.

9.16. Subespacio de las matrices simétricas, dimensión y base

Hallar una base y la dimensión del subespacio $\mathcal{S}$ de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices simétricas. Particularizar para $n = 2$.

Solución. Toda matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar en la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{n-1,n} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Llamemos A_{ij} a las matrices que acompañan a los escalares a_{ij}, y sea

$$B = \{A_{11}, \ \ldots, \ A_{nn}\} \cup \{A_{12}, \ \ldots, \ A_{1,n}\} \cup \{A_{23}, \ldots, A_{2n}\} \cup \ldots \cup \{A_{n-1,n}\}.$$

Entonces, $\mathcal{S} = \langle B \rangle$ lo cual demuestra automáticamente que $\mathcal{S}$ es subespacio $M_n(\mathbb{K})$ y que B es sistema generador del mismo. Es además libre pues la

misma combinación lineal que aparece en $(*)$ igualada a 0 implica de manera trivial $a_{ij} = 0$. Es decir, B es base del subespacio de las matrices simétricas de $\mathbb{K}^{n\times n}$.
Contemos el número de vectores de B. Usando la conocida fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\dim \mathcal{S} = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

En el caso particular $n = 2$:

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}, \quad \dim \mathcal{S} = 3.$$

9.17. Subespacio de las matrices antisimétricas, dimensión y base

Hallar una base y la dimensión del subespacio $\mathcal{A}$ de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices antisimétricas. Particularizar para $n = 3$.

Solución. Toda matriz antisimétrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar en la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & \ldots & -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & \ldots & -a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{bmatrix} = a_{21} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ a_{n2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{n,n-1} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Llamemos A_{ij} a las matrices que acompañan a los escalares a_{ij}, y sea

$$B = \{A_{21}, \ \ldots, \ A_{n1}\} \cup \{A_{32}, \ \ldots, \ A_{n2}\} \cup \ldots \cup \{A_{n,n-1}\}.$$

Entonces, $\mathcal{A} = \langle B \rangle$ lo cual demuestra automáticamente que $\mathcal{A}$ es subespacio $M_n(\mathbb{K})$ y que B es sistema generador del mismo. Es además libre pues la misma combinación lineal que aparece en $(*)$ igualada a 0 implica de manera trivial $a_{ij} = 0$. Es decir, B es base del subespacio de las matrices antisimétricas de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Contemos el número de vectores de B. Usando la conocida fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\dim \mathcal{A} = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

En el caso particular $n = 3$:

$$B = \{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \}, \quad \dim \mathcal{A} = 3.$$

9.18. Subespacios de matrices triangulares, dimensión y base

Hallar una base y la dimensión del subespacio $\mathcal{T}_S$ de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices triangulares superiores. Las mismas cuestiones, pero de forma esquemática, para $\mathcal{T}_I$ (subespacio de $M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices triangulares inferiores). Particularizar en ambos casos para $n = 2$.

Solución. Toda matriz triangular superior $T \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar en la forma:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} = t_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + t_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$+t_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + t_{n-1,n} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Llamemos T_{ij} a las matrices que acompañan a los escalares t_{ij}, y sea

$$B = \{T_{11},\ \ldots,\ T_{nn}\} \cup \{T_{12},\ \ldots,\ T_{1,n}\} \cup \{T_{23}, \ldots, T_{2n}\} \cup \ldots \cup \{T_{n-1,n}\}.$$

Entonces, $\mathcal{T}_S = \langle B \rangle$ lo cual demuestra automáticamente que $\mathcal{T}_S$ es subespacio $M_n(\mathbb{K})$ y que B es sistema generador del mismo. Es además libre pues la misma combinación lineal que aparece en $(*)$ igualada a 0 implica de manera trivial $t_{ij} = 0$. Es decir, B es base del subespacio de las matrices triangulares superiores de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Contemos el número de vectores de B. Usando la conocida fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\dim \mathcal{T}_S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

En el caso particular $n = 2$:

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}, \quad \dim \mathcal{T}_S = 3.$$

Razonando de manera análoga para $\mathcal{T}_I$ obtenemos la base:

$$B' = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \},$$

y $\dim \mathcal{T}_I = \dim \mathcal{T}_S = n(n+1)/2$. En el caso particular $n = 2$:

$$B' = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}, \quad \dim \mathcal{T}_I = 3.$$

9.19. Rango de una matriz. Dependencia lineal en $\mathbb{K}^n$

1. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

2. Demostrar que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes

$$(1, 3, -2, 5),\ (4, 2, 7, -3),\ (2, 7, -5, 4),\ (-3, 2, -2, 7).$$

Solución. Recordamos que el máximo número de filas (columnas) linealmente independientes entre las filas (columnas) de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es igual a su rango.

1. Escalonemos A.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_2-4F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-F_1 \\ F_5-2F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 & -6 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_3-F_2 \\ 7F_4-2F_2 \\ 7F_5-3F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & 16 & -38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_3 \leftrightarrow F_5 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & -38 \\ 0 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ 2F_4+F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 16 & -38 \\ 0 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ 2F_4+F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente el rango de la matriz escalonada es 3, por tanto rg $A = 3$.

2. Bastará demostrar que el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

es 4. Dado que la matriz es cuadrada, bastará demostrar que $\det A \neq 0$. Efectuando las transformaciones $F_2 - 4F_1$, $F_3 - 2F_1$, $F_3 + 3F_1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 15 & -23 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 15 & -23 \\ 1 & -1 & -6 \\ 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = -689 \neq 0.$$

9.20. Teorema de la base incompleta

1. Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (2, -1, 3, 4)$ y $v_2 = (0, 5, 1, -1)$, completarlos con otros dos para formar una base de $\mathbb{R}^4$.

2. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ base de un espacio vectorial E. Demostrar que $E = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \oplus \langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle$.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, hallar un subespacio suplementario de

$$\langle (2, -1, 3, 4), (0, 5, 1, -1) \rangle.$$

4. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, siendo

$$F = \langle (2, 1, -1, 1), (2, 3, 4, -0), (1, 1, 1, 1) \rangle \text{ y } G = \langle (2, -1, 3, a) \rangle.$$

Solución. 1. Por conocidas propiedades de la dimensión, cuatro vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión 4 forman base. Dado que el rango del sistema $\{v_1, v_2\}$ claramente es 2, bastará añadir a v_1 y v_2, otros dos vectores v_3 y v_4 de tal manera que el rango del sistema $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sea 4. Existen infinitas maneras de elegir v_3 y v_4. Por ejemplo,

$$\text{rg} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4,$$

en consecuencia, si $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ entonces, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base de $\mathbb{R}^4$.

2. Llamemos $F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ y $G = \langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle$. Sea $x \in F \cap G$, entonces $x \in F$ y $x \in G$, por tanto,

$$\begin{aligned} &\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{ escalares} : x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \\ &\exists \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n \text{ escalares} : x = \lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n. \end{aligned}$$

Restando las igualdades anteriores queda

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + (-\lambda_{r+1})u_{r+1} + \cdots + (-\lambda_n)u_n = 0.$$

Dado que B es sistema libre, necesariamente $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \ldots = -\lambda_n = 0$, lo cual implica que $x = 0u_1 + \cdots + 0u_r = 0$. Hemos demostrado que $F \cap G = \{0\}$. Sea ahora $x \in E$, dado que B es sistema generador de E, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r,\ \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} \cdots + \lambda_n u_n.$$

Ahora bien, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \in F$ y $\lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n$, luego $x \in F + G$. Hemos demostrado que $E = F + G$. Concluimos que $E = F \oplus G$.

3. De los dos apartados anteriores, deducimos de manera inmediata que un subespacio suplementario del dado es $\langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$.

4. Hallemos unas bases de F y G. Tenemos:

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = 3, \quad \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & a \end{bmatrix} = 1,$$

luego $B_F = \{(2,1,-1,1), (2,3,4,-0), (1,1,1,1)\}$ y $B_G = \{(2,-1,3,a)\}$ son bases de F y G respectivamente. Por otra parte,

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & a \end{bmatrix} = \ldots = a - 29.$$

Si $a \neq 29$, entonces la unión de B_F con B_G es una base de $\mathbb{R}^4$, y por tanto $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. Si $a = 29$, el vector $(2,-1,3,a)$ pertenece a F y a G, luego $F \cap G \neq \{0\}$. Concluimos que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \Leftrightarrow a \neq 29$.

9.21. Existencia de base en todo espacio vectorial

1. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y S un subconjunto de E linealmente independiente. Entonces, existe una base B de E que contiene a S.
2. Demostrar que todo espacio vectorial E tiene una base.

Solución. 1. Llamemos

$$\mathscr{S} = \{A \subset E : S \subset A \text{ y } A \text{ es linealmente independiente}\}.$$

Es decir, $\mathscr{S}$ está formado por todos los subconjuntos de E que son linealmente independientes y que contienen a S. Claramente $\mathcal{S} \neq \emptyset$ pues $S \in \mathscr{S}$. Sea $\mathscr{F} = \{A_i : i \in I\}$ una familia indexada de elementos de $\mathscr{S}$ totalmente ordenada por inclusión $\subset$, y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. El conjunto A es linealmente independiente, pues si no lo fuera, existirían vectores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset A$ y escalares no todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n = 0$. Ahora bien, al estar $\mathscr{F}$ totalmente ordenada existiría $i_0 \in I$ con

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset A_{i_0}.$$

Entonces A_{i_0} no sería linealmente independiente lo cual es absurdo pues $A_{i_0} \in \mathscr{S}$. Concluimos que $\mathscr{S}$ es un conjunto inductivo y por el lema de Zorn $\mathscr{S}$ tiene un elemento maximal B. Veamos que B es base de E.
Efectivamente, como $B \in \mathscr{S}$, B es linealmente independiente (además $S \subset B$). Veamos que $E = L(B)$ por reducción al absurdo.
Si $E \neq L(B)$, existe un vector $v \in E - L(B)$ y como $v \notin L(B)$, el conjunto $B \cup \{v\}$ es linealmente independiente lo cual implica que $B \cup \{v\} \in \mathscr{S}$ y $B \subsetneq B \cup \{v\}$ lo cual contradice la maximalidad de B. Hemos demostrado que B es base de E que contiene a S.

2. En efecto, si $E \neq \{0\}$ existe $v \in E$ no nulo y basta elegir el conjunto linealmente independiente $S = \{v\}$. Si $E = \{0\}$, entonces $B = \emptyset$ es base de E.

9.22. Dimensión de un espacio vectorial

1. Haciendo uso de bases conocidas, hallar las dimensiones de los siguientes espacios vectoriales:
1) $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. 2) $\mathbb{R}^{m \times n}$ sobre $\mathbb{R}$. 3) $\mathbb{R}_n[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

2. Haciendo uso de bases conocidas, hallar las dimensiones de los siguientes espacios vectoriales:
1) $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$. 2) $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$. 3) $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

3. Hallar la dimensión del espacio vectorial nulo.

4. Hallar la dimensión de un cuerpo considerado como espacio vectorial sobre si mismo.

5. Demostrar que la dimensión de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ es infinita.

6. Determinar una base y la dimensión de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

7. Sea K un cuerpo y $K(x)$ el cuerpo de las fracciones racionales en la indeterminada x con coeficientes en K. Hallar la dimensión de $K(x)$ sobre K.

8. Fácilmente se demuestra que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un cuerpo con las operaciones usuales (se le llama *cuerpo de los números de Gauss*). Hallar la dimensión de $\mathbb{Q}(i)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Solución. 1. 1) Una base de este espacio es

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ (0, 0, \ldots, 1)\},$$

por tanto, su dimensión es n.
2) Una base de este espacio es

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$
$$\ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \},$$

por tanto, su dimensión es mn.
3) Una base de este espacio es $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, por tanto su dimensión es $n + 1$.

2. 1) Una base de este espacio es $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$, por tanto su dimensión es $+\infty$. De manera más precisa, $\dim \mathbb{R}[x] = \aleph_0$ (cardinal del conjunto de los números naturales).
2) Una base de este espacio es

$$B = \{u_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ u_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, u_n = (0, 0, \ldots, 1)\},$$

por tanto, su dimensión es n.
3) Una base de este espacio es $B' = \{u_1, \ldots, u_n, iu_1, \ldots, iu_n\}$, por tanto su dimensión es $2n$.

3. Una base del espacio vectorial nulo $\{0\}$ es $\emptyset$, por tanto $\dim\{0\} = \text{card } \emptyset = 0$.

4. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces, $\{1\}$ es conjunto linealmente independiente por ser 1 vector no nulo. Por otra parte, todo vector $x \in \mathbb{K}$ es igual al escalar x por 1, luego $\mathbb{K} = L[B]$. En consecuencia $\{1\}$ es base de $\mathbb{K}$. Por tanto, $\dim \mathbb{K} = 1$.

5. En efecto, si la dimensión fuera m (finita), existirían $x_1, \ldots, x_m$ números reales tales que todo $x \in \mathbb{R}$ se podría expresar de manera única como

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Q}.$$

Entonces, $\text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathbb{Q}^m = \aleph_0$, lo cual es absurdo.

6. Una base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ es $B = \{1, i\}$. En efecto, todo $z \in \mathbb{C}$ es de la forma $x1 + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, luego B es sistema generador. Por otra parte, B es sistema libre pues $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 i = 0$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.. En consecuencia se verifica $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

7. El conjunto $\{1, x.x^2, \ldots\} \subset K(x)$ es libre e infinito, en consecuencia la dimensión de $K(x)$ sobre K es $+\infty$.

8. Claramente$\{1, i\}$ es base de $\mathbb{Q}(i)$ sobre $\mathbb{Q}$, luego la dimensión pedida es 2.

9.23. Teorema de la torre

Si k un subcuerpo del cuerpo K, decimos que K una extensión de k y a la dimensión del espacio vectorial K sobre k se la representa por $[K : k]$. Sea K_2 una extensión de K_1 y K_3 extensión de K_2 (y por tanto, también de K_1). Demostrar el *teorema de la torre*, es decir

$$[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2][K_2 : K_1],$$

indistintamente para dimensiones finitas o infinitos.

Solución. Sean $a_1, \ldots, a_r$ elementos de K_3 linealmente independientes sobre K_2 (y por tanto $r \leq [K_3 : K_2]$) y sean $b_1, \ldots, b_s$ elementos de K_2 linealmente independientes sobre K_1 (y por tanto $s \leq [K_2 : K_1]$). Veamos que los rs elementos $a_i b_j$ de K_3 son linealmente independientes sobre K_1. En efecto, consideremos la igualdad

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} a_i b_j = 0 \qquad \lambda_{ij} \in K_1.$$

Esta igualdad se puede expresar en la forma

$$\sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} b_j \right) a_i = 0, \quad \text{con} \quad \sum_j \lambda_{ij} b_j \in K_2.$$

Dado que los elementos a_i son linealmente independientes sobre K_2, resulta

$$\sum_j \lambda_{ij} b_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

y siendo los elementos b_j linealmente independientes sobre K_1, tenemos

$$\lambda_{ij} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r \; ; \; j = 1, \ldots, s),$$

lo cual prueba el aserto inicial. Podemos por tanto afirmar que

$$rs \leq [K_3 : K_1] \qquad \forall r \leq [K_3 : K_2] \; \forall s \leq [K_2 : K_1].$$

Entonces, $[K_3 : K_1]$ es infinito si uno al menos de las $[K_3 : K_2]$, $[K_2 : K_1]$ lo es, y en este caso queda demostrado el teorema.

Supongamos ahora que $[K_3 : K_2]$ y $[K_2 : K_1]$ son finitos y sean $r = [K_3 : K_2]$ y $s = [K_2 : K_1]$. Según lo ya demostrado, tenemos

$$[K_3 : K_2][K_2 : K_1] \leq [K_3 : K_1].$$

Ahora bien, para cualquier elemento a de K_3 y teniendo en cuenta que los a_i forman una base de K_3 sobre K_2,

$$a = \sum_{i=1}^{r} \beta_i a_i \qquad \beta_i \in K_2.$$

Análogamente, al formar los b_j una base de K_2 sobre K_1,

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} \qquad \beta_{ij} \in K_1.$$

En consecuencia,

$$a = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} a_i b_j.$$

Los rs elementos $a_i b_j$ de K_3 son generadores de K_3 como espacio vectorial sobre K_1, y por tanto

$$[K_3 : K_1] \leq rs = [K_3 : K_2][K_2 : K_1].$$

Nota. Para una serie de extensiones de cuerpos $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$ se demuestra fácilmente por inducción sobre n que

$$[K_n : K_1] = [K_n : K_{n-1}][K_{n-1} : K_{n-2}] \ldots [K_2 : K_1].$$

9.24. Teorema de la dimensión para espacios vectoriales

Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que todas las bases de E tienen el mismo cardinal.

Solución. Demostraremos previamente el siguiente lema:

Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $S \subset E$ y u, v vectores de E. Entonces, $v \in L\left[S \cup \{u\}\right] - L[S] \Rightarrow u \in L\left[S \cup \{v\}\right]$

Demostración. Por hipótesis $v \in L\left[S \cup \{u\}\right] - L[S]$, lo cual implica que v es combinación lineal finita de elementos de $S \cup \{u\}$. Es decir:

$$v = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_m s_m + \alpha u \quad (s_i \in S).$$

No puede ocurrir $\alpha = 0$, pues en tal caso, v pertenecería a $L[S]$. Despejando u queda:

$$u = \alpha^{-1} v + \left(\alpha^{-1}\alpha_1\right) s_1 + \cdots + \left(\alpha^{-1}\alpha_m\right) s_m,$$

es decir $u \in L\left[S \cup \{v\}\right]$. $\square$

Demostremos ahora el teorema. Distinguiremos los casos:
1. E tiene una base formada por un número finito de vectores.
2. Ninguna base de E tiene un número finito de vectores.

Caso 1. E tiene una base formada por un número finito de vectores.
Sea entonces B una base formada por n vectores, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Tenemos que demostrar que cualquier otra base B_1 tiene también n vectores. Supondremos que card $B_1 \neq n$ y llegaremos a una contradicción. Distinguiremos los casos card $B_1 = m < n$ y card $B_1 > n$.
(a) Supongamos card $B_1 = m < n$, y sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Como $v_1 \in L[B]$, podemos escribir $v_1 = \alpha_1 u_1 + \cdots \alpha_n v_n$. Algún escalar α_i ha de ser no nulo pues $v_1 \neq 0$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \neq 0$. No puede ocurrir $v_1 \in L[\{u_2, \ldots, u_n\}]$ pues en tal caso

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \alpha_n v_n, \\ v_1 &= \qquad\quad\; \beta_2 u_2 + \cdots \beta_n v_n, \end{aligned}$$

y restando obtendríamos $\alpha_1 u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) u_n = 0$ con $\alpha_1 \neq 0$ en contradicción con ser B conjunto linealmente independiente. Tenemos por tanto

$$v_1 \in L[\{u_2, \ldots, u_n\} \cup \{u_1\}] - L[\{u_2, \ldots, u_n\}]$$

y aplicando el lema al conjunto $S = \{u_2, \dots, u_n\}$:

$$u_1 \in L[\{v_1, u_2, \dots, u_n\}].$$

Como $\{u_2, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente y $v_1 \notin L[\{u_2, \dots, u_n\}]$, el conjunto $\{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente. Como

$$u_1 \in L[\{v_1, u_2, \dots, u_n\}],$$

se verifica $E = L[\{v_1, u_2, \dots, u_n\}]$ en consecuencia $\{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ es base de E.
Podemos repetir el razonamiento anterior m veces, obteniendo la base de E :

$$\{v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}.$$

Pero $\{v_1, \dots, v_m\}$ es base de E, por tanto $u_{m+1} \in L[\{v_1, \dots, v_m\}]$. Esto implica que

$$\{v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$$

es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción. Concluimos que no puede ocurrir card $B_1 < n$.
(b) Supongamos ahora que card $B_1 > n$ (ahora podría ser card B_1 infinito). Por un razonamiento similar al hecho en (a), podemos sustituir n vectores de B_1 por los vectores $u_1, \dots, u_n$. Tendríamos así una base de E de la forma $B \cup S$ con $S \subset B_1$ y S no vacío. Pero B es base de E, y al ser $S \neq \emptyset$, $B \cup S$ es linealmente dependiente lo cual es una contradicción.
Concluimos que si E tiene una base formada por n vectores, todas las bases de E tienen cardinalidad n, lo cual demuestra el teorema en el caso 1.

Caso 2. Ninguna base de E tiene cardinal finito.
Si B_1 y B_2 dos bases de E, entonces B_1 y B_2 tienen un número infinito de vectores. Si $u \in B_1$, como B_2 es base de E, existe un único subconjunto finito $\Delta_x \subset B_2$ tal que $u \in L(\Delta_u)$ y $u \notin L(\Delta')$ para todo subconjunto propio Δ' de Δ_u. Tenemos pues una función bien definida:

$$\varphi : B_1 \to \mathcal{P}(B_2), \quad \varphi(u) = \Delta_u.$$

Recordemos ahora la siguiente propiedad de teoría de cardinales:

Si A y B son conjuntos con A infinito y para todo $x \in A$ consideramos un conjunto finito $\Delta_x \subset B$, entonces

$$\text{card } A \geq \text{card } \left(\bigcup_{x \in A} \Delta_x \right).$$

Como B_1 es conjunto infinito, por la propiedad anterior:

$$\text{card } B_1 \geq \text{card } \left(\bigcup_{u \in B_1} \Delta_u \right).$$

Dado que $u \in L(\Delta_u)$ para todo $u \in B_1$, $E = L\left(\bigcup_{u\in B_1} \Delta_u\right)$. Como $\bigcup_{u\in B_1} \Delta_u$ es subconjunto de B_2 que genera a E y B_2 es base de E, concluimos que $B_2 = \bigcup_{u\in B_1} \Delta_u$, es decir card $B_1 \geq$ card B_2. Intercambiando los papeles de B_1 y B_2, obtenemos de manera análoga que card $B_2 \geq$ card B_1, lo cual completa la demostración del teorema.

9.25. Propiedades de la dimensión

1. Demostrar que los siguientes vectores forma base de $\mathbb{R}^4$

$$(2,1,0,1),\ (0,1,2,2),\ (-2,1,1,2),\ (1,3,1,2).$$

2. Sean E_1 y E_2 subespacios de E tales que $\dim E_1 = 4$, $\dim E_2 = 5$ y $\dim E = 7$. Se pide hallar la posible dimensión de $E_1 \cap E_2$.

3. Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tiene rango 3, y F, C son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por las filas y las columnas de A respectivamente, demostrar que $\dim(F \cap C) \geq 2$.

4. En $\mathbb{R}^3$, demostrar que $F_1 = F_2$, siendo $F_1 = \langle (1,2,1),(1,3,2) \rangle$ y $F_2 = \langle (1,1,0),(3,8,5) \rangle$.

5. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado 2. Demostrar que

$$B = \{p(x), p'(x), p''(x)\}$$

es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Sea U un subespacio de $M_3(\mathbb{R})$ de dimensión 4. Demostrar que U contiene alguna matriz simétrica no nula.

Solución. 1. Dado que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, los cuatro vectores formarán base si y sólo si, son linealmente independientes. Tenemos:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots = 13 \neq 0.$$

El rango de la matriz anterior es 4, y por tanto, los cuatro vectores fila son linealmente independientes. Concluimos que los vectores dados forman una base de $\mathbb{R}^4$.

2. Por el teorema de Grassmann, $\dim(E_1+E_2) = 9-\dim(E_1\cap E_2)$. Por otra parte, $E_1 \subset E_1+E_2 \subset E$ y $E_2 \subset E_1+E_2 \subset E$ implica $4 \leq \dim(E_1+E_2) \leq 7$ y $5 \leq \dim(E_1+E_2) \leq 7$, lo cual equivale a $5 \leq \dim(E_1+E_2) \leq 7$.

Es decir, $\dim(E_1+E_2)$ es 5, o 6, o 7, y de $\dim(E_1+E_2) = 9-\dim(E_1\cap E_2)$, deducimos que $\dim(E_1\cap E_2)$ es 4, o 3, o 2.

3. Como $\operatorname{rango} A = 3$, $\dim F = \dim C = 3$. Por el teorema de Grassmann, $\dim(F+C) = 6-\dim(F\cap C)$. Por otra parte, $F \subset F+C \subset \mathbb{R}^4$ y $C \subset F+C \subset \mathbb{R}^4$ implica $3 \leq \dim(F+C) \leq 4$.

Es decir, $\dim(F+C)$ es 3, o 4, y de $\dim(F+C) = 6-\dim(F\cap C)$, deducimos que $\dim(F\cap C)$ es 3, o 2, luego $\dim(F\cap C) \geq 2$.

4. Tenemos:
$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix}1&1&0\\3&8&5\end{bmatrix} = 2,$$
es decir, $\dim F_1 = \dim F_2$, por tanto para demostrar al igualdad $F_1 = F_2$, bastará demostrar que $F_2 \subset F_1$. Ahora bien,
$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&0\end{bmatrix} = \ldots = 2,\ \operatorname{rango}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\3&8&5\end{bmatrix} = \ldots = 2.$$
Esto implica que los vectores $(1,1,0)$ y $(3,8,5)$ son combinaciones lineales de los vectores $(1,2,1)$, y $(1,3,2)$. Si $x \in F_2$, x es combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$ y $(3,8,5)$, y por tanto de los $(1,2,1)$ y $(1,3,2)$, luego pertenecen a F_1.
Concluimos que $F_2 \subset F_1$, y por lo ya comentado, $F_1 = F_2$.

5. Según vimos en un ejercicio anterior, el conjunto B es linealmente independiente. Como $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ y B está formado por tres vectores, concluimos que es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Si $\mathcal{S}$ es el subespacio de $M_3(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas, entonces $\dim \mathcal{S} = 3(3+1)/2 = 6$. Si fuera $U\cap\mathcal{S} = \{0\}$, entonces $\dim(U\cap\mathcal{S}) = 0$ y por el teorema de Grassmann:
$$\dim(U+\mathcal{S}) = 6+4-0 = 10 > 9 = \dim M_3(\mathbb{R}),$$

lo cual es absurdo. Concluimos que U contiene alguna matriz simétrica no nula.

9.26. Teorema de Grassmann

Demostrar el teorema de Grassmann:
Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y sean F y G subespacios de E. Entonces,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Solución. Llamemos $f = \dim F$, $g = \dim G$, $i = \dim(F \cap G)$ y supongamos que una base de $F \cap G$ es $B_{F\cap G} = \{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$. Por el teorema de la ampliación de la base, podemos completar $B_{F\cap G}$ hasta obtener unas bases de F y de G :

$$\begin{aligned} B_F &= \{u_1, u_2, \ldots, u_i, v_1, v_2, \ldots, v_{f-i}\}, \\ B_G &= \{u_1, u_2, \ldots, u_i, w_1, w_2, \ldots, w_{g-i}\}. \end{aligned}$$

El sistema $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_i.v_1, v_2, \ldots, v_{f-i}, w_1, w_2, \ldots, w_{g-i}\}$ genera a $F+G$. Veamos que es un sistema libre. En efecto, sea

$$\sum_{\alpha=1}^{i} \lambda_\alpha v_\alpha + \sum_{\beta=1}^{f-i} \mu_\beta v_\beta + \sum_{\gamma=1}^{g-i} \nu_\gamma w_\gamma = 0. \quad (1)$$

El vector $\sum_{\gamma=1}^{g-i} \nu_\gamma w_\gamma$, que pertenece a G, también pertence a F por ser combinación lineal de los elementos de B_F, y por tanto pertenece a $F \cap G$. Pero $F \cap G$ y el subespacio generado por los vectores $\{w_1, w_2, \ldots, w_{g-i}\}$, son suplementarios en G, luego $\sum_{\gamma=1}^{g-i} \nu_\gamma w_\gamma = 0$. Esto implica que todos los ν_γ son nulos al ser $\{w_1, w_2, \ldots, w_{g-i}\}$ sistema libre.

Sustituyendo estos ν_γ en (1), y al ser B_F sistema libre, también son nulos todos los λ_α y todos los μ_β, es decir S es sistema libre. En consecuencia, S es una base de $F+G$. Tenemos:

$$\begin{aligned} &\dim(F+G) = \operatorname{card} S = i + (f-i) + (g-i) = f + g - i \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G), \end{aligned}$$

lo cual prueba el teorema.

9.27. Coordenadas

1. En $\mathbb{R}^2$, hallar las coordenadas del vector $x = (1, 18)$:
$a)$ En la base $B = \{(3, -1), (-1, 4)\}$. $b)$ En la base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$.

2. Hallar las coordenadas del vector $x = (7, 5, -2, 1)$ respecto de la base de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{(1, -1, 2, 3), (4, 1, 0, 2), (3, -1, 3, 0), (1, -1, 1, 0)\}.$$

3. Hallar las coordenadas del vector $p(x) = -2x^3 - 11x^2 - 25x - 20$ respecto de las bases de $\mathbb{R}_3[x]$:
$a)$ $B = \{1, (x + 2), (x + 2)^2, (x + 2)^3\}$. $b)$ $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y B una base de E. Denotemos por $[u]_B$ el vector de coordenadas de $u \in E$ con respecto de la base B. Demostrar que:

1) Para cada $x \in E$, el vector $[x]_B$ es único (es decir, las coordenadas de un vector en una determinada base son únicas).
2) Para todo $x, y \in E$, se verifica $[x + y]_B = [x]_B + [y]_B$ (es decir, respecto de una determinada base, las coordenadas de la suma de dos vectores, son la suma de las respectivas coordenadas).
3) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$, se verifica $[\lambda x]_B = \lambda [x]_B$ (es decir, respecto de una determinada base, las coordenadas de un escalar por un vector, son el escalar por las coordenadas del vector).

Solución. 1. $a)$ Expresando $(1, 18) = x_1(3, -1) + x_2(-1, 4)$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = 18, \end{cases}$$

cuya solución es $x_1 = 2, x_2 = 5$. Es decir, $[x]_B = (2, 5)^t$.
$b)$ Dado que $(1, 18) = 1(1, 0) + 18(0, 1)$, se verifica $[x]_{B_c} = (1, 18)^t$.

2. Expresando $(7, 5, -2, 1) = x_1(1, -1, 2, 3) + x_2(4, 1, 0, 2) + x_3(3, -1, 3, 0) + x_4(1, -1, 1, 0)$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -3$, por tanto $[x]_B = (-1, 2, 1, -3)^t$.

3. a) Expresando $p(x) = x_1 \cdot 1 + x_2(x+2) + x_3(x+2)^2 + x_4(x+2)^3:$

$$\begin{aligned} -2x^3 - 11x^2 - 25x - 20 &= x_1 + x_2(x+2) + x_3(x^2+4x+4) + \\ &\quad x_4(x^3+6x^2+12x+8) \\ &= (x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4) \\ &\quad + (x_2 + 4x_3 + 12x_4)x + (x_3 + 6x_4)x^2 + x_4x^3. \end{aligned}$$

Identificando corficientes obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -20 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + 12x_4 = -25 \\ \qquad\qquad x_3 + 6x_4 = -11 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -2, \end{cases}$$

cuya única solución es $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 1, x_4 = -2$, por tanto $[p(x)]_B = (2, -5, 1, -2)^t$.

Segundo método. Aplicando la fórmula de Taylor a $p(x)$ en $x_0 = -2:$

$$\begin{aligned} &p(x) = -2x^3 - 11x^2 - 25x - 20 \Rightarrow p(-2) = 2 \\ &p'(x) = -6x^2 - 22x - 25 \Rightarrow p'(-2) = -5 \\ &p''(x) = -12x - 22 \Rightarrow p''(-2) = 2 \\ &p'''(x) = -12 \Rightarrow p'''(-2) = -12 \\ &p^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow p^{(4)}(-2) = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p(x) &= p(-2) + \frac{p'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{p''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{p'''(-2)}{3!}(x+2)^3 \\ &= 2 - 5(x+2) + (x+2)^2 - 2(x+2)^3, \end{aligned}$$

por tanto, $[p(x)]_B = (2, -5, 1, -2)^t$.

b) Dado que $p(x) = (-20) \cdot 1 - 25x - 11x^2 - 2x^3$, se verifica

$$[p(x)]_{B'} = (-20, -25, -11, -2)^t.$$

4, 1) Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, y supongamos que:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix},$$

entonces, por definición de coordenadas $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ y $x = x'_1u_1 + \ldots + x'_nu_n$. Esto implica $x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = x'_1u_1 + \ldots + x'_nu_n$, o de forma equivalente $(x_1 - x'_1)u_1 + \ldots + (x_n - x'_n)u_n = 0$. Dado que B es sistema libre, $x_1 - x'_1 = 0$, ... $x_n - x'_n = 0$, luego $x_1 = x'_1$, ... $x_n = x'_n$.

2) Sean $x, y \in E$ tales que:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [y]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

entonces, por definición de coordenadas, $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ e $y = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$. Esto implica $x + y = (x_1 + y_1)u_1 + \ldots + (x_n + y_n)u_n$. Es decir,

$$[x+y]_B = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x]_B + [y]_B.$$

3) Sean $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$, con $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$. Entonces, $\lambda x = (\lambda x_1)u_1 + \ldots + (\lambda x_n)u_n$, por tanto:

$$[\lambda x]_B = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda [x]_B.$$

9.28. Cambio de base

1. Sean $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{u'_1, u'_2\}$, dos bases de un espacio vectorial real E de dimensión 2 tales que $u'_1 = u_1 - 2u_2$, $u'_2 = 3u_1 + 4u_2$. Se pide hallar:
a) La matriz de cambio o de paso de B a B'.
b) La ecuación matricial del cambio de base.
c) Las coordenadas del vector $5u'_1 - u'_2$ en la base B.
d) Las coordenadas del vector $7u_2$ en la base B'.

2. Se consideran las bases de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2), (2,-1)\}$ y $B' = \{(3,1), (2,4)\}$. Hallar la matriz de paso de B a B'.

3. Se consideran las bases de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{(1,1,0), (-1,0,2), (0,2,5)\}, B' = \{(0,1,1), (1,1,1), (3,1,0)\}.$$

Hallar la matriz de paso de B a B'.

4. Sean B y B' dos bases de un espacio vectorial E. Deducir la fórmula del cambio de base $[x]_B = P\ [x]_{B'}$, para todo $x \in E$, en donde para todo $j = 1, \ldots, n$, la columna j-ésima de P son las coordenadas de u'_j con respecto de la base B.

5. Sean B y B' dos bases de un espacio vectorial E de dimensión finita n. Demostrar que:
a) La matriz de cambio P de B a B' es invertible.
b) La matriz de cambio de B' a B, es P^{-1}.

Solución. 1. *a*) Trasponiendo los correspondientes coeficientes:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) La ecuación matricial del cambio es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

en donde $(x_1, x_2)^t$ representan las coordenadas de un vector genérico $x \in E$ con respecto a la base B, y $(x'_1, x'_2)^t$ las coordenadas del mismo vector x con respecto a la base B'. Es decir, la ecuación matricial del cambio de base la podemos expresar en la forma $[x]_B = P[x]_{B'}$.
c) Sustituyendo en (1) :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \end{bmatrix},$$

por tanto, las coordenadas pedidas son $(2, -14)^t$.
d) Sustituyendo de nuevo en (1) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 + 3x'_2 = 0 \\ -2x'_1 + 4x'_2 = 7, \end{cases}$$

y resolviendo el sistema, obtenemos $x'_1 = -21/10$, $x'_2 = 7/10$. Las coordenadas pedidas son $(-21/10, 7/10)^t$.

2. Expresemos la base B' en términos de la B :

$$\begin{cases} (3,1) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,-1) \\ (2,4) = \beta_1(1,2) + \beta_2(2,-1). \end{cases}$$

Las igualdades anteriores equivalen a los sistemas:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 2 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

que resueltos proporcionan las soluciones $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $\beta_1 = 2, \beta_2 = 0$. La matriz pedida es por tanto:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que los sistema (1) equivalen a la igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

con lo cual, la matriz P también la podemos hallar de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Expresemos la base B' en términos de la B :

$$\begin{cases} (0,1,1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,0,2) + \alpha_3(0,2,5) \\ (1,1,1) = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(-1,0,2) + \beta_3(0,2,5) \\ (3,1,0) = \gamma_1(1,1,0) + \gamma_2(-1,0,2) + \gamma_3(0,2,5). \end{cases}$$

las igualdades anteriores equivalen a los sistemas:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_3 = 1 \\ 2\beta_2 + 5\beta_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 3 \\ \gamma_1 + 2\gamma_3 = 1 \\ 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

que resueltos proporcionan las soluciones:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (3, 3, -1) \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= (-1, -2, 1) \\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (-7, -10, -4). \end{aligned}$$

La matriz pedida es por tanto:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -2 & -10 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nótese que los sistema (1) equivalen a la igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con lo cual, la matriz P también la podemos hallar de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -2 & -10 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Sean $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$, y supongamos que

$$\begin{cases} u'_1 = p_{11}u_1 + \ldots + p_{1n}u_n \\ \qquad\ldots \\ u'_n = p_{n1}u_1 + \ldots + p_{nn}u_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Sea $[x]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $[x]_B = (x'_1, \ldots, x'_n)^t$, entonces, $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ y $x = x'_1u'_1 + \ldots + x'_nu'_n$. Usando las relaciones (1) :

$$\begin{aligned} x_1u_1 + \ldots + x_nu_n &= x'_1(p_{11}u_1 + \ldots + p_{1n}u_n) + \ldots + x'_n p_{n1}u_1 + \ldots + p_{nn}u_n) \\ &= (x'_1p_{11} + \ldots + x'_np_{n1})u_1 + \ldots + (x'_1p_{1n} + \ldots + x'_np_{nn})u_n. \end{aligned}$$

Las coordenadas de un determinado vector con respecto a una determinada base (en este caso la B), son únicas, por tanto:

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}x'_1 + \ldots + p_{n1}x'_n \\ \qquad\ldots \\ x_n = p_{1n}x'_1 + \ldots + p_{nn}x'_n, \end{cases}$$

y estas relaciones se pueden escribir matricialmente en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \ldots & p_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \ldots & p_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Es decir, queda $[x]_B = P\,[x]_{B'}$, en donde para todo $j = 1, \ldots, n$, la columna j-ésima de P son las coordenadas de u'_j con respecto de la base B.

5. *a*) Como B' es base de E, sus n vectores son linealmente independientes, lo cual implica que lo son los n vectores columna de P. El rango de la matriz P, que es de orden $n \times n$ es n, luego P es invertible.
b) Se deduce del hecho de que si $[x]_B = P\,[x]_{B'}$, entonces $[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B$.

9.29. Ecuaciones de los subespacios

1. Hallar la dimensión y una base del subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ determinado por el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

y hallar unas ecuaciones paramétricas de F.

2. Hallar unas ecuaciones implícitas o cartesianas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$F \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 7\lambda_3 \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}).$$

3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, una matriz de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Demostrar que:
(a) $F = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{K}^n$.
(b) $\dim F = n - \operatorname{rg}(A)$.

Solución. 1. Hallemos el rango de la matriz del sistema:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & -4 & -17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & -18 \end{bmatrix}$$
$$\underset{F_3 + 3F_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por tanto, $\dim F = 4 - \operatorname{rg}(A) = 4 - 2 = 2$. Para hallar una base de F consideramos el sistema escalonado:

$$F \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Dando a las incógnitas libres (en este caso x_3 y x_4) valores de la matriz identidad esto es, $x_3 = 1, x_4 = 0$ y luego $x_3 = 0, x_4 = 1$ nos asegura una base de F (tendríamos dos vectores linealmente independientes en F que es de dimensión 2).
Para $x_3 = 1, x_4 = 0$ obtenemos $x_1 = -3/2$ y $x_2 = 1/2$. Para $x_3 = 0, x_4 = 1$ obtenemos $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. Una base de F será por tanto $\{(-3/2, 1/2, 1, 0), (-2, 3, 0, 1)\}$, y multiplicando por 2 el primer vector obtenemos otra base:

$$B = \{(-3, 1, 2, 0), (-2, 3, 0, 1)\}.$$

Hallemos ahora unas ecuaciones paramétricas de F. Los vectores de F son exactamente los que se pueden escribir en la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(-3, 1, 2, 0) + \lambda_2(-2, 3, 0, 1) \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

en consecuencia unas ecuaciones paramétricas de F son:

$$F \equiv \begin{cases} x_1 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_2 = \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ x_3 = \quad 2\lambda_1 \\ x_4 = \qquad\quad \lambda_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Podemos escribir F en la forma:

$$F \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}).$$

Los tres vectores columna anteriores generan a F, y fácilmente podemos verificar que el rango de la matriz formada por estas columnas es 2. Dado que el rango de la matriz formada por las dos primeras columnas es dos, concluimos que estas forma una base de F. Con este proceso, hemos eliminado el parámetro innecesario λ_3. Podemos ahora escribir F en la forma:

$$F \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}).$$

Eliminemos los parámeros μ_1 y μ_2. Tenemos:

$$F \equiv \begin{cases} x_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ x_2 = 2\mu_1 + \mu_2 \\ x_3 = -\mu_1 + 3\mu_2 \\ x_4 = \mu_1 \end{cases} \quad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}).$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos $\mu_1 = x_4$ y $\mu_2 = (x_3 + x_4)/2$. Sustituyendo en las restantes ecuaciones y simplificando, obtenemos unas ecuaciones cartesianas o implícitas de F :

$$F \equiv \begin{cases} 3x_1 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

3. (a) El vector $0 = (0, \ldots, 0)^t$ de $\mathbb{K}^n$, claramente cumple $Ax = 0$, es decir $0 \in F$. Sean $x, y \in F$, entonces $Ax = 0$ y $Ay = 0$, por tanto

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0,$$

luego $x+y\in F$. Por último, sean $\lambda\in\mathbb{K}$ y $x\in F$, entonces

$$A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda 0=0,$$

luego $\lambda x\in F$. Concluimos que F es subespacio de $\mathbb{K}^n$.
(*b*) Sea $\operatorname{rg}(A)=r$. Entonces, efectuando la reducción de Gauss-Jordan, el sistema lineal $Ax=0$ será equivalente a uno escalonado de la forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & = b_{1,r+1}x_{r+1} & +\ldots & +b_{1n}x_n \\ & x_2 & = b_{2,r+1}x_{r+1} & +\ldots & +b_{2n}x_n \\ & \ldots & \quad\ldots & \ldots & \\ & & x_r = b_{r,r+1}x_{r+1} & +\ldots & +b_{rn}x_n, \end{array}\right.$$

en donde hemos supuesto (sin pérdida de generalidad), que las incógnitas básicas son $x_1,\ldots,x_r$. Las soluciones del sistema son:

$$F\equiv\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_{r+1}\begin{bmatrix} b_{1,r+1}\\ \vdots\\ b_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\ldots+x_n\begin{bmatrix} b_{1n}\\ \vdots\\ b_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\qquad(1)$$

en donde $x_{r+1,},\ldots,x_n$ varían en $\mathbb{K}$. Las $n-r$ columnas del segundo miembro de (1), generan a F y son linealmente independientes, luego forman una base de F. Concluimos que $\dim F=n-\operatorname{rg}(A)$.

9.30. Bases de la suma e intersección de subespacios

1. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_2+x_3+x_4=0\},$$

$$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2=0,\ x_3=2x_4\}.$$

Hallar unas bases de: (*i*) U. (*ii*) V. (*iii*) $U\cap V$.

2. Sean F_1 y F_2 subespacios de un espacio vectorial E, y sean S_1 y S_2 sistemas generadores de F_1 y F_2 respectivamente. Demostrar que $S_1\cup S_2$ es sistema generador de F_1+F_2.

3. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \langle (3,-1,1,2), (-1,0,2,-1), (1,-1,5,0) \rangle,$$

$$V = \langle (1,1,-1,2), (5,0,-2,5) \rangle.$$

Hallar unas bases de $U+V$ y de $U \cap V$.

Solución. 1. (i) El subespacio U es el conjunto de las soluciones del sistema lineal

$$\left\{ 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \right.$$

La dimensión de U es por tanto, $\dim U = 4 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$. Dando a las incógnitas libres (en este caso x_1, x_3 y x_4) valores de la matriz identidad nos asegura una base de U (tendríamos tres vectores linealmente independientes en U que es de dimensión 3). Para $x_1 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ obtenemos $x_2 = 0$. Para $x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ obtenemos $x_2 = -1$. Para $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ obtenemos $x_2 = -1$.
Una base de U es por tanto

$$B_U = \{(1,0,0,0), (0,-1,1,0), (0,-1,0,1)\}.$$

(ii) Procedemos de manera análoga. Tenemos:

$$V \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim V = 4 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Para $x_1 = 1, x_4 = 0$, obtenemos $x_2 = -1, x_3 = 0$. Para $x_1 = 0, x_4 = 1$, obtenemos $x_2 = 0, x_3 = 2$. Una base de V es por tanto

$$B_V = \{(1,-1,0,0), (0,0,2,1)\}.$$

(iii) Los vectores de $U \cap V$ son exactamente los que satisfacen las condiciones de pertenencia a U y a V, es decir:

$$U \cap V \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\dim(U \cap V) = 4 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Para $x_4 = 1$, obtenemos $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2$, luego una base de $U \cap V$ es:

$$B_{U \cap V} = \{(3,-3,2,1)\}.$$

2. Si $x \in F_1 + F_2$, entonces x es de la forma $x = u + v$ con $u \in F_1$ y $v \in F_2$. Como S_1 genera a F_1 y S_2 genera a F_2, se verifica $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ y $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m u_m$ para ciertos escalares λ_i, μ_j y ciertos vectores $u_i \in F_1$, $v_j \in F_2$. Entonces,

$$x = u + v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m u_m,$$

con $u_i, v_j \in S_1 \cup S_2$ para todo i, j. Concluimos que $S_1 \cup S_2$ es sistema generador de $F_1 + F_2$.

3. Según el ejercicio anterior, los cinco vectores dados generan a $U + V$. Para hallar una base de este subespacio, bastará extraer el máximo número de linealmente independientes.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \sim \\ 3F_2 + F_1 \\ 3F_3 - F_1 \\ 3F_4 - F_1 \\ 3F_5 - 5F_1 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \sim \\ F_3 - 2F_2 \\ 3F_3 - F_1 \\ F_4 + 4F_2 \\ F_5 + 5F_1 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \sim \\ F_5 - F_4 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \sim \\ \frac{1}{24}F_4 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base de $U+V$ es por tanto $B_{U+V} = \{(3,-1,1,2), (0,-1,7,-1), (0,0,1,0)\}$. Para hallar una base de $U \cap V$, hallemos previamente unas ecuaciones implícitas de U, y unas de V. Obsérvese que en el proceso anterior, las manipulaciones de las tres primeras filas producen vectores de U, por lo que una base de este subespacio es $B_U = \{(3,-1,1,2), (0,-1,7,-1)\}$. Unas ecuaciones paramétricas de U son:

$$x_1 = 3\lambda_1,\ x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2,\ x_3 = \lambda_1 + 7\lambda_2,\ x_4 = 2\lambda_1 - \lambda_2.$$

Eliminando parámetros, obtenemos:

$$U \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Una base de V es $B_V = \{(1,1,-1,2),(5,0,-2,5)\}$. Procediendo de manera análoga, hallamos unas ecuaciones implícitas de V, obteniendo:

$$V \equiv \left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{matrix}\right. \qquad (2)$$

Los vectores de $U \cap V$ son exactamente los vectores que satisfacen las condiciones (1) y (2), por tanto unas ecuaciones implícitas de $U \cap V$ son:

$$U \cap V \equiv \left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{matrix}\right.$$

Usando el procedimiento estándar par el cálculo de una base de un subespacio dado por unas ecuaciones implícitas, obtenemos la base de $U \cap V$:

$$B_{U\cap V} = \{(4,-1,-1,3)\}.$$

9.31. Espacio vectorial cociente

1. Se considera el subespacio F de $\mathbb{R}^4$:

$$F \equiv \left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{matrix}\right.$$

(i) Hallar una base de F.
(ii) Hallar una base de $\mathbb{R}^4/F$.
(iii) Hallar las coordenadas del vector $(1,-3,2,6)+F$ en la base hallada en el apartado anterior.

2. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y F un subespacio de E. Sea $(E/F,+)$ el correspondiente grupo cociente, cuya operación suma sabemos que está definida mediante: $(x+F)+(y+F) = (x+y)+F$. Se define la operación ley externa:

$$\lambda(x+F) = (\lambda x) + F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall (x+F) \in E/F.$$

Demostrar que E/F es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones mencionadas (*espacio vectorial cociente*).

3. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial. Supongamos que $B_F = \{u_1,\ldots,u_r\}$ es base de F y que

$$B_E = \{u_1,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_n\}$$

es base de E. Demostrar que una base de E/F es

$$B_{E/F} = \{u_{r+1} + F, \ldots, u_n + F\}.$$

Deducir que $\dim E/F = \dim E - \dim F$, igualdad válida también para los casos $r = 0$ o $r = n$.

Solución. 1. (i) Usando el conocido método para el cálculo de una base de un subespacio dado por sus ecuaciones cartesianas, obtenemos fácilmente una base de F:

$$B_F = \{(-1, 2, 1, 0), (-4, 2, 0, 1)\}.$$

(ii) Ampliemos la base B_F para obtener una base de $\mathbb{R}^4$. Dado que

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4,$$

una base de $\mathbb{R}^4/F$ es

$$B = \{(-1, 2, 1, 0), (-4, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

por tanto una base de $\mathbb{R}^4/F$ es

$$B_{\mathbb{R}^4/F} = \{(0, 0, 1, 0) + F, (0, 0, 0, 1) + F\}.$$

(iii) Expresemos el vector dado como combinación lineal de la base hallada en el apartado anterior. Tenemos

$$\begin{aligned} &(1, -3, 2, 6) + F = \lambda_1 [(0, 0, 1, 0) + F] + \lambda_2 [(0, 0, 0, 1) + F] \\ &\Leftrightarrow (1, -3, 2, 6) + F = (0, 0, \lambda_1, \lambda_2) + F \Leftrightarrow (1, -3, 2 - \lambda_1, 6 - \lambda_2) \in F \\ &\Leftrightarrow (1, -3, 2 - \lambda_1, 6 - \lambda_2) \in L[(-1, 2, 1, 0), (-4, 2, 0, 1)]. \end{aligned}$$

La última condición equivale a que

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda_1 & 6 - \lambda_2 \end{bmatrix} = 2,$$

y triangulando, equivale a que:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6\lambda_1 - 22 & 6\lambda_2 - 35 \end{bmatrix} = 2,$$

que a su vez equivale a $6\lambda_1 - 22 = 0$ y $6\lambda_2 - 35 = 0$. Las coordenadas pedidas son por tanto $(\lambda_1, \lambda_2) = (11/3, 35/6)$.

2. Veamos que la operación ley externa está bien definida, es decir que depende de la clase en sí, y no de sus representantes. En efecto, si $x + F = x' + F$, entonces $x - x' \in F$. Dado que F es subespacio de E, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica $\lambda(x - x') = \lambda x - \lambda x' \in F$, y por tanto:

$$\lambda(x + F) = (\lambda x) + F = (\lambda x') + F = \lambda(x' + F).$$

Veamos ahora que se verifican los cuatro axiomas de ley externa. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x + F, y + F \in E/F$, y usando propiedades de la suma y ley externa correspondientes a E :

$$\begin{aligned}&\lambda[(x + F) + (y + F)] = \lambda[(x + y) + F] = \lambda(x + y) + F\\&= \lambda x + \lambda y + F = (\lambda x + F) + (\lambda x + F) = \lambda(x + F) + \mu(y + F).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda + \mu)(x + F) = (\lambda + \mu)x + F = \lambda x + \mu x + F\\&= (\lambda x + F) + (\mu x + F) = \lambda(x + F) + \mu(x + F).\end{aligned}$$

$$(\lambda\mu)(x + F) = (\lambda\mu)x + F = \lambda(\mu x) + F = \lambda(\mu x + F) = \lambda\left(\mu(x + F)\right).$$

$$1(x + F) = 1x + F = x + F.$$

3. Veamos que $B_{E/F}$ es sistema libre. Tenemos:

$$\begin{aligned}&\lambda_{r+1}\left(u_{r+1} + F\right) + \ldots + \lambda_n\left(u_n + F\right) = 0 + F\\&\Rightarrow (\lambda_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \lambda_n u_n) + F = 0 + F \Rightarrow\\&\lambda_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \lambda_n u_n \in F.\end{aligned}$$

La última relación implica que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\lambda_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r,$$

o de forma equivalente, $-\lambda_1 u_1 + \ldots - \lambda_r u_r + \lambda_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Al ser B_E sistema libre, se concluye que todos los λ_i son nulos y en particular $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

Veamos que $B_{E/F}$ es sistema generador de E/F. Sea $x + F \in E/F$. Como $x \in E$ y B_E genera a E, existen escalares $x_1, \ldots, x_n$ tales $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}&x + F = (x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) + F\\&= [(x_1u_1 + \ldots + x_ru_r) + F] + [(x_{r+1}u_{r+1} + \ldots + x_nu_n) + F]\\&= (\text{pues } x_1u_1 + \ldots + x_ru_r \in F)\ [0 + F] + [(x_{r+1}u_{r+1} + \ldots + x_nu_n) + F]\\&= (x_{r+1}u_{r+1} + \ldots + x_nu_n) + F = x_{r+1}(u_{r+1} + F) + \ldots + x_n(u_n + F),\end{aligned}$$

es decir, $B_{E/F}$ es sistema generador de E/F. Para el caso $r = 0$ tenemos $F = \{0\}$ y $E/F = E$. Para el caso $r = n$ tenemos $F = E$ y $E/F = \{0\}$, y en cualquier caso $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

9.32. Cambio de base en orbitales atómicos

En la interpretación del enlace químico mediante la teoría de orbitales moleculares desempeñan un papel importante los orbitales híbridos. Cuando el estudio se lleva a cabo solamente con los orbitales s y p aparecen tres clases de híbridos a saber: sp_1, sp_2 y sp_3. En los tres casos sólo se trata de un cambio de base en un cierto espacio funcional. Las funciones de la base inicial son los orbitales atómicos s, px, py, pz (que se denotarán en forma abreviada por s, x, y, z) y las funciones de la base híbrida se definen como: En sp_3 :

$$h_1 = \frac{1}{2}(s + x + y + z), \quad h_2 = \frac{1}{2}(s + x - y - z),$$

$$h_3 = \frac{1}{2}(s - x - y + z), \quad h_4 = \frac{1}{2}(s - x + y - z).$$

En sp_2 :

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(s + \sqrt{2}x), \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}[s - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{3}y)],$$

$$t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}[s - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \sqrt{3}y)], \quad t_4 = z.$$

(a) Hallar la matriz T de cambio de base de la atómica a la híbrida sp_3 y la matriz R de cambio de la atómica a la híbrida sp_2.
(b) Hallar en función de T y R la matriz de cambio de la hibridación sp_3 a la sp_2.

Solución. *(a)* Tenemos las relaciones matriciales:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

y denotando

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

obtenemos las relaciones

$$\begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix},$$

de lo cual deducimos que $T = P^{-1}$ y $R = Q^{-1}$.
(b) Tenemos

$$\begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = T^{-1}R\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix},$$

por tanto, la matriz pedida es $T^{-1}R$.

9.33. Intersección de subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$

En el espacio $(\mathbb{Z}_7)^4$ determinar la intersección de los subespacios dados por

$$L_1 = \langle (2,3,0,4),(3,5,0,6),(0,4,2,0)\rangle \ , \quad L_2 \equiv \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

(Propuesto en hojas de problemas, Álgebra, ETS de Ing, de Caminos, UPM).

Solución. Las tablas de la suma y producto en $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ son

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Por tanto, los elementos opuesto $-a$ e inverso a^{-1} de cada $a \in \mathbb{Z}_7$ son

a	0	1	2	3	4	5	6
$-a$	0	6	5	4	3	2	1
a^{-1}	$\nexists$	1	4	5	2	3	6

Usando la información anterior, hallemos unas ecuaciones cartesianas de L_1. Todo vector de este subespacio se puede expresar en la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(2, 3, 0, 4) + \lambda_2(3, 5, 0, 6) + \lambda_3(0, 4, 2, 0) \quad (\lambda_i \in \mathbb{Z}_7).$$

De forma equivalente:

$$L_1 \equiv \begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ x_2 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ x_3 = 2\lambda_3 \\ x_4 = 4\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{cases} \quad (\lambda_i \in \mathbb{Z}_7).$$

Eliminemos los parámetros:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 3 & 5 & 4 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 \\ 4 & 6 & 0 & x_4 \end{array}\right] \sim (2F_2 - 3F_1, F_4 - 2F_1) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2x_2 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_1 \end{array}\right].$$

Es decir, L_1 está determinado por la ecuación cartesiana $x_4 - 2x_1 = 0$. Unas ecuaciones cartesianas de $L_1 \cap L_2$ son por tanto

$$L_1 \cap L_2 \equiv \begin{cases} -2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Escalonando el sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim (F_2 + F_1, 2F_3 + 3F_1) \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim (3^{-1}F_3, F_2 \leftrightarrow F_3) \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El rango de la matriz A del sistema escalonado es 3, por tanto:

$$\dim(L_1 \cap Ł_2) = \dim(\mathbb{Z}_7)^4 - \text{rg } A = 4 - 3 = 1.$$

Para hallar una base de $L_1 \cap L_2$ basta asignar a la incógnita libre x_4 el valor 1. La tercera ecuación es $2x_3 = 0$ con lo cual $x_3 = 0$. Sustituyendo en la segunda queda $x_2 = -1$ o bien $x_2 = 6$. Sustituyendo en la primera queda $-2x_1 = -1$ o bien $2x_1 = 1$ o bien $x_1 = 4$. Concluimos que una base de $L_1 \cap L_2$ es $B = \{(4, 6, 0, 1)\}$.

9.34. Espacio vectorial de las funciones definidas en un conjunto

Sea A un conjunto no vacío y sea F un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Denotamos por $\mathscr{F}(A, F) = \{f : A \to F\}$ al conjunto de las funciones f de A en F. Se definen las operaciones

Suma en $\mathscr{F}(A, F)$. Para todo f, g elementos de $\mathscr{F}(A, F)$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in A.$$

Ley externa. Para todo $f \in \mathscr{F}(A, F)$, y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in A.$$

Demostrar que $\mathscr{F}(A, F)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones anteriormente definidas.

Solución. 1) $(\mathscr{F}(A, F), +)$ es grupo abeliano.

Interna. Claramente, la suma de dos funciones de A en $\mathbb{F}$ es función de A en F.

Asociativa. Para todo $f, g, h \in \mathscr{F}(A, F)$, para todo $x \in A$ y usando la propiedad asociativa de la suma de vectores en F:

$$\begin{aligned}&[(f + g) + h](x) = [(f + g)(x)] + h(x) = [f(x) + g(x)] + h(x)\\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] = f(x) + [(g + h)(x)] = [f + (g + h)](x).\end{aligned}$$

Por la definición de igualdad de funciones, $(f + g) + h = f + (g + h)$.

Elemento neutro. Consideremos la función $0 : A \to F$ definida por $0(x) = 0$ para todo $x \in A$. Entonces, para cualquier $f \in \mathscr{F}(A, F)$:

$$\begin{aligned}&(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow f + 0 = f,\\ &(0 + f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \Rightarrow 0 + f = f,\end{aligned}$$

por tanto la función 0 es elemento neutro.

Elemento simétrico. Para cada $f \in \mathscr{F}(A, F)$, definamos la función $-f$ de la siguiente manera: $(-f)(x) = -f(x),\ x \in X$. Entonces, para todo $x \in A$:

$$\begin{aligned}&[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 \Rightarrow f + (-f) = 0,\\ &[(-f) + f](x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 \Rightarrow (-f) + f = 0,\end{aligned}$$

es decir todo elemento de $\mathscr{F}(A,F)$ tiene simétrico.

Conmutativa. Para todo $f,g \in \mathscr{F}(A,F)$, para todo $x \in A$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de vectores en F:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f+g = g+f.$$

2) Se cumplen los cuatro axiomas de ley externa. Para todo $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, para todo $f,g \in \mathscr{F}(A,F)$, para todo $x \in A$ y usando la definición de igualdad de funciones:

1. $(\lambda(f+g))(x) = \lambda((f+g)(x)) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x)+\lambda g(x)$
$= (\lambda f)(x)+(\lambda g)(x) = (\lambda f+\lambda g)(x) \Rightarrow \lambda(f+g) = \lambda f+\lambda g.$
2. $((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x)+\mu f(x) = (\lambda f)(x)+(\mu f)(x)$
$= (\lambda f+\mu f)(x) \Rightarrow (\lambda+\mu)f = \lambda f+\mu f.$
3. $((\lambda\mu)f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda((\mu f)(x)) = (\lambda(\mu f))(x)$
$\Rightarrow (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f).$
4. $(1f)(x) = 1f(x) = f(x) \Rightarrow 1f = f.$

9.35. Realificación de un espacio vectorial complejo

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ al que denotamos por $E(\mathbb{C})$. Se define el espacio *realificado* de $E(\mathbb{C})$ y se denota por $E(\mathbb{R})$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ obtenido al sustituir en el producto por escalares en E, el cuerpo $\mathbb{C}$ por el cuerpo $\mathbb{R}$. Demostrar que si $E(\mathbb{C})$ es de dimensión finita n, entonces $E(\mathbb{R})$ es de dimensión $2n$.

Solución. Sea $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de $E(\mathbb{C})$. Veamos que una base de $E(\mathbb{R})$ es $B' = \{u_1,\ldots,u_n,iu_1,\ldots,iu_n\}$, lo cual probará que $\dim E(\mathbb{R}) = 2n$.
i) B' es sistema libre en $E(\mathbb{R})$. En efecto, supongamos que

$$\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n+\beta_1(iu_1)+\cdots+\beta_n(iu_n) = 0 \text{ con los } \alpha_k,\beta_k \text{ reales.}$$

Entonces, $(\alpha_1+i\beta_1)u_1+\cdots+(\alpha_n+i\beta_n)u_n = 0$. Ahora bien, como B es sistema libre en $E(\mathbb{C})$, se verifica $\alpha_k+i\beta_k = 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$ lo cual implica $\alpha_k = \beta_k = 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$
ii) B' es sistema generador en $E(\mathbb{R})$. En efecto, sea $x \in E$. Como B es sistema generador en $E(\mathbb{C})$ existen escalares $\alpha_k+i\beta_k$ con los α_k, β_k reales tales que

$$x = (\alpha_1+i\beta_1)u_1+\cdots+(\alpha_n+i\beta_n)u_n,$$

es decir $x = \alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n+\beta_1(iu_1)+\cdots+\beta_n(iu_n)$ con los α_k, β_k reales.

9.36. Subespacios transversales

Sea E un espacio vectorial real. Se dice que dos subespacios vectoriales U y V son *transversales* cuando $U+V=E$. Se pide:
a) Determinar cuales de las nueve parejas ordenadas posibles (formadas por dos de estos tres subespacios) son transversales. Justificar la respuesta.

$$\begin{aligned} U &= \{x,x,x) : x \in \mathbb{R}\}, \\ V &= \{x,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}, \\ W &= \{x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

b) Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que si f transforma subespacios transversales de E en subespacios transversales de F, entonces f es sobreyectiva.
c) Enunciar la proposición recíproca de la anterior y estudiar su validez (en caso de ser verdadera dar una demostración, y en caso contrario construir un contraejemplo).

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. a) Los subespacios dados se pueden escribir en la forma

$$U = \langle (1,1,1) \rangle \ , \ V = \langle (1,1,0),(0,0,1) \rangle \ , \ W = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle .$$

Sabemos que se obtiene un sistema generador de la suma de dos subespacios mediante la unión de un sistema generador de un subespacio con un sistema generador del otro. Es decir

$$\begin{aligned} &U+U = \langle (1,1,1) \rangle \\ &V+V = \langle (1,1,0),(0,01) \rangle \\ &W+W = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle \\ &U+V = V+U = \langle (1,1,1),(1,1,0),(0,0,1) \rangle \\ &U+W = W+U = \langle (1,1,1),(1,0,0),(0,1,0) \rangle \\ &V+W = W+V = \langle (1,1,0),(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0) \rangle . \end{aligned}$$

Para que alguna de las parejas anteriores determinen subespacios transversales, el rango del sistema generador correspondiente ha de ser 3. Claramente las tres primeras parejas no determinan subespacios transversales. Los rangos de los otros sistemas generadores son

$$\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \ , \ \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \ , \ \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Se concluye pues que de las nueve parejas, las que determinan subespacios transversales son $(U,W),\ (W,U),\ (V,W)$ y (W,V).

b) Los subespacios $\{0\}$ y E son transversales en E pues $\{0\}+E=E$. Por hipótesis los subespacios $f(\{0\})$ y $f(E)$ son transversales en F es decir, $f(\{0\})+f(E)=F$. Como f es lineal, $f(\{0\})=\{0\}$ y por tanto, $f(E)=F$. En consecuencia, f es sobreyectiva.

c) La proposición recíproca es: *Si f es sobreyectiva, entonces f transforma subespacios transversales de E en subespacios transversales de F*. Veamos que es cierta. En efecto, sean U y V subespacios transversales en E es decir, $U+V=E$. Tenemos que demostrar que $f(U)$ y $f(V)$ lo son en F. Evidentemente $f(U)+f(V)\subset F$. Demostremos la otra inclusión.
Como f es sobreyectiva para todo $y\in F$ existe $x\in E$ tal que $y=f(x)$. Por otra parte, al ser $U+V=E$, x se puede expresar en la forma $x=u+v$ con $u\in U$ y $v\in V$. Dado que f es lineal:

$$y=f(x)=f(u+v)=f(u)+f(v)\in f(U)+f(V).$$

Es decir, $F\subset f(U)+f(V)$, lo cual concluye la demostración.

Capítulo 10

Aplicaciones lineales

10.1. Concepto de aplicación lineal (1)

1. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ dada por $f(p) = p'$ (derivada de p), es lineal.

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar que la siguiente aplicación es lineal

$$f : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{n\times m}, \quad f(X) = X^T \text{ (traspuesta de } X).$$

3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matriz fija dada. Demostrar que aplicación

$$f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad f(X) = AX - XA$$

es lineal.

4. Sea $\mathcal{C}[a, b]$ el espacio vectorial real de las funciones reales $x(t)$, continuas en el intervalo $[a, b]$. Estudiar si es lineal la aplicación:

$$f : \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}, \quad f\,(x(t)) = \int_a^b x(t)\, dt.$$

5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matriz fija dada. Estudiar si es lineal la aplicación

$$f : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{m\times n}, \quad f(X) = A + X.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación $f(x, y, z) = (x + 1, x + 2y + 3z)$. Analizar si es lineal.

7. Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Analizar si es lineal la aplicación

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z} \quad \text{(conjugado de } z).$$

Ídem considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Solución. 1. Usando conocidas propiedades de la derivación:
(i) Para todo $p, q \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(p+q) = (p+q)' = p' + q' = f(p) + f(q).$$

(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda f(p).$$

Concluimos que f es lineal.

2. Usando conocidas propiedades de la transposición: (i) Para todo $X, Y \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$f(X+Y) = (X+Y)^T = X^T + Y^T = f(X) + f(Y).$$

(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $X \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$f(\lambda X) = (\lambda X)^T = \lambda X^T = \lambda f(X).$$

Concluimos que f es lineal.

3. (i) Para todo $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$f(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA$$

$$= (AX - XA) + (AY - YA) = f(X) + f(Y).$$

(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$f(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX) - \lambda(XA) = \lambda(AX - XA) = \lambda f(X).$$

Concluimos que f es lineal.

4. Usando conocidas propiedades de la integral definida, se verifica para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $x(t), y(t) \in \mathcal{C}[a,b]$:

$$f\left(\lambda x(t) + \mu y(t)\right) = \int_a^b \left(\lambda x(t) + \mu y(t)\right) dt$$

$$= \lambda \int_a^b x(t)\ dt + \mu \int_a^b y(t)\ dt = \lambda f\left(x(t)\right) + \mu f\left(y(t)\right).$$

Concluimos que f es lineal.

5. (i) Para todo $X, Y \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$f(X+Y) = A + (X+Y), \quad f(X) + f(Y) = (A+X) + (A+Y).$$

Entonces, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ equivale a $A + X + Y = 2A + X + Y$, y esta última igualdad se verifica para todo X, Y, si y sólo si $A = 0$, único caso para el cual f puede ser lineal.
(ii) Para $A = 0$ la aplicación es $f(X) = X$. Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $X \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$f(\lambda X) = \lambda X = \lambda f(X).$$

Concluimos que f es lineal si y sólo si $A = 0$.

6. Dado que $f(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, la aplicación no es lineal.

7. Considerando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y eligiendo $\lambda = i$, y $x = 1$:

$$f(i1) = \overline{i1} = \bar{i} = -i, \quad if(1) = i\bar{1} = i1 = i,$$

es decir, $f(i1) \neq if(1)$, luego f no es lineal.
Consideremos ahora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $z, w \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda z + \mu w) = \overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \bar{\lambda}\bar{z} + \bar{\mu}\bar{w} = \lambda\bar{z} + \mu\bar{w} = \lambda f(z) + \mu f(w)$$

por tanto, f es lineal.

10.2. Concepto de aplicación lineal (2)

1. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal y $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset E$ un sistema ligado. Demostrar que $f(S)$ también es ligado.

2. Dar un ejemplo de una aplicación lineal $f : E \to F$ que transforme un sistema libre de S en un sistema ligado de F.

3. Determinar el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considerado $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre sí mismo.

4. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : E \to F$ una aplicación. Demostrar que:

$$f \text{ es lineal } \Leftrightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E.$$

5. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que,
1) $f(0) = 0$.

2) $f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in E$.
3) $f(x-y) = f(x) - f(y) \ \forall x, y \in E$

6. Sea $E = \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+\right)$ el espacio vectorial real de las funciones reales continuas f definidas en $\mathbb{R}^+$. Sea $T : E \to E$ la aplicación $f \to T(f) = F$ definida por

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \quad (x > 0) \\ F(0) = f(0). \end{cases}$$

Demostrar que T es lineal.

7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matriz fija dada. Demostrar que aplicación $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $f(X) = AX$ es lineal.

Solución. 1. En efecto, veamos que $f(S) = \{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ es ligado. Como S es ligado, existen escalares no todos nulos tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$. Aplicando f a ambos miembros, usando la linealidad de f y que $f(0) = 0:$

$$\lambda f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p) = 0,$$

no siendo nulos todos los escalares, en consecuencia $f(S)$ es ligado en $\mathbb{R}$.

2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. El sistema $S = \{(1,0), (0,1)\}$ es libre en $\mathbb{R}^2$, sin embargo, $f(S) = \{1,1\}$ es ligado.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal y sea $f(1) = a$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xa,$$

es decir si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal, f es de la forma $f(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $f(x) = ax$ con a real, se verifica para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ escalares y para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vectores:

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda ax + \mu ay = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

luego f es lineal. Concluimos que el conjunto pedido es

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax \text{ con } a \in \mathbb{R}\}.$$

4. $\Rightarrow$) Como f es lineal, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in E$,

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

$\Leftarrow$) (i) Para $\lambda = \mu = 1$, se verifica para todo $x, y \in E$:

$$f(x+y) = f(1x+1y) = 1f(x) + 1f(y) = f(x) + f(y).$$

(ii) Para $\mu = 0$, se verifica para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in E$:

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + 0y) = \lambda f(x) + 0f(y) = \lambda f(x).$$

5. Si f es lineal, es homomorfismo entre los grupos aditivos $(E, +)$ y $(F, +)$, con lo cual 1), 2) y 3) son consecuencia inmediata de conocidas propiedades de esos homomorfismos.

6. Veamos previamente que T está bien definida, es decir que $F \in E$. Las propiedades de la integral aseguran que F es continua para $x > 0$. Por otra parte, por aplicación de la regla de L'Hopital y el teorema fundamental del Cálculo,

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1} = f(0) = F(0),$$

luego F también es continua en 0. Veamos que T es lineal. En efecto, para α, β reales, $f, g \in E$, y $x > 0$

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$$

$$= \alpha \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt + \beta \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\, dt = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x)$$

$$= (\alpha T(f) + \beta T(g))(x).$$

Por otra parte,

$$T(\alpha f + \beta g)(0) = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0)$$

$$= \alpha T(f)(0) + \beta T(g)(0) = (\alpha T(f) + \beta T(g))(0).$$

Hemos demostrado pues que para todo α, β reales y $f, g \in E$, $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ y por tanto T es lineal.

7. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$f(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Concluimos que f es lineal.

10.3. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$:

$$f(x, y.z) = (x + 2y - z,\ -x + y + 2z,\ 3y + z,\ 3x - 5z).$$

Hallar unas bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

2. Sea $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ la aplicación lineal definida dada por $D(p) = p'$ (derivada de p). Determinar $\ker D$ e $\operatorname{Im} D$.

3. Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f(X) = X - X^T$$

en donde X^T representa la traspuesta de X.
1) Demostrar que f es lineal.
2) Determinar $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

4. Sea $f : E \to F$ lineal e inyectiva. Demostrar que si $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subset E$ es sistema libre, también $f(S)$ es sistema libre.

5. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que:
$a)$ $\ker f$ es subespacio vectorial de E.
$b)$ $\operatorname{Im} f$ es subespacio vectorial de F.

6. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal, E_1 subespacio de E y F_1 subespacio de F. Demostrar que
(i) La imagen directa de E_1, es decir $f(E_1)$, es subespacio de F.
(ii) La imagen inversa de F_1, es decir $f^{-1}(F_1)$, es subespacio de E.
(iii) Particularizar para $E_1 = E$ y $F_1 = \{0\}$.

7. Definir dos endomorfismos en $\mathbb{R}[x]$, uno inyectivo pero no sobreyectivo y otro sobreyectivo pero no inyectivo. ¿Es posible alguna de las dos situaciones anteriores para un espacio vectorial E de dimensión finita?

Solución. 1. Tenemos

$$(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 3x - 5z = 0. \end{array} \right.$$

Usando el conocido método para el cálculo de una base de un subespacio dado por unas ecuaciones cartesianas, obtenemos $B_{\ker f} = \{(5,-1,3)\}$. Por otra parte,

$$(x', y', z', u') \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z', u') = f(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' - = x + y + 2z \\ z' = 3y + z \\ u' = 3x - 5z. \end{cases} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Usando el conocido método para el cálculo de una base de un subespacio dado por unas ecuaciones paramétricas, obtenemos

$$B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,-1,0,3), (0,1,1,-2)\}.$$

2. Tenemos

$$\ker D = \{p \in \mathbb{R}[x] : D(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}[x] : p' = 0\}$$

$$= \{p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ es constante}\}.$$

Es decir, $\ker D = \mathbb{R}$. Sea ahora $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio genérico de $\mathbb{R}[x]$, y consideremos el polinomio

$$p(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Se verifica $p'(x) = q(x)$, o de forma equivalente $q = D(p)$, luego todo elemento de $\mathbb{R}[x]$ pertenece a $\operatorname{Im} D$. Esto implica que $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x]$.

3. 1) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y usando conocidas propiedades de la transposición:

$$f(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y) - (\lambda X + \mu Y)^T = \lambda X + \mu Y - \lambda X^T + \mu Y^T$$

$$= \lambda \left(X - X^T\right) + \mu \left(Y - Y^T\right) = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Es decir, f es lineal.
2) Se verifica

$$X \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = 0 \Leftrightarrow X - X^T = 0 \Leftrightarrow X = X^T \Leftrightarrow X \text{ es simétrica.}$$

Es decir, $\ker f$ es el subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ de las matrices simétricas. Determinemos $\operatorname{Im} f$. Por una parte,

$$Y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists X \in \mathbb{R}^{n\times n} : Y = f(X) = X - X^T$$

$$\Rightarrow Y^T = (X - X^T)^T = X^T - X = -Y \Rightarrow Y \text{ es antisimétrica.}$$

Por otra,

$$Y \text{ antisimétrica} \Rightarrow Y^T = -Y \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(Y - Y^T)$$

$$= \frac{1}{2}f(Y) = f\left(\frac{1}{2}Y\right) \Rightarrow Y \in \operatorname{Im} f.$$

Es decir, $\operatorname{Im} f$ es el subespacio $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ de las matrices antisimétricas.

4. Consideremos cualquier combinación lineal de los vectores de $f(S)$ igualada a $0:$

$$\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p) = 0.$$

Como f es lineal, $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) = 0$, es decir $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \in \ker f$ y $\ker f = \{0\}$ por ser f inyectiva, luego $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$. Como S es libre, $\lambda_! = \cdots = \lambda_p = 0$ lo cual implica que $f(S)$ es libre.

5. Usemos el teorema de caracterización de subespacios.
$a)$ Como f es lineal, $f(0) = 0$, luego $0 \in \ker f$. Sean $x_1, x_2 \in \ker f$, entonces

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in \ker f.$$

nSea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in \ker f$, entonces

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow x \in \ker f.$$

Concluimos que $\ker f$ es subespacio vectorial de E.
$b)$ Como f es lineal, $0 = f(0)$, luego $0 \in \operatorname{Im} f$. Si $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$, existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Entonces

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \Rightarrow y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} f.$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$. Entonces

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \Rightarrow \lambda y \in \operatorname{Im} f.$$

Concluimos que $\operatorname{Im} f$ es subespacio vectorial de F.

6. Usamos el conocido teorema de caracterización de subespacios.
(i) Tenemos $0 = f(0)$ y $0 \in E_1$, luego $0 \in f(E_1)$. Si $v_1, v_2 \in f(E_1)$, entonces $v_1 = f(u_1)$ y $v_2 = f(u_2)$ para ciertos vectores u_1, u_2 de E_1, por tanto

$$v_1 + v_2 = f(v_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$$

y $u_1 + u_2$ pertenece a E_1 por ser subespacio, luego $v_1 + v_2 \in f(E_1)$. Sea λ escalar y $v \in f(E_1)$, entonces $v = f(u)$ para algún $u \in E$, por tanto

$$\lambda v = \lambda f(u) = f(\lambda u)$$

y λu pertenece a E_1 por ser subespacio, luego $\lambda v \in f(E_1)$.
(ii) Tenemos $f(0) = 0 \in F_1$, luego $0 \in f^{-1}(F_1)$. Si $u_1, u_2 \in f^{-1}(F_1)$, entonces $f(u_1)$ y $f(u_2)$ pertenecen a F_1, por tanto

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

y $f(u_1) + f(u_2)$ pertenece a F_1 por ser subespacio, luego $u_1 + u_2 \in f^{-1}(F_1)$. Sea λ escalar y $u \in f^{-1}(F_1)$, entonces $f(u) \in F_1$, por tanto

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

y $\lambda f(u)$ pertenece a F_1 por ser subespacio, luego $\lambda u \in f^{-1}(F_1)$.
(iii) Si $E_1 = E$, entonces $f(E_1) = f(E) = \operatorname{Im} f$. Si $F_1 = \{0\}$, entonces $f^{-1}(F_1) = f^{-1}(\{0\}) = \ker f$.

7. Sea $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ el endomorfismo dado por $D(p) = p'$. Vimos que $\ker D = \mathbb{R} \neq \{0\}$ y que $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x]$, es decir D es endomorfismo sobreyectivo pero no inyectivo.
Consideremos ahora la aplicación $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida mediante $T\left(p(x)\right) = xp(x)$. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$T\left(\lambda p(x) + \mu q(x)\right) = x\left(\lambda p(x) + \mu q(x)\right)$$

$$= \lambda\left(xp(x)\right) + \mu\left(xq(x)\right) = \lambda T\left(p(x)\right) + \mu T\left(q(x)\right),$$

luego T es lineal. El núcleo de T está formado por los polinomios de $p(x)$ que satisfacen la igualdad $xp(x) = 0$, y el único que la cumple es el polinomio nulo, por tanto T es inyectiva. Por otra parte, no existe polinomio $p(x)$ tal que $xp(x) = 1$, en consecuencia T no es sobreyectiva.

No es posible ninguna de las dos situaciones anteriores para un espacio vectorial E de dimensión finita n. En efecto, si $f : E \to E$ es un endomorfismo entonces, por el teorema de las dimensiones $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$. Por tanto,

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva.}$$

10.4. Teorema de las dimensiones

Demostrar el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales:
Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim E$ finita y sea $f : E \to F$ aplicación lineal. Entonces,

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Solución. Sea $\dim E = n$ y $B_{\ker f} = \{u_1, \dots, u_p\}$ una base de $\ker f$. Por el teorema de la ampliación de la base, existen vectores $u_{p+1}, \dots, u_n$ tales que

$$B_E = \{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$$

es una base de E. Si demostramos que $B = \{f(u_{p+1}), \dots, f(u_n)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$ el teorema estará demostrado pues

$$n = p + (n - p) \Rightarrow \dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

B es sistema libre. En efecto:

$$\lambda_{p+1} f(u_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n) = 0 \Rightarrow f(\lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n \in \ker f \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots \lambda_p \text{ escalares :}$$

$$\lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

$$\Rightarrow (-\lambda_1) u_1 + \dots + (-\lambda_p) u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

Dado que B_E es base de E, se deduce que todos los escalares λ_i $(i = 1, \dots, n)$ son nulos, en particular desde λ_{p+1} hasta λ_n.
B es sistema generador de $\operatorname{Im} f$. En efecto, si $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$. Como B_E es base de E, existen escalares x_1, ... x_p, x_{p+1}, ... x_n tales que $x = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p + x_{p+1} u_{p+1} + \dots + x_n u_n$. Entonces,

$$y = f(x) = f\left[(x_1 u_1 + \dots + x_p u_p) + x_{p+1} u_{p+1} + \dots + x_n u_n\right]$$

$$= f(x_1 u_1 + \dots + x_p u_p) + x_{p+1} f(u_{p+1}) + \dots + x_n f(u_n).$$

Ahora bien, $f(x_1 u_1 + \dots + x_p u_p) = 0$ pues $x_1 u_1 + \dots + x_p u_p \in \ker f$, con lo cual

$$y = x_{p+1} f(u_{p+1}) + \dots + x_n f(u_n).$$

Esto demuestra que B es sistema generador de $\operatorname{Im} f$.

10.5. Matriz de una aplicación lineal

1. Sean E y F espacios vectoriales reales y $B_E = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B_F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bases de E y F respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ definida por:

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 - v_2 + v_3 \\ f(u_2) = 2v_1 + 2v_2 + v_3 + 2v_4 \\ f(u_3) = 4v_2 - v_3 + 2v_4. \end{cases}$$

Hallar la matriz A de f respecto de las bases B_E y B_F.

2. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de finida por:

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ 3y).$$

Determinar la matriz de f con respecto de las base canónica B del espacio inicial y la $B' = \{(2, 0), (0, -1)\}$ del espacio final.

3. Sea $\mathbb{R}_5[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado ≤ 5 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se considera la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_5[x], \quad T(p(x)) = p(x + 1) - p(x).$$

Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica B en el espacio inicial y la misma B en el espacio final.

4. Sea $P_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado ≤ 3, $M_2(\mathbb{R})$ el de las matrices cuadradas reales de orden 2 y α un número real. Definimos la aplicación $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,

$$T_\alpha(p) = \begin{bmatrix} p(\alpha) & p(\alpha + 1) \\ p'(\alpha) & p'(\alpha + 1) \end{bmatrix}.$$

Demostrar que T_α es lineal y hallar su matriz en las respectivas bases canónicas de $P_3(\mathbb{R})$ y $M_2(\mathbb{R})$.

5. Sea el espacio vectorial usual $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo de los reales. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por

$$T(z_1, z_2) = (iz_1 - z_2, z_2).$$

Obtener la matriz asociada a T referida a la base de $\mathbb{C}^2$:

$$B = \{(1, 0), (2i, 0), (0, 1), (0, 2 - 3i)\}.$$

6. Sea φ el endomorfismo del espacio vectorial de los polinomios reales de grado ≤ 2 que asigna a cada polinomio $p(x)$:

$$\varphi[p(x)] = \frac{1}{x}\int_0^1 p(t+x)\,dt.$$

Hallar la matriz A de φ en la base $\{1, x, x^2\}$.

7. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
1) Demostrar que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (1+i)z$ es lineal.
2) Demostrar que $B = \{i, 1+i\}$ es base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.
3) Hallar la matriz de f en la base B.

Solución. 1. Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz A de f en las bases B_E y B_F :

$$A = [f]_{B_E}^{B_F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Hallemos los transformados de los vectores de B :

$$T(1,0,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(0,-1),$$

$$T(0,1,0) = (1,3) = \frac{1}{2}(2,0) + (-3)(0,-1),$$

$$T(0,0,1) = (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(0,-1).$$

Transponiendo, obtenemos la matriz pedida:

$$A = [f]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. La base canónica de $\mathbb{R}_5[x]$ es $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Hallemos los transformados de los vectores de B :

$$\begin{aligned}
&T(1) = 1 - 1 = 0,\\
&T(x) = (x+1) - x = 1,\\
&T(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 1 + 2x,\\
&T(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = \ldots = 1 + 3x + 3x^2,\\
&T(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = \ldots = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3,\\
&T(x^5) = (x+1)^5 - x^5 = \ldots = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4.
\end{aligned}$$

Transponiendo, obtenemos la matriz pedida:

$$A = [T]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $p, q \in P_3(\mathbb{R})$:

$$T_\alpha(\lambda p + \mu q) = \begin{bmatrix} (\lambda p + \mu q)(\alpha) & (\lambda p + \mu q)(\alpha + 1) \\ (\lambda p + \mu q)'(\alpha) & (\lambda p + \mu q)'(\alpha + 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda p(\alpha) + \mu q(\alpha) & \lambda p(\alpha + 1) + \mu q(\alpha + 1) \\ \lambda p'(\alpha) + \mu q'(\alpha) & \lambda p'(\alpha + 1) + \mu q'(\alpha + 1) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} p(\alpha) & p(\alpha + 1) \\ p'(\alpha) & p'(\alpha + 1) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} q(\alpha) & q(\alpha + 1) \\ q'(\alpha) & q'(\alpha + 1) \end{bmatrix} = \lambda T_\alpha(p) + \mu T_\alpha(q)$$

es decir, T_α es lineal.

Consideremos las respectivas bases canónicas en $P_3(\mathbb{R})$ y $M_2(\mathbb{R})$:

$$B = \{1, x, x^2, x^3\},$$

$$B' = \{e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

y hallemos las imágenes de los vectores de B en función de B'.

$$T_\alpha(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e_1 + e_2,$$

$$T_\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha + 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha e_1 + (\alpha + 1)e_2 + e_3 + e_4,$$

$$T_\alpha(x^2) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & (\alpha + 1)^2 \\ 2\alpha & 2(\alpha + 1) \end{bmatrix} = \alpha^2 e_1 + (\alpha + 1)^2 e_2 + 2\alpha e_3 + 2(\alpha + 1)e_4,$$

$$T_\alpha(x^3) = \begin{bmatrix} \alpha^3 & (\alpha + 1)^3 \\ 3\alpha^2 & 3(\alpha + 1)^2 \end{bmatrix} = \alpha^3 e_1 + (\alpha + 1)^3 e_2 + 3\alpha^2 e_3 + 3(\alpha + 1)^2 e_4.$$

Transponiendo coeficientes obtenemos:

$$A = [T_\alpha]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha + 1 & (\alpha + 1)^2 & (\alpha + 1)^3 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & 1 & 2(\alpha + 1) & 3(\alpha + 1)^2 \end{bmatrix}.$$

5. Hallando los transformados de los elementos de la base dada B en función de B :

$$T(1,0) = (i,0) = 0(1,0) + (1/2)(2i,0) + 0(0,1) + 0(0,2-3i),$$

$$T(2i,0) = (-2,0) = -2(1,0) + 0(2i,0) + 0(0,1) + 0(0,2-3i),$$
$$T(0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 0(2i,0) + 1(0,1) + 0(0,2-3i),$$
$$T(0,2-3i) = (-2+3i,2-3i) = -2(1,0)+(3/2)(2i,0)+0(0,1)+1(0,2-3i),$$

Transponiendo coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Hallemos las imágenes de los vectores de la base dada.

$$\varphi(1) = \frac{1}{x}\int_0^x 1\;dt = \frac{1}{x}\,[t]_0^x = \frac{1}{x}\cdot x = 1.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+x)\;dt = \frac{1}{x}\left[t^2/2 + xt\right]_0^x = \frac{1}{x}\left(x^2/2 + x^2\right) = 3x/2.$$

$$\varphi\left(x^2\right) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+x)^2\;dt = \frac{1}{x}\left[\frac{(t+x)^3}{3}\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{(2x)^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{7x^3}{3} = \frac{7}{3}x^2.$$

Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz pedida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}.$$

7. 1) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $z, w \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda z+\mu w) = (1+i)(\lambda z+\mu w) = \lambda\left((1+i)z\right)+\mu\left((1+i)w\right) = \lambda f(z)+\mu f(w).$$

2) De la igualdad $\alpha i+\beta(1+i) = 0$, con α, β reales se deduce $\beta+(\alpha+\beta)i = 0$, luego $\beta = 0$ y $\alpha + \beta = 0$, lo cual implica $\alpha = \beta = 0$ y en consecuencia el sistema B es libre.
Sea $x + iy \in \mathbb{C}$ con x, y reales, entonces $x + iy = (y - x)i + x(1 + i)$, siendo x, $y - x$ reales, por tanto B es sistema generador de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

3) Hallemos las imágenes de los vectores de B en función de B :

$$\begin{cases} f(i) = i(1+i) = -1+i = 2i + (-1)(1+i) \\ f(1+i) = (1+i)(1+i) = 2i = 2i + 0(1+i). \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz pedida:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.6. Expresión matricial de una aplicación lineal

1. Sean E y F espacios vectoriales reales y $B_E = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B_F = \{v_1, v_2\}$ bases de E y F respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ definida por:

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 + 3v_2 \\ f(u_2) = -2v_1 + 4v_2 \\ f(u_3) = v_1 + v_2. \end{cases}$$

Hallar $f(x)$, siendo $x = u_2 + 5u_3$.

2. Sean E y F espacios vectoriales reales y $B_E = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B_F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bases de E y F respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ definida por:

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 - v_2 + v_3 \\ f(u_2) = 2v_1 + 2v_2 + v_3 + 2v_4 \\ f(u_3) = 4v_2 - v_3 + 2v_4. \end{cases}$$

Determinar unas bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (1,2,3) \\ f(1,1,0,0) = (-1,2,1) \\ f(1,1,1,0) = (0,1,-1) \\ f(1,1,1,1) = (1,0,1). \end{cases}$$

Determinar unas bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

4. Deducir la fórmula de la ecuación matricial de una aplicación lineal.

5. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, ambos de dimensión finita, y $f : E \to F$ una aplicación lineal. Sea $A = [f]_{B_E}^{B_F}$ la matriz de f

respecto de las bases B_E y B_F. Demostrar que:
a) Los vectores de F cuyas coordenadas son las columnas de A en la base B_F forman un sistema generador de la imagen de f.
b) La dimensión de la imagen de f es igual al rango de A.

6. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cumpliendo

$$\begin{aligned} &F(1,0,2) = (2,0,1), \\ &F(-1,1,1) = (1,0,1), \\ &F(0,1,3) = (a,0,2). \end{aligned}$$

7. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo que satisface:
i) $\ker(T) = \{(x,y,z,t,u) \in R^5 : x+y-z=0, 2y+t=0, u=0\}$.
ii) Los vectores $v_1 = (4,0,-3,-2,5)^t$ y $v_2 = (0,2,1,-2,3)^t$ se transforman en sí mismos.
iii) $T(v_3) = v_3$ siendo $v_3 = (2,3,1,-6,8)^t$

a) Hallar una base de $\ker T$.
b) Dar una matriz A de dicha aplicación lineal referida en la misma base en el espacio de partida y llegada, indicando la base considerada.

8. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal dada por

$$f\left(p(x)\right) = xp'(x) + 2kp''(x), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la base $\mathcal{B} = \{1, x^3, 1+x, 1-x^2\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:
a) Matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$.
b) Determinar los valores de k para los que $\dim(\ker f) > 1$.

Solución. 1. La ecuación matricial de f en las bases B_E y B_F es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

El vector de coordenadas de $x = u_2 + 5u_3$ en B_E es $X = (0,1,5)^T$, entonces

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

por tanto $f(x) = 3v_1 + 9v_2$.

2. Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz A de f en las bases B_E y B_F, y la correspondiente ecuación matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y = AX \text{ con } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

El núcleo de f está determinado por:

$$\ker f \equiv X : AX = 0 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Usando el conocido método para hallar una base de un subespacio determinado por sus ecuaciones cartesianas obtenemos $B_{\ker f} = \{(2, -1, 1)\}$ (en coordenadas en la base B_E). Una base del núcleo es por tanto $B_{\ker f} = \{2u_1 - u_2 + u_3\}$.
La imagen de f está determinada por:

$$\operatorname{Im} f \equiv Y : \exists X \text{ con } Y = AX \equiv \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_4 = 2x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Usando el conocido método para hallar una base de un subespacio determinado por sus ecuaciones paramétricas obtenemos

$$B_{\operatorname{Im} f} = \{(1, -1, 1, 0), (2, 2, 1, 2)\}$$

(en coordenadas en la base B_F). Una base de la imagen es por tanto $B_{\operatorname{Im} f} = \{v_1 - v_2 + v_3, 2v_1 + 2v_2 + v_3 + 2v_4\}$.

3. Fácilmente demostramos que el sistema de 4 vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{u_1 = (1, 0, 0, 0),\ u_2 = (1, 1, 0, 0),\ u_3 = (1, 1, 1, 0),\ u_4 = (1, 1, 1, 1)\}$$

es sistema libre, por tanto es una base de $\mathbb{R}^4$. Llamemos $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{cases} f(u_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ f(u_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(u_3) = e_2 - e_3 \\ f(u_4) = e_1 + e_3. \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz A de f en las bases B_E y B_F, y la correspondiente ecuación matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = AX \text{ con } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

El núcleo de f está determinado por:

$$\ker f \equiv X : AX = 0 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Usando el conocido método para hallar una base de un subespacio determinado por sus ecuaciones cartesianas obtenemos como base del núcleo, $\{(-1, 1, 0, 2)\}$ (en coordenadas en la base B). Una base del núcleo es por tanto:

$$B_{\ker f} = \{u_1 - u_2 + 2u_4\} = \{-(1, 0, 0, 0) + (1, 1, 0, 0) + 2(1, 1, 1, 1)\}$$

$$= \{(2, 3, 2, 2)\}.$$

La imagen de f está determinada por:

$$\operatorname{Im} f \equiv Y : \exists X \text{ con } Y = AX \equiv \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_4 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \end{cases} \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Usando el conocido método para hallar una base de un subespacio determinado por sus ecuaciones paramétricas obtenemos como base de la imagen de f, $\{(1, 2, 3), (-1, 2, 1)\}$ (en coordenadas en la base B'). Dado que B' es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, una base de la imagen es por tanto

$$B_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 2, 3), (-1, 2, 1)\}.$$

4. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $f : E \to F$ lineal, $B_E = \{u_1, \ldots, u_m\}$ base de E y $B_F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de F. Supongamos que:

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \ldots \\ f(u_m) = a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n. \end{cases}$$

Sea $x = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m \in E$ y sea $f(x) = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in F$. Entonces,

$$f(x) = f(x_1u_1 + \cdots + x_mu_m) = x_1 f(u_1) + \cdots + x_m f(u_m)$$

$$= x_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n) + \cdots + x_m(a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n)$$
$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m)v_1 + \cdots + (a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m)v_n.$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_n = a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m. \end{cases}$$

Las igualdades anteriores se pueden expresar matricialmente en la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

o bien, $Y = AX$ siendo A la matriz de f en las bases B_E y B_F, X el vector de coordenadas de x en B_E e Y el vector de coordenadas de $f(x)$ en B_F.

5. *a*) La ecuación matricial de f en las bases B_E y B_F es, según vimos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \text{ o bien } Y = AX.$$

Un vector y pertenece a $\operatorname{Im} f$ si, y sólo si existe un vector $x \in E$ tal que $y = f(x)$. Entonces, si X son las coordenadas de x en B_E e Y las de y en B_F, el que y pertenezca a $\operatorname{Im} f$ equivale a decir que $Y = AX$ para algún X. Por tanto,

$$\operatorname{Im} f \equiv Y : \exists X \text{ con } Y = AX \equiv \begin{cases} y_1 = a_{11} + \cdots + a_{m1}x_m \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_n = a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m \end{cases}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{K}).$$

Concluimos que las columnas de A generan a $\operatorname{Im} f$ en los términos mencionados.

b) Es consecuencia inmediata del apartado anterior y de que el máximo número de columnas (filas) linealmente independientes entre las columnas (filas) de una matriz es igual a su rango.

6. Se verifica $(0,1,3) = (0,1,3) = (1,0,2) + (-1,1,1)$. Si F es lineal, necesariamente ha de cumplir

$$\begin{aligned}(0,1,3) &= F[(1,0,2) + (-1,1,1)] = F(1,0,2) + F(-1,1,1)\\ &= (2,0,1) + (1,0,1) = (3,0,2) = (a,0,2).\end{aligned}$$

La condición se verifica para si, y sólo si $a = 3$. En tal caso la condición $F(0,1,3) = (3,0,2)$ es superflua, y todas las aplicaciones lineales F que satisfacen las condiciones dadas son las definidas mediante

$$\begin{aligned}&F(1,0,2) = (2,0,1),\\ &F(-1,1,1) = (1,0,1),\\ &F(a,b,c) = (\alpha,\beta,\gamma),\end{aligned}$$

con $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ y $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ cumpliendo

$$\det\left[(1,0,2),(-1,1,1),(a,b,c)\right] \neq 0,$$

pues según sabemos, para determinar una aplicación lineal basta dar los transformados de una base del espacio inicial.

7. *a*) Tenemos el núcleo expresado mediante:

$$\ker T \equiv \begin{cases} x + y - z = 0\\ 2y + t = 0\\ u = 0.\end{cases}$$

Usando el conocido método para el cálculo de una base de un subespacio determinado por unas ecuaciones cartesianas, fácilmente hallamos una base de $\ker T$:

$$B_{\ker T} = \{u_1 = (1,0,1,0,0)^t,\ u_2 = (0,1,1,-2,0)^t\}.$$

b) Una base de $\mathbb{R}^5$ es $B = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ pues

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 4 & 0 & -3 & -2 & 5\\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & -6 & 8\end{bmatrix} = \ldots = 5,$$

y $\dim \mathbb{R}^5 = 5$. Los transformados de los elementos de B son

$$\begin{cases} T(u_1) = 0\\ T(u_2) = 0\\ T(v_1) = v_1\\ T(v_2) = v_2\\ T(v_3) = -v_3.\end{cases}$$

Transponiendo coeficientes obtenemos:

$$A = [T]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. *a*) Hallemos los transformados de los vectores de la base $\mathcal{B}$, en función de $\mathcal{B}$.

$$f(1) = x \cdot 0 + 2k \cdot 0 = 0,$$

$$f(x^3) = x \cdot (3x^2) + 2k \cdot (6x) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3(1+x) + \lambda_4(1-x^2),$$

$$f(1+x) = x \cdot 1 + 2k \cdot 0 = \mu_1 \cdot 1 + \mu_2 x^3 + \mu_3(1+x) + \mu_4(1-x^2),$$

$$f(1-x^2) = x \cdot (-2x) + 2k \cdot (-2) = \gamma_1 \cdot 1 + \gamma_2 x^3 + \gamma_3(1+x) + \gamma_4(1-x^2).$$

Identificando coeficientes y resolviendo:

$$\lambda_1 = -12k,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 12k,\ \lambda_4 = 0,$$

$$\mu_1 = -1,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = 1,\ \mu_4 = 0,$$

$$\gamma_1 = -4k-2,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_4 = 2.$$

Transponiendo coeficiente obtenemos la matriz A pedida:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -12k & -1 & -4k-2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $|A| \neq 0$ pues A tiene una linea formada por ceros. Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

luego $\operatorname{rg} A = 3$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Entonces, $\dim(\ker f) = 4 - \operatorname{rg} A = 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Es decir, no existen valores de k para los cuales $\dim(\ker f) > 1$.

10.7. Núcleo e imagen del operador derivación

Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $f[p(x)] = p'(x)$. Se pide:
a) Demostrar que es lineal.
b) Hallar la matriz de f respecto de la base canónica $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
c) Ecuaciones y una base de $\ker f$.
d) Ecuaciones y una base de $\operatorname{Im} f$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Arquitectura, UPM).

Solución. a) Para cada par de polinomios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, para cada par de números reales λ, μ, y usando conocidas propiedades de la derivada:

$$f[\lambda p(x) + \mu q(x)] = (\lambda p(x) + \mu q(x))' = \lambda p'(x) + \mu q'(x) = \lambda f[p(x)] + \mu f[q(x)].$$

Es decir, f es lineal.

b) Hallemos los transformados por f de los elementos de la base B :

$$\left\{\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(x) &= 1 \\ f(x^2) &= 2x \\ &\ldots \\ f(x^n) &= nx^{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz cuadrada de orden $n + 1$ pedida

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Denotemos por $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t$ a las coordenadas de un vector genérico de $\mathbb{R}_n[x]$ respecto de la base B. Entonces

$$p(x) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Unas ecuaciones cartesianas de $\ker f$ son por tanto:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ \qquad \ldots \\ nx_n = 0. \end{cases}$$

La dimensión de $\ker f$ es $\dim(\ker f) = n + 1 - \text{rg } A = n + 1 - n = 1$. Para hallar una base de $\ker f$ bastará dar a la incógnita libre x_0 el valor 1 con lo cual obtenemos el vector $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$. En consecuencia, una base de $\ker f$ es $B_{\ker f} = \{1\}$.

d) Un vector $Y = (y_0, y_1, x_2, \ldots, y_n)^t$ pertenece a la imagen de f si y sólo si existe un vector $X = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ tal que $Y = AX$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \\ \vdots \\ nx_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{R}),$$

Unas ecuaciones cartesianas de $\text{Im } f$ son por tanto:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_1 = 2x_2 \\ y_2 = 3x_3 \\ \qquad \ldots \\ y_{n-1} = nx_n \\ y_n = 0 \end{cases} \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Por otra parte, todo vector de la imagen se puede expresar en la forma

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Las n columnas anteriores son linealmente independientes y generan $\text{Im } f$, es decir una base de la imagen es $\{1, 2x, 3x^2, \ldots, nx^{n-1}\}$. Multiplicando convenientemente por escalares no nulos obtenemos otra base de la imagen: $B_{\text{Im } f} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$.

10.8. Clasificación de aplicaciones lineales

1. Clasificar las aplicaciones lineales:
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ -x_1 + 2x_2,\ 0)$.
2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

2. Demostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es isomorfismo.

3. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo T en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2\lambda + 4 & 3\lambda + 6 \\ \lambda + 2 & 3\lambda + 6 & 3\lambda + 6 \\ \lambda + 2 & 3\lambda + 6 & 4\lambda + 5 \end{bmatrix}.$$

Determinar los valores de λ para los cuales T es isomorfismo.

4. Demostrar que el endomorfismo D en $\mathbb{R}[x]$ que hace corresponder a cada polinomio su derivada es epimorfismo pero no monomorfismo.

5. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$.

6. Demostrar que si $f : E \to F$ es isomorfismo, también $f^{-1} : F \to E$ es isomorfismo.

7. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $f : E \to F$ isomorfismo y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E. Demostrar que $B' = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es base de F.

8. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensión finita n. Demostrar que E es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

9. Sean E y F son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, ambos de dimensión finita y $\dim E = \dim F$. Demostrar E es isomorfo a F.

Solución. 1. 1) Llamando $(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2, 0)$, obtenemos la ecuación matricial de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

y la dimensión de la imagen es

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$$

es decir, f no es sobreyectiva y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f) = 0$, luego f es inyectiva. Concluimos que f es monomorfismo pero no epimorfismo.

2) Razonando de manera análoga obtenemos la ecuación matricial de g respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

y la dimesión de la imagen es

$$\dim(\operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq \dim \mathbb{R}^2$$

es decir, g no es sobreyectiva y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker g) = 2$, luego g tampoco es inyectiva. Concluimos que g no es monomorfismo ni epimorfismo.

2. La dimensión de la imagen es

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

es decir, f es sobreyectiva y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f) = 0$, luego f también es inyectiva. Concluimos que f es isomorfismo (además, automorfismo).

3. Hallemos el rango de A :

$$\begin{bmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+4 & 3\lambda+6 \\ \lambda+2 & 3\lambda+6 & 3\lambda+6 \\ \lambda+2 & 3\lambda+6 & 4\lambda+5 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+4 & 3\lambda+6 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 - F_2 \sim \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+4 & 3\lambda+6 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Para que T sea isomorfismo es necesario que sea sobreyectiva, es decir que $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} A = 3$, y claramente esto ocurre para $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$. En estos casos, y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, se verifica que $\dim(\ker f) = 0$, luego T también es inyectiva. Podemos concluir que:

$$T \text{ es isomorfismo} \Leftrightarrow \lambda \neq -2 \wedge \lambda \neq 1.$$

4. El núcleo de D está formado por los polinomios constantes, es decir $\ker D \neq \{0\}$ luego D no es inyectiva. Por ora parte, dado un polinomio

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

el polinomio

$$p(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

satisface $D[p(x)] = q'(x) = p(x)$, luego D es sobreyectiva.

5. $\Rightarrow$) Si fuera $\ker f \neq \{0\}$ existiría un vector no nulo $x \in \ker f$, luego $f(x) = 0$ y $f(0) = 0$, con lo cual f no sería inyectiva (contradicción).
$\Leftarrow$) Tenemos:

$$f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0 \Rightarrow f(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in \ker f = \{0\}$$

$$\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v \Rightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

6. La aplicación f es biyectiva, por tanto f^{-1} también lo es. Veamos que es lineal. Sean λ, μ escalares y $v_1, v_2 \in F$. Entonces, $v_1 = f(u_1)$ y $v_2 = f(u_2)$ para $u_1, u_2 \in E$ únicos. Entonces, usando que f es lineal y la definición de aplicación inversa:

$$f^{-1}(\lambda v_1 + \mu v_2) = f^{-1}\left(\lambda f(u_1) + \mu f(u_2)\right) = f^{-1}\left(f(\lambda u_1 + \mu u_2)\right)$$

$$= \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda f^{-1}(v_1) + \mu f^{-1}(v_2).$$

7. Veamos que B' es sistema libre. Consideremos cualquier combinación lineal de los vectores de B' igualada a $0:$

$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = 0.$$

Como f es lineal, $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0$, es decir $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in \ker f$ y $\ker f = \{0\}$ por ser f inyectiva, luego $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$. Como B es libre, $\lambda_! = \cdots = \lambda_n = 0$ lo cual implica que B' es libre.

Veamos que B' es sistema generador de F. Si $y \in F$, por ser f sobreyectiva existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$. Por ser B base de E, x es combinación lineal de los vectores de $B:$

$$x = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \quad (x_i \in \mathbb{K}).$$

Aplicando f a ambos miembros:

$$y = f(x) = x_1 f(u_1) + \cdots + x_n f(u_n),$$

luego B' es sistema generador de F.

8. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E. Consideremos la aplicación:

$$f : \mathbb{K}^n \to E, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Veamos que f es isomorfismo. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}:$

$$f\left[\lambda(x_1, \ldots, x_n) + \mu(y_1, \ldots, y_n)\right] = f(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n = \lambda(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)$$
$$+\mu(y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n) + \mu f(y_1, \ldots, y_n)$$

es decir, f es lineal.
Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \ker f$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = 0$. Como las coordenadas de un vector respecto de una determinada base son únicas, $x_1 = \ldots x_n = 0$, es decir el núcleo de f se reduce al vector nulo y por tanto f es inyectiva.
Por el teorema de las dimensiones, $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim E$, por tanto $\operatorname{Im} f = E$, lo cual implica que f es sobreyectiva.

9. Sean $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B_F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de E y F respectivamente. Sea $x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n \in E$ $(x_i \in \mathbb{K})$. Definimos la aplicación

$$f : E \to F, \quad f(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in E:$

$$f(\lambda x + \mu y) = f\left(\lambda(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) + \mu(y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n)\right)$$

$$= f\left((\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n\right)$$
$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)v_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)v_n$$
$$= \lambda(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_v) + \mu(y_1 v_1 + \cdots + y_n v_v) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

por tanto f es lineal. Si $x \in \ker f$, entonces $f(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$. Por ser B_F sistema libre, $x_1 = \ldots = x_n = 0$, luego $x = 0$. El núcleo se reduce al vector nulo, por tanto f es inyectiva. Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim F = n$, en consecuencia f es sobreyectiva.

10.9. Espacio vectorial de las aplicaciones lineales

1. Sean las aplicaciones lineales $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuyas matrices respecto de unas bases dadas son respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz de $2f - 3g$ respecto de las bases dadas.

2. Demostrar que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +)$ es grupo abeliano, estando definida la operación $+$ en la forma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E.$$

3. Demostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{K}, \; f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, la operación αf definida mediante

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in E$$

cumple las cuatro propiedades de la ley externa de los espacios vectoriales.

4. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones respectivas m y n (finitas) y sean B_E y B_F bases de E y F respectivamente. Demostrar que:

$$\phi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathbb{K}^{n \times m}, \quad \phi(f) = [f]_{B_E}^{B_F}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

5. Demostrar que si E y F son espacios vectoriales, ambos de dimensión finita, se verifica $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = (\dim E)\,(\dim F)\,.$

Solución. 1. Debido al conocido isomorfismo entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y $\mathbb{K}^{n \times m}$, la matriz pedida es

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 4 & 18 & 1 \\ -4 & -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

2. *Interna.* Para todo $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x, y \in E$, y usando la linealidad de f y g :

$$(f + g)(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x + \mu y) + g(\lambda x + \mu y)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \mu g(y) = \lambda\,(f(x) + g(x)) + \mu\,(f(y) + g(y))$$

$$= \lambda(f + g)(x) + \mu(f + g)(y) \Rightarrow f + g \text{ es lineal} \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F).$$

Asociativa. Para todo $f, g, h \in$, y para todo $x \in E$:

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

$$= f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $(f+g)+h = f+(h+g)$.
Elemento neutro. La aplicación nula $0 : E \to F$ definida por $0(x) = 0$ para todo $x \in E$ es lineal pues para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in E$,

$$0(\lambda x + \mu y) = 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = \lambda 0(x) + \mu 0(y).$$

Es decir, $0 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y además para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(0+f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x),$$

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Por definición de igualdad de funciones, $f + 0 = 0 + f = 0$.
Elemento simétrico. Dada $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, se define $-f : E \to F$ como $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in E$. Esta aplicación es lineal pues para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in E$,

$$(-f)(\lambda x + \mu y) = -(\lambda x + \mu y) = -\lambda x - \mu y$$

$$= \lambda(-x) + \mu(-y) = \lambda(-f)(x) + \mu(-f)(y).$$

Es decir, $-f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y además para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x),$$

$$((-f) + f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 = 0(x).$$

Por definición de igualdad de funciones, $f + (-f) = (-f) + f = 0$.
Conmutativa. Para todo $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$

Por definición de igualdad de funciones, $f + g = g + f$.
Concluimos que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +)$ es grupo abeliano.

3. Primeramente veamos que la operación está bien definida, es decir que $\alpha f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. En efecto, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x, y \in E$, y usando la linealidad de f :

$$(\alpha f)(\lambda x + \mu y) = \alpha f(\lambda x + \mu y) = \alpha (\lambda f(x) + \mu f(y))$$

$$= \lambda\alpha f(x) + \mu\alpha f(y) = \lambda(\alpha f)(x) + \mu(\alpha f)(y) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F).$$

1) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, para todo $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(\alpha(f+g))(x) = \alpha((f+g)(x)) = \alpha(f(x) + g(x))$$

$$= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.
2) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$$

$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta g)(x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta g$.
3) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha((\beta f)(x)) = \alpha(\beta f(x))$$

$$= (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.
4) Para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $x \in E$:

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $1f = f$.

4. Sean $B_E = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $B_F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de E y F respectivamente, y sea

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \ldots \\ f(u_m) = a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} g(u_1) = b_{11}v_1 + \cdots + b_{1n}v_n \\ \ldots \\ g(u_m) = b_{m1}v_1 + \cdots + b_{mn}v_n. \end{cases}$$

Entonces,

$$[f]_{B_E}^{B_F} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad [g]_{B_E}^{B_F} = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(u_1) &= \lambda f(u_1) + \mu g(u_1) \\ &= (\lambda a_{11} + \mu b_{11})v_1 + \cdots + (\lambda a_{1n} + \mu b_{1n})v_n \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)(u_m)&=\lambda f(u_m)+\mu g(u_m)\\&=(\lambda a_{m1}+\mu b_{m1})v_1+\cdots+(\lambda a_{mn}+\mu b_{mn})v_n\end{aligned}$$

por tanto, la matriz de $\lambda f+\mu g$ en las bases B_E y B_F es:

$$[\lambda f+\mu g]_{B_E}^{B_F}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11}+\mu b_{11}&\ldots&\lambda a_{m1}+\mu b_{m1}\\\vdots&&\vdots\\\lambda a_{1n}+\mu b_{1n}&\ldots&\lambda a_{mn}+\mu b_{mn}\end{bmatrix}=\lambda[f]_{B_E}^{B_F}+\mu[g]_{B_E}^{B_F}.$$

En consecuencia,

$$\phi(\lambda f+\mu g)=[\lambda f+\mu g]_{B_E}^{B_F}=\lambda[f]_{B_E}^{B_F}+\mu[g]_{B_E}^{B_F}=\lambda\phi(f)+\mu\phi(g),$$

luego ϕ es lineal. Veamos que es isomorfismo. Por una parte si $f\in\ker\phi$, entonces $[f]_{B_E}^{B_F}$ es la matriz nula, lo cual claramente implica que $f=0$, luego ϕ es inyectiva. Por otra parte, si

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&\ldots&c_{m1}\\\vdots&&\vdots\\c_{1n}&\ldots&c_{mn}\end{bmatrix}$$

es una matriz de $\mathbb{K}^{n\times m}$, podemos elegir la aplicación lineal $f:E\to F$ determinada por

$$\begin{cases}f(u_1)=c_{11}v_1+\cdots+c_{1n}v_n\\\qquad\ldots\\f(u_m)=c_{m1}v_1+\cdots+c_{mn}v_n,\end{cases}$$

y se verifica $C=[f]_{B_E}^{B_F}=\phi(f)$, luego ϕ es sobreyectiva. Podemos pues concluir que ϕ es isomorfismo.

5. Si $\dim E=m$ y $\dim F=n$ finitas, entonces $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{n\times m}$, por tanto

$$\dim\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)=\dim\mathbb{K}^{n\times m}=mn=(\dim E)\,(\dim F)\,.$$

10.10. Composición de aplicaciones lineales

1. Se considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+2a_1,4a_0-a_2),$$

y la aplicación lineal $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz de $g \circ f$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

2. Demostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es isomorfismo y determinar el isomorfismo inverso.

3. Sean f y g dos endomorfismos en un espacio vectorial E. Demostrar que: 1) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. 2) $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.

4. Sean E, F, G tres espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $f : E \to F$, $g : F \to G$ dos aplicaciones lineales. Demostrar que la composición $g \circ f : E \to G$ es aplicación lineal.

5. Sean E, F, G tres espacios sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones finitas y sean B_E, B_F y B_G bases de E, F y G respectivamente. Demostrar que

$$[g \circ f]_{B_E}^{B_G} = [g]_{B_F}^{B_G} \cdot [f]_{B_E}^{B_F}.$$

6. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones finitas, B_E y B_F bases de E y F respectivamente, y $f : E \to F$ isomorfismo. Demostrar que

$$\left[f^{-1}\right]_{B_F}^{B_E} = \left([f]_{B_E}^{B_F}\right)^{-1}.$$

7. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$ y $f : E \to E$ un endomorfismo que cumple $\dim(\operatorname{Im} f) \geq \dim(\ker f)$ y $f^2 = 0$. Demostrar que n es par.

8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, se considera el subespacio W formado por los polinomios de la forma $ax^3 + bx^2 + bx - a$ (a y b números reales arbitrarios). Construir una aplicación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $\operatorname{Im} T = W$ y $T \circ T = 0$. Representar T mediante su matriz respecto de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Solución. 1. Hallemos las imágenes por f de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\begin{cases} f(1) = (1, 4) = 1(1, 0) + 4(0, 1) \\ f(x) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1) \\ f(x^2) = (0, -1) = 0(1, 0) + (-1)(0, 1) \end{cases}$$

La matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^2$ es por tanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y en consecuencia, la matriz pedida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. La aplicación dada no está referida a bases, lo cual equivale a considerar la base canónica en el espacio inicial y en el final. La dimensión de la imagen es

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

es decir, f es sobreyectiva y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f) = 0$, luego f también es inyectiva. Como la matriz del isomorfismo inverso es la inversa de la matriz:

$$f^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

3. 1) Si $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, entonces existe $u \in E$ tal que $y = (g \circ f)(u)$, luego $y = g[f(u)]$ lo cual implica que $y \in \operatorname{Im} g$.
2) Si $x \in \ker f$, entonces $f(x) = 0$ y por tanto $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(0) = 0$, es decir $x \in \ker(g \circ f)$.

4. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x, y \in E$, y usando la linealidad de g y f :

$$(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = g\left[f(\lambda x + \mu y)\right] = g\left[\lambda f(x) + \mu f(y)\right]$$

$$= \lambda g\left[f(x)\right] + \mu g\left[f(y)\right] = \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y)$$

es decir, $g \circ f$ es lineal.

5. Llamemos $M = [f]_{B_E}^{B_F}$, $N = [g]_{B_F}^{B_G}$. La ecuación matricial de f en las bases B_E y B_F es

$$Y = MX, \quad (X \text{ coord. de } x \text{ en } B_E,\ Y \text{ coord. de } y = f(x) \text{ en } B_F).$$

La ecuación matricial de g en las bases B_F y B_G es

$$Z = NY, \quad (Y \text{ coord. de } y \text{ en } B_F,\ Z \text{ coord. de } z = g(y) \text{ en } B_G).$$

Las anteriores relaciones implican

$$Z = N(MX) = (NM)X,$$

(X coord. de x en B_E, Z coord. de $z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$ en B_G).

Por tanto, la matriz de $g \circ f$ en las bases B_E y B_G es

$$[g \circ f]_{B_E}^{B_G} = NM = [g]_{B_F}^{B_G} \cdot [f]_{B_E}^{B_F}.$$

6. Dado que $f^{-1} \circ f = I_E$ (aplicación lineal identidad en E):

$$[I_E]_{B_E}^{B_E} = [f^{-1} \circ f]_{B_E}^{B_E} = [f^{-1}]_{B_F}^{B_E} \, [f]_{B_E}^{B_F}.$$

Ahora bien, la matriz de la aplicación lineal I_E respecto de cualquier base B_E es claramente la matriz identidad I, por tanto:

$$I = [f^{-1}]_{B_F}^{B_E} \, [f]_{B_E}^{B_F} \Rightarrow \left[f^{-1}\right]_{B_F}^{B_E} = \left([f]_{B_E}^{B_F}\right)^{-1}.$$

7. Primero veamos que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. En efecto, si $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$. Aplicando f a ambos lados queda $f(y) = f^2(x) = 0(x) = 0$, luego $y \in \ker f$.
Por tanto, $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(\ker f)$ que junto a la hipótesis $\dim(\operatorname{Im} f) \geq \dim(\ker f)$ implica $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\ker f)$. Aplicando ahora el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales:

$$n = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 2\dim(\ker f) \Rightarrow n \text{ es par.}$$

8. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz cumple $A^2 = 0$. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y definamos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ que satisface

$$T(u_1) = 0, \; T(u_2) = u_1, \; T(u_3) = 0, \; T(u_4) = u_3.$$

La matriz de T en B es A, por tanto, queda garantizado que $T \circ T = 0$. Los vectores de W son de la forma $a(-1 + x^3) + b(x + x^2)$ y los vectores $-1 + x^3$, $x + x^2$ son linealmente independientes, por tanto una base de W es $\{-1 + x^3, x + x^2\}$. Queremos además que $\operatorname{Im} T = W$, por tanto elegimos la base de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \quad u_1 = -1 + x^3, \; u_2 = 1, \; u_3 = x + x^2, \; u_4 = x,$$

lo cual asegura que $\{u_1, u_3\} \subset \operatorname{Im} T$ y por tanto, $W \subset \operatorname{Im} T$. Como $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} A = 2 = \dim W$, se verifica $W = \operatorname{Im} T$.

En consecuencia, una aplicación que satisface las hipótesis del enunciado es la que cumple:

$$\begin{cases}T(-1+x^3)=0\\ T(1)=-1+x^3\\ T(x+x^2)=0\\ T(x)=x+x^2\end{cases}\quad \text{o bien}\quad \begin{cases}-T(1)+T(x^3)=0\\ T(1)=-1+x^3\\ T(x)+T(x^2)=0\\ T(x)=x+x^2.\end{cases}$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{cases}T(1)=-1+x^3\\ T(x)=x+x^2\\ T(x^2)=-x-x^2\\ T(x^3)=-1+x^3,\end{cases}$$

y transponiendo coeficientes obtenemos la matriz de T en la base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$M=\begin{bmatrix}-1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

10.11. Descomposición canónica, teorema de isomorfía

1. Sea $f:E\to F$ una aplicación lineal. Demostrar que
(a) $n:E\to E/\ker f,\ n(x)=x+\ker f$ es epimorfismo.
(b) $g:E/\ker f\to \operatorname{Im} f,\ g(x+\ker f)=f(x)$ es isomorfismo.
(c) $i:\operatorname{Im} f\to F,\ i(x)=x$ es monomorfismo.
(d) El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}E & \xrightarrow{f} & F\\ n\downarrow & & \uparrow i\\ E/\ker f & \xrightarrow{g} & \operatorname{Im} f\end{array}$$

es decir, $f=i\circ g\circ n$.

2. Se considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica B de $\mathbb{R}^4$ y la canónica B' de $\mathbb{R}^3$ es

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1&0\\1&-1&2&-1\\-1&-1&4&-3\end{bmatrix}.$$

(a) Hallar unas bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de $E/\ker f$ e $\text{Im} f$ respectivamente.
(b) Hallar la matriz N de n respecto de las bases B y $\mathcal{C}$.
(c) Hallar la matriz $\bar{A}$ de $\bar{f}$ respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.
(d) Hallar la matriz I_1 de i respecto de las bases $\mathcal{D}$ y B'.
(e) Comprobar que $A = I_1\bar{A}N$. ¿Por qué ha de cumplirse necesariamente esta igualdad?

Solución. 1. (a) Para todo λ, μ escalares y para todo x, y elementos de E :

$$n(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y) + \ker f = (\lambda x + \ker f) + (\mu y + \ker f)$$

$$= \lambda(x + \ker f) + \mu(y + \ker f) = \lambda n(x) + \mu n(y),$$

es decir n es lineal. Por otra parte, todo vector $x + \ker f \in E/\ker f$ es $x + \ker f = n(x)$, luego n es sobreyectiva. Concluimos que n es epimorfismo.

(b) Veamos que la aplicación g está bien definida, es decir que $g(x + \ker f)$ no depende del representante x sino de la clase en sí. En efecto, supongamos que $x + \ker f = y + \ker f$, entonces $x - y \in \ker f$ que equivale a $f(x - y) = 0$, luego $f(x) - f(y) = 0$ y por tanto $f(x) = f(y)$.
Veamos que g es lineal. Para todo λ, μ escalares y para todo $x + \ker f$, $y + \ker f$ elementos de $E/\ker f$:

$$g[\lambda(x + \ker f) + \mu(y + \ker f)] = g[(\lambda x + \mu y) + \ker f] = f(\lambda x + \mu y)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda g(x + \ker f) + \mu g(y + \ker f).$$

Veamos que g es monomorfismo. El núcleo de g es:

$$\ker g = \{x + \ker f \in E/\ker f : g(x + \ker f) = f(x) = 0\} = \{\ker f\} = \{0 + \ker f\},$$

es decir el núcleo de g se reduce al vector nulo de $E/\ker f$ lo cual implica que g es inyectiva.
Veamos que g es epimorfismo. En efecto, si $x' \in \text{Im} f$, entonces $x' = f(x)$ para algún $x \in E$, luego $x' = g(x + \ker f)$. Esto implica que g es sobreyectiva. Concluimos que g es isomorfismo.

(c) Para todo x, y elementos de $\text{Im} f$, $i(x + y) = x + y = i(x) + i(y)$ es decir, i es lineal. Ademas, $i(x) = i(y)$ implica $x = y$, luego i es inyectiva.

(d) Para todo $x \in E$, $(i \circ g \circ n)(x) = (i \circ g)(x + \ker f) = i(f(x)) = f(x)$, por tanto, $i \circ g \circ n = f$.

2. (a) El núcleo de f es

$$\ker f \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Escalonando el sistema obtenemos la base $\{(1,3,1,0),(1,2,0,-1\}$. Completando esta con los vectores $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ obtenemos una base de $\mathbb{R}^4$ con lo cual una base de $E/\ker f$ es $\mathcal{C} = \{(0,0,1,0)+\ker f, (0,0,0,1)+\ker f\}$. Por otra parte el rango de A es 2 y las dos primeras columnas son linealmente independientes de lo cual obtenemos inmediatamente una base de la imagen de f: $\mathcal{D} = \{(2,1,-1),(1,1,1)\}$.

(b) Para calcular N hallemos los transformados de la base B en función de la base $\mathcal{C}$. Expresemos

$$n(1,0,0,0) = (1,0,0,0)+\ker f = \alpha[(0,0,1,0)+\ker f]+\beta[(0,0,0,1)+\ker f].$$

De la definición de las operaciones y de igualdad de vectores en el espacio vectorial cociente, para que se verifique la igualdad anterior el vector $(1,0,-\alpha,-\beta)$ ha de pertenecer a $\ker f$ o equivalentemente

$$\text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = 2, \beta = 3$$

es decir, $n(1,0,0,0) = 2[(0,0,1,0)+\ker f]+3[(0,0,0,1)+\ker f]$. Repitiendo el proceso obtenemos:

$$\begin{cases} n(1,0,0,0) = 2[(0,0,1,0)+\ker f] + 3[(0,0,0,1)+\ker f] \\ n(0,1,0,0) = -[(0,0,1,0)+\ker f] - [(0,0,0,1)+\ker f] \\ n(0,0,1,0) = [(0,0,1,0)+\ker f] + 0[(0,0,0,1)+\ker f] \\ n(0,0,0,1) = 0[(0,0,1,0)+\ker f] + [(0,0,0,1)+\ker f]. \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes: $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Hallemos los transformados de los elementos de $\mathcal{C}$ en función de los de $\mathcal{D}$

$$\bar{f}[(0,0,1,0)^t + \ker f] = f[(0,0,1,0)^t] = A(0,0,1,0)^t = \\ (1,2,4)^t = \gamma(2,1,-1)^t + \delta(1,1,1)^t.$$

Resolviendo obtenemos $\delta = 3, \gamma = -1$. Procedemos de manera análoga para el otro vector de $\mathcal{C}$ y obtenemos

$$\begin{cases} \bar{f}[(0,0,1,0)^t + \ker f] = -(2,1,-1)^t + 3(1,1,1)^t, \\ \bar{f}[(0,0,0,1)^t + \ker f] = 1(2,1,-1)^t - 2(1,1,1)^t. \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes: $\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) Hallemos los transformados de los elementos de $\mathcal{D}$ en función de los de B'

$$\begin{cases} i(2,1,-1) = (2,1,-1) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) - (0,0,1), \\ i(1,1,1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1). \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes: $I_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) Comprobemos que $I_1 \bar{A} N = A$. En efecto:

$$I_1 \bar{A} N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} = A.$$

Era de esperar esta igualdad como consecuencia de la conocida fórmula que relaciona la matriz de la composición de aplicaciones lineales con el producto de las respectivas matrices: $[h \circ g]_{B_1}^{B_3} = [h]_{B_2}^{B_3} \cdot [g]_{B_1}^{B_2}$.

10.12. Cambio de base, matrices equivalentes

1. Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales son equivalentes las matrices reales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de unas bases $B_{\mathbb{R}^2} = \{u_1, u_2\}$ y $B_{\mathbb{R}^3} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz de f respecto de las nuevas bases $B'_{\mathbb{R}^2} = \{u_1 + u_2, u_1 - u_2\}$ y $B'_{\mathbb{R}^3} = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por

$$T(2,-1) = (1,1), \ T(3,1) = (2,4).$$

Hallar la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Localizar bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, verificando el resultado.

5. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por

$$f(p) = -p(0) + p'.$$

Hallar un par de bases en las que la matriz de f sea $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Sea A la matriz de una aplicación lineal $f : E \to F$, en las bases $B_E = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $B_F = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sean las nuevas bases $B'_E = \{u'_1, \ldots, u'_m\}$ y $B'_F = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$.
Demostrar que la matriz de f en las bases B'_E y B'_F es $Q^{-1}AP$, siendo P la matriz de cambio de B_E a B'_E y Q la de cambio de B_F a B'_F.

7. Demostrar que la relación en $\mathbb{K}^{n\times m} : A \sim B \Leftrightarrow A$ es equivalente a B, es una relación de equivalencia.

8. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal con $\dim E = m$, $\dim F = n$ finitas y sea $\dim \operatorname{Im} f = r$. Demostrar que existen bases B_E y B_F de E y F respectivamente tales que:

$$[f]_{B_E}^{B_F} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

siendo I_r la matriz identidad de orden r.

Solución. 1. Las matrices A y B tienen el mismo orden, por tanto son equivalentes si, y sólo si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Dado que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de A es 2. Restando a la segunda fila de la matriz B, la primera:

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = 2 \Leftrightarrow a - 5 \neq 0.$$

Es decir, A y B son equivalente si, y solo si $a \neq 5$.

2. La matrices de cambio de $B_{\mathbb{R}^2}$ a $B'_{\mathbb{R}^2}$ y de $B_{\mathbb{R}^3}$ a $B'_{\mathbb{R}^3}$ son respectivamente

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz pedida es por tanto:

$$Q^{-1}AP = \ldots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Tenemos que hallar la matriz de T con respecto a la base canónica en el espacio inicial y la misma en el espacio final.

Primer método. Usemos el conocido teorema del cambio de base para aplicaciones lineales. Llamemos $E = F = \mathbb{R}^2$ y consideremos las bases:

$$B_E = \{u_1 = (2,-1),\ u_2 = (3,1)\},\ B_F = \{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}.$$

Se verifica

$$\begin{cases} T(u_1) = v_1 + v_2 \\ T(u_2) = 2v_1 + 4v_2, \end{cases}$$

La matriz de T en las bases B_E y B_F es por tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elijamos como nuevas bases $B'_E = B'_F = \{v_1, v_2\}$, es decir la canónica tanto en el espacio inicial como en el final. Tenemos:

$$\begin{cases} u_1 = 2v_1 - v_2 \\ u_2 = 3v_1 + v_2, \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = v_1 \\ v_2 = v_2. \end{cases}$$

Despejando v_1 y v_2 en la dos primeras igualdades:

$$\begin{cases} v_1 = (1/5)v_1 + (1/5)v_2 \\ v_2 = (-3/5)u_1 + (2/5)u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = v_1 \\ v_2 = v_2. \end{cases}$$

En consecuencia, las matrices de cambio P (de B_E a B'_E) y Q (de B_F a B'_F) son

$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y la matriz pedida es

$$Q^{-1}AP = I^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Segundo método. Llamemos ahora $B = \{e_1, e_2\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Las igualdades $T(2,-1) = (1,1)$ y $T(3,1) = (2,4)$ implican:

$$\begin{cases} T(2e_1 - e_2) = e_1 + e_2 \\ T(3e_1 + e_2) = 2e_1 + 4e_2. \end{cases}$$

Usando que T es lineal:

$$\begin{cases} 2T(e_1) - T(e_2) = e_1 + e_2 \\ 3T(e_1) + T(e_2) = 2e_1 + 4e_2. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{cases} T(e_1) = (3/5)e_1 + e_2 \\ T(e_2) = (1/5)e_1 + e_2. \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz de T en la base canónica del espacio inicial y la misma en el final:

$$[T]_B^B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Fácilmente comprobamos que el rango de la matriz es 2, por tanto buscamos bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente tales que la matriz de f en estas bases sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir las bases buscadas han de verificar

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \\ f(u_3) = 0. \end{cases}$$

El vector u_3 ha de pertenecer al núcleo de f. Hallamos una base del mismo, y obtenemos $u_3 = (1,2,-1)^t$. Los vectores v_1, v_2 han de pertenecer a la imagen de f . Hallando una base de esta, obtenemos $v_1 = (-1,2,0,1)^t,\ (2,-4,-1,1)^t$ e inmediatamente $u_1 = (1,0,0)^t,\ u_2 = (0,1,0)^t$.
Basta que añadamos a $v_1,\ v_2$ otros dos cualesquiera $v_3,\ v_4$ para completar un base de $\mathbb{R}^4$. Elegimos por ejemplo $v_3 = (0,1,0,0),\ v_4 = (1,0,0,0)$. Por tanto, unas bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ para que la matriz asociada a f es de la forma $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son

$$B = \left\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (1,2,-1)^t\right\},$$

$$B' = \left\{(-1,2,0,1)^t, (2,-4,-1,1)^t, (0,1,0,0)^t, (1,0,0,0)^t\right\}.$$

Verifiquemos el resultado. La matriz de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a la B es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y la de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^4$ a la B' es

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Según un conocido teorema, se ha de verificar

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o de forma equivalente:

$$AP = Q\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por una parte tenemos:

$$AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y por otra

$$Q\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual verifica el resultado.

5. Hallemos la matriz A de f respecto de la base canónica $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ del espacio inicial y la canónica $B' = \{1, x, x^2\}$ del espacio final. Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{r} f(1) = -1 + 0 = -1 \\ f(x) = -0 + 1 = 1 \\ f(x^2) = -0 + 2x = 2x \\ f(x^3) = -0 + 3x^2 = 3x^2, \end{array}\right.$$

y transponiendo coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz A es 3, por tanto buscamos bases $C = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $C' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente tales que la matriz de f en estas bases sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir las bases buscadas han de verificar

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \\ f(u_3) = v_3 \\ f(u_4) = 0. \end{cases}$$

El vector u_4 ha de pertenecer al núcleo de f. Hallamos una base del mismo, y obtenemos $u_4 = (1, 1, 0, 0)^t$ (en coordenadas en B). Los vectores v_1, v_2, v_3 han de pertenecer a la imagen de f . Hallando una base de esta, obtenemos $v_1 = (1, 0, 0)^t$, $v_2 = (0, 2, 0)^t$, $v_3 = (0, 0, 3)^t$ (en coordenadas en B') e inmediatamente $u_1 = (0, 1, 0, 0)^t$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)^t$, $u_3 = (0, 0, 0, 1)^t$ (en coordenadas en B).

Por tanto, unas bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ para que la matriz asociada a f es de la forma

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son

$$C = \left\{(0, 1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t, (1, 1, 0, 0)^t\right\},$$
$$C' = \left\{(1, 0, 0)^t, (0, 2, 0)^t, (0, 0, 3)^t\right\}.$$

en coordenadas en B y B' respectivamente. Es decir, son

$$C = \left\{x, x^2, x^3, 1 + x\right\}, \quad C' = \left\{1, 2x, 3x^2\right\}.$$

Verifiquemos el resultado,

$$\begin{cases} f(x) = -0 + 1 = 1 = 1 + 0 \cdot (2x) + 0 \cdot (3x^2) \\ f(x^2) = -0 + 2x = 2x = 0 + 1 \cdot (2x) + 0 \cdot (3x^2) \\ f(x^3) = -0 + 3x^2 = 3x^2 = 0 + 0 \cdot (2x) + 1 \cdot (3x^2) \\ f(1 + x) = -1 + 1 = 0 = 0 + 0 \cdot (2x) + 0 \cdot (3x^2), \end{cases}$$

y transponiendo obtenemos la matriz de f en las bases C y C' :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

como era de esperar.

6. La ecuación matricial de f en las bases B_E y B_F es

$$Y = AX, \quad (X \text{ coord. de } x \text{ en } B_E,\ Y \text{ coord. de } y = f(x) \text{ en } B_F). \quad (1)$$

La ecuación matricial del cambio de la base B_E a la B'_E es

$$X = PX', \quad (X \text{ coord. de } x \text{ en } B_E,\ X' \text{ coord. de } x \text{ en } B'_E). \quad (2)$$

La ecuación matricial del cambio de la base B_F a la B'_F es

$$Y = QY', \quad (Y \text{ coord. de } y \text{ en } B_F,\ Y' \text{ coord. de } y \text{ en } B'_F). \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda $QY' = AX'$, es decir:

$$Y' = \left(Q^{-1}AP\right) X', \quad (X' \text{ coord. de } x \text{ en } B'_E,\ Y' \text{ coord. de } y = f(x) \text{ en } B'_F).$$

En consecuencia, la matriz de f en las bases B'_E y B'_F es $Q^{-1}AP$.

7. Reflexiva. Para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ se verifica $A = I_n^{-1}AI_m$ siendo I_n, I_m invertibles, luego $A \sim A$.
Simétrica. Para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$:

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{m\times m}, \exists Q \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertibles } : B = Q^{-1}AP$$

$$\Rightarrow A = QBP^{-1} = (Q^{-1})^{-1}B(P^{-1}),$$

siendo Q^{-1} y P^{-1} invertibles, por tanto $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
Transitiva. Para todo $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times m}$:

$$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists P_1 \in \mathbb{K}^{m\times m}, \exists Q_1 \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertibles } : B = Q_1^{-1}AP_1 \\ \exists P_2 \in \mathbb{K}^{m\times m}, \exists Q_2 \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertibles } : C = Q_2^{-1}BP_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = Q_2^{-1}Q_1^{-1}AP_1P_2 = (Q_1Q_2)^{-1}A(P_1P_2),$$

siendo Q_1Q_2 y P_1P_2 invertibles, por tanto $A \sim B$ y $B \sim C$, implica $A \sim C$.

8. Sea $\{u_1, \ldots, u_p\}$ base del núcleo de f. Podemos ampliarla hasta obtener una base

$$\{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_m\}$$

de E. Se demostró (teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales) que $\{f(u_{p+1}), \ldots, f(u_m)\}$ es base de la imagen de f. Como $r = m - p$ el sistema $\{f(u_{p+1}), \ldots, f(u_m)\}$ tiene r vectores con lo cual lo podemos expresar en la forma

$$\{v_1 = f(u_{p+1}), \ldots, v_r = f(u_m)\}.$$

Consideremos la base en E :

$$B_E = \{u_{p+1}, \ldots, u_m, u_1, \ldots, u_p\},$$

y la base en F :

$$B_F = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\},$$

obtenida ampliando el sistema libre $\{v_1, \ldots, v_r\}$. Entonces,

$$\begin{cases} f(u_{p+1}) = v_1 \\ \ldots \\ f(u_m) = v_r \\ \ldots \\ f(u_1) = 0 \\ \ldots \\ f(u_p) = 0, \end{cases}$$

y transponiendo coeficientes obtenemos

$$[f]_{B_E}^{B_F} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.13. Cambio de base en endomorfismos, matrices semejantes

1. Sea f el endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica B es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz de f en la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2)$, $u_3 = (2, 3, 1)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el endomorfismo cuya matriz en la base $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$ es $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el endomorfismo dado por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Hallar la matriz de T en la base $B = \{(1, 2), (-1, 3)\}$.

4. Sea A la matriz de un endomorfismo $f : E \to E$, en la base de E, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Sea la nueva base $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$.
Demostrar que la matriz de f en las nueva base B' es $P^{-1}AP$, siendo P la matriz de cambio de B a B'.

5. Demostrar que la relación en $\mathbb{K}^{n\times n} : A \sim B \Leftrightarrow A$ es semejante a B, es una relación de equivalencia.

6. Demostrar que dos matrices semejantes tiene la misma traza y el mismo determinante.

7. Encontrar dos matrices con el mismo determinante y con la misma traza pero que no sean semejantes.

Solución. 1. Llamemos $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, entonces

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3. \\ u_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}$$

La matriz P de cambio de la base B a la B' es por tanto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

en consecuencia la matriz de f en la base B' es

$$[f]_{B'} = P^{-1}AP = \ldots = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -15 & -20 & -17 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Llamemos $B_c = \{e_1, e_2\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y sea $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 1)$. Entonces,

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = 3e_1 + e_2 \end{cases}$$

por tanto, la matriz de cambio de B_c a B es $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y la de B a B_c es $P = H^{-1}$. En consecuencia, la matriz de f en la base canónica es

$$[f]_{B_c} = P^{-1}AP = HAH^{-1} = \cdots = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 17 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. *Primer método.* Llamando $B_c = \{e_1, e_2\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 3)$,

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 \\ T(e_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = -e_1 + 3e_2, \end{cases}$$

por tanto la matrices A de T en la base canónica, y la de cambio de la canónica a la B son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, las matriz de T en B es

$$[T]_B = P^{-1}AP = \ldots = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segundo método. Hallemos los transformados de los vectores de B en función de B :

$$\begin{cases} T(1,2) = (1,0) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(-1,3) \\ T(-1,3) = (-1,0) = \beta_1(1,2) + \beta_2(-1,3). \end{cases}$$

Igualando componentes y resolviendo los sistemas, obtenemos

$$\alpha_1 = 3/5,\ \alpha_2 = -2/5,\ \beta_1 = -3/5,\ \beta_2 = 2/5,$$

por tanto

$$\begin{cases} T(v_1) = \dfrac{3}{5}v_1 - \dfrac{2}{5}v_2 \\ T(v_2) = -\dfrac{3}{5}v_1 + \dfrac{2}{5}v_2, \end{cases}$$

y transponiendo coeficientes:

$$[T]_B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Si en el teorema general del cambio de base para aplicaciones lineales, hacemos $B_E = B_F = B$ y $B'_E = B'_F = B'$ entonces, $P = Q$ y por tanto

$$[f]_{B'} = [f]_{B'_E}^{B'_F} = Q^{-1}AP = P^{-1}AP.$$

5. Reflexiva. Para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se verifica $A = I_n^{-1}AI_n$ siendo I_n, invertible, luego $A \sim A$.
Simétrica. Para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : B = P^{-1}AP$$

$$\Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1}),$$

siendo P^{-1} invertible, por tanto $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
Transitiva. Para todo $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists P_1 \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : B = P_1^{-1}AP_1 \\ \exists P_2 \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : C = P_2^{-1}BP_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2),$$

siendo P_1P_2 invertible, por tanto $A \sim B$ y $B \sim C$, implica $A \sim C$.

6. Si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son semejantes, existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Tomando determinantes, y usando conocidas propiedades:

$$|B| = \left|P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}\right| |A| \, |P| = \frac{1}{|P|} |A| \, |P| = |A| \, .$$

Por ora parte, dadas dos matrices $M, N \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sabemos que $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$. Entonces

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(AP)\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(A(PP^{-1})\right) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr} A.$$

7. Elijamos las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $|A| = |B| = 0$ y $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, sin embargo para toda matriz $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertible, $P^{-1}AP = P^{-1}0P = 0 \neq B$ lo cual implica que A y B no son semejantes.

10.14. Anillo de los endomorfismos y grupo lineal

1. Demostrar que $(\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ es un anillo unitario, en donde $+$ es la suma habitual de aplicaciones lineales y $\circ$ la composición.

2. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y de dimensión finita n. Sea B una base de E. Demostrar que la aplicación

$$\varphi : \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E) \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad \varphi(f) = [f]_B$$

es un isomorfismo de anillos.

3. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ se verifica

$$(\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f) = g \circ (\lambda f).$$

Solución. 1. Veamos que $(\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ es semigrupo. Habíamos demostrado que la composición de aplicaciones lineales es lineal, en consecuencia para todo $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ se verifica $f \circ g \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$. La composición de aplicaciones es en general asociativa, luego lo es en $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$.

Veamos que la operación $\circ$ es por distributiva respecto de la $+$. Para todo f, g, h elementos de $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ y para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}(f \circ (g+h))(x) &= f((g+h)(x)) = f(g(x)+h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = (f \circ g + f \circ h)(x),\end{aligned}$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}((g+h) \circ f)(x) &= (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) = (g \circ f + h \circ f)(x),\end{aligned}$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$. Hemos demostrado que $(\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ es un anillo.

El anillo es unitario pues la aplicación identidad I_E es un endomorfismo en E que para todo $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ verifica $f \circ I_E = I_E \circ f = f$. Es por tanto elemento neutro para la operación $\circ$.

2. Vimos que para espacios vectoriales E y F de dimensiones finitas,

$$\phi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathbb{K}^{n \times m}$$

definida por $\phi(f) = [f]_{B_E}^{B_F}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como caso particular ($E = F$ y $B_E = B_F = B$), la aplicación φ es biyectiva y homomorrfismo de grupos. Por otra parte, para todo $g, f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$:

$$\varphi(g \circ f) = [g \circ f]_B = [g \circ f]_B^B = [g]_B^B\,[f]_B^B = [g]_B\,[f]_B = \varphi(g)\,\varphi(f).$$

Hemos demostrado que φ es isomorfismo de anillos. Además, $\varphi(I_E) = [I_E]_B = I_n$ (matriz identidad de orden n), es decir φ transforma el elemento unidad del anillo inicial en el elemento unidad del anillo final.

3. Para todo $x \in E$:

$$[(\lambda g) \circ f](x) = (\lambda g)[f(x)] = \lambda g[f(x)] = \lambda[(g \circ f)(x)] = [\lambda(g \circ f)](x),$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $(\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f)$. De manera análoga se demuestra que $\lambda(g \circ f) = g \circ (\lambda f)$.

10.15. Espacio dual, base dual

1. Encontrar la base B de $E = \mathbb{R}_1[x]$ cuya dual es $B^* = \{f_1, f_2\}$, siendo

$$f_1[p(x)] = \int_0^1 p(x)\;dx, \quad f_2[p(x)] = \int_0^2 p(x)\;dx.$$

2. Encontrar la base dual de la base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -2), (3, 4)\}$.

3. Usando el concepto de matriz inversa, encontrar la base dual de la base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}.$$

4. Sea $E = \{p \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}\, p \leq 2\}$ y $\varphi \in E^*$, $\varphi(p) = p(1) + p(-1)$. Hallar las coordenadas de φ en la base dual de la $B = \{5, 2 + 3x, 1 - x^2\}$.

5. Sea E un espacio vectorial real, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo y $g : E \to \mathbb{R}$ la forma lineal que cumple $g(e_1 + e_2) = 2$, $g(e_2 - e_3) = 1$, $g(e_3 - e_1) = 3$. Hallar las coordenadas de g en B^*.

6. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo con característica distinta de 2. y de 7. Estudiar si las siguientes formas lineales forman una base del espacio dual de $\mathbb{K}^3$

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 2x - y + 3z, \\ f_2(x, y, z) &= 3x - 5y + z, \\ f_3(x, y, z) &= 4x + 7y + z, \end{aligned}$$

En caso afirmativo, hallar las coordenadas de $f(x, y, z) = x+y+z$ en tal base.

7. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensión finita n y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Demostrar que $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ es base de E^*, en donde

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_1(e_2) = 0 \\ \quad \ldots \\ f_1(e_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(e_1) = 0 \\ f_2(e_2) = 1 \\ \quad \ldots \\ f_2(e_n) = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} f_n(e_1) = 0 \\ f_n(e_2) = 0 \\ \quad \ldots \\ f_n(e_n) = 1. \end{cases}$$

8. Se consideran los elementos de $(\mathbb{R}_2[x])^*$:

$$\phi_1(p) = \int_0^1 p(x)\;dx, \quad \phi_2(p) = p'(1), \quad \phi_3(p) = p(0).$$

Hallar una base de $\mathbb{R}_2[x]$ cuya dual es $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

Solución. 1. Llamemos $B = \{e_1(x), e_2(x)\}$, siendo $e_1(x) = a_1+b_1x$, $e_2(x) = a_2 + b_2x$. Por definición de base dual,

$$\begin{cases} f_1(e_1) = 1 \\ f_2(e_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_1 + b_1x)\ dx = 1 \\ \int_0^2 (a_1 + b_1x)\ dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[a_1x + b_1x^2/2\right]_0^1 = 1 \\ \left[a_1x + b_1x^2/2\right]_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1/2 = 1 \\ 2a_1 + 2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow e_1(x) = 2 - 2x.$$

$$\begin{cases} f_1(e_2) = 0 \\ f_2(e_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_2 + b_2x)\ dx = 0 \\ \int_0^2 (a_2 + b_2x)\ dx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[a_2x + b_2x^2/2\right]_0^1 = 0 \\ \left[a_2x + b_2x^2/2\right]_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2/2 = 0 \\ 2a_2 + 2b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -1/2 \\ b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow e_2(x) = -1/2 + x.$$

Por tanto, $B = \{2 - 2x, -1/2 + x\}$.

2. Llamemos $B^* = \{f_1, f_2\}$. Dado que f_1 y f_2 pertenecen a $(\mathbb{R}^2)^*$, son aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y sus expresiones matriciales en las respectivas bases canónicas tienen la forma

$$f_1 \equiv\ [y_1] = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f_2 \equiv\ [y_1] = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Por definición de base dual:

$$\begin{cases} f_1(1, -2) = 1 \\ f_1(3, 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [1] \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4/10 \\ b = -3/10 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = (4/10)x_1 - (3/10)x_2.$$

$$\begin{cases} f_2(1, -2) = 0 \\ f_2(3, 4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [0] \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2/10 \\ d = 1/10 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = (2/10)x_1 + (1/10)x_2.$$

Por tanto, la base pedida es $B^* = \{f_1, f_2\}$ siendo:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{10}(4x_1 - 3x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{10}(2x_1 + x_2).$$

3. Llamemos $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$. Dado que f_1, f_2 y f_3 pertenecen a $(\mathbb{R}^3)^*$, son aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y sus expresiones matriciales en las respectivas bases canónicas tienen la forma

$$f_i \equiv \ [y_1] = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3),$$

o de forma equivalente

$$f_i(x_1, x_2, x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Por definición de base dual:

$$\begin{cases} f_1(2,1,1) = 1 \\ f_1(1,2,1) = 0 \\ f_1(1,1,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + 2c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(2,1,1) = 0 \\ f_2(1,2,1) = 1 \\ f_2(1,1,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 = 1 \\ a_2 + b_2 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(2,1,1) = 0 \\ f_3(1,2,1) = 0 \\ f_3(1,1,2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 + 2b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 + b_3 + 2c_3 = 1. \end{cases}$$

En vez de resolver los tres sistemas anteriores, podemos expresar

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la base pedida es $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ siendo:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}(3x_1 - x_2 - x_3),$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}(-x_1 + 3x_2 - x_3),$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + 3x_3).$$

4. Sea $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ la base dual de B, y sea $\varphi = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$. Por definición de base dual,

$$\begin{cases} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(5) = \lambda_1 \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(2+3x) = \lambda_2 \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(1-x^2) = \lambda_3. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \varphi(5) = 5 + 5 = 10 \\ \lambda_2 = \varphi(2+3x) = 5 + (-1) = 4 \\ \lambda_3 = \varphi(1-x^2) = 0 + 0 = 0, \end{cases}$$

luego las coordenadas pedidas son $(10, 4, 0)$.

5. Dado que la aplicación g es lineal:

$$\begin{cases} g(e_1 + e_2) = 2 \\ g(e_2 - e_3) = 1 \\ g(e_3 - e_1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = 2 \\ g(e_2) - g(e_3) = 1 \\ g(e_3) - g(e_1) = 3. \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos $g(e_1) = -1$, $g(e_2) = 3$, $g(e_3) = 2$. Sea $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$, y $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$. Por definición de base dual:

$$\begin{cases} g(e_1) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_1) = \lambda_1 \\ g(e_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_2) = \lambda_2 \\ g(e_3) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(e_3) = \lambda_3. \end{cases}$$

Las coordenadas de g en B^* son por tanto $(-1, 3, 2)$.

6. Dado que $\dim \left(\mathbb{K}^3\right)^* = 3$, los vectores f_1, f_2, f_3 forman base de $\left(\mathbb{K}^3\right)^*$ si, y sólo si, son linealmente independientes. Supongamos que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}).$$

Entonces,

$$\begin{cases} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(1,0,0) = 0(1,0,0) \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0,1,0) = 0(0,1,0) \\ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0,0,1) = 0(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 5\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 4 + 63 + 60 - 14 + 3 = 98.$$

Podemos expresar $98 = 2 \cdot 7^2$ y dado que la característica de un cuerpo es infinito a un número primo, si

$$98 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{98 \text{ veces}}$$

fuera 0 la característica de $\mathbb{K}$ sería infinito o un número primo dividiento a 98. Como la característica de $\mathbb{K}$ es distinta de 2 y 7, se verifica $98 \neq 0$. La única solución del sistema $(*)$ es la trivial, en consecuencia $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ es base del dual de $\mathbb{K}^3$. Si (ξ_1, ξ_2, ξ_3) son las coordenadas de f en B, $f = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3$. Entonces,

$$\begin{cases} (\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3)(1,0,0) = f(1,0,0) \\ (\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3)(0,1,0) = f(0,1,0) \\ (\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3)(0,0,1) = f(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 1 \\ -\xi_1 - 5\xi_2 + 7\xi_3 = 1 \\ 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (15/49, -3/49, 1/7)$.

7. Dado que $\dim E^* = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}) = (\dim E)(\dim \mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$, basta demostrar que B^* es un sistema libre. Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y teniendo en cuenta que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker):

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n)(e_i) = 0(e_i) \Rightarrow \lambda_i = 0,$$

luego B^* es base de E^*.

8. Llamemos $B = \{e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$, siendo $e_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$, $e_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$, $e_3(x) = a_3 + b_3 x + c_3 x^2$. Por definición de base dual,

$$\begin{cases} \phi_1(e_1) = 1 \\ \phi_2(e_1) = 0 \\ \phi_3(e_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_1 + b_1 x + c_1 x^2)\, dx = 1 \\ b_1 + 2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1/2 + c_1/3 = 1 \\ b_1 + 2c_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = -3/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(e_2) = 0 \\ \phi_2(e_2) = 1 \\ \phi_3(e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, dx = 1 \\ b_2 + 2c_2 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2/2 + c_2/3 = 0 \\ b_2 + 2c_2 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = -1/2 \\ c_2 = 3/4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1(e_3) = 0 \\ \phi_2(e_3) = 0 \\ \phi_3(e_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a_3 + b_3 x + c_3 x^2)\, dx = 1 \\ b_3 + 2c_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3 + b_3/2 + c_3/3 = 0 \\ b_3 + 2c_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = -3 \\ c_2 = 3/2. \end{cases}$$

La base pedida es por tanto:

$$B = \{3x - 3x^2/2,\ -x/2 + 3x^2/4,\ 1 - 3x + 3x^2/2\}.$$

10.16. Cambio de base en el espacio dual

1. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases:

$$B_1 = \{(1,1,0),\ (-1,0,2),\ (0,2,5)\}$$
$$B_2 = \{(0,1,1),\ (1,1,1),\ (3,1,0)\}.$$

Hallar la matriz de cambio de B_1^* a B_2^*.

2. Sean E un espacio vectorial de dimensión 2, B y B' bases de E, y P la matriz de cambio de B a B'. Demostrar la matriz H de cambio de B^* a $(B')^*$ es $H = \left(P^{-1}\right)^T$.

Solución. Recordemos que si E es un espacio vectorial de dimensión finita, B y B' son bases de E, y P es la matriz de cambio de B a B', entonces, la matriz de cambio de B^* a $(B')^*$ es $\left(P^{-1}\right)^T$.

1. Hallemos la matriz de P de cambio de B_1 a B_2. Expresemos:

$$\begin{cases} (0,1,1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,0,2) + \alpha_3(0,2,5) \\ (1,1,1) = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(-1,0,2) + \beta_3(0,2,5) \\ (3,1,0) = \gamma_1(1,1,0) + \gamma_2(-1,0,2) + \gamma_3(0,2,5). \end{cases}$$

Por tanto,

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Podríamos resolver los tres sistemas independientemente, ahora bien, estos equivalen a la igualdad:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando conocidas propiedades de la transposición y de la inversa:

$$\left(P^{-1}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Operando obtenemos la matriz pedida:

$$\left(P^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Sean $B = \{u_1, u_2\}$, $B' = \{v_1, v_2\}$, $B^* = \{f_1, f_2\}$, $(B')^* = \{g_1, g_2\}$ y

$$\begin{cases} v_1 = p_{11}u_1 + p_{12}u_2 \\ v_2 = p_{21}u_1 + p_{22}u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} g_1 = h_{11}f_1 + h_{12}f_2 \\ g_2 = h_{21}f_1 + h_{22}f_2, \end{cases}$$

con lo cual

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

Por definición de base dual

$$\begin{cases} g_1(v_1) = 1 \\ g_1(v_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g_2(v_1) = 0 \\ g_2(v_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (h_{11}f_1 + h_{12}f_2)(p_{11}u_1 + p_{12}u_2) = 1 \\ (h_{11}f_1 + h_{12}f_2)(p_{21}u_1 + p_{22}u_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (h_{21}f_1 + h_{22}f_2)(p_{11}u_1 + p_{12}u_2) = 0 \\ (h_{21}f_1 + h_{22}f_2)(p_{21}u_1 + p_{22}u_2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_{11}p_{11} + h_{12}p_{12} = 1 \\ h_{11}p_{21} + h_{12}p_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_{21}p_{11} + h_{22}p_{12} = 0 \\ h_{21}p_{21} + h_{22}p_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^T H = I \Leftrightarrow H = \left(P^T\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^T.$$

Nota. El método anterior es fácilmente generalizable a dimensión n.

10.17. Subespacio conjugado o anulador

1. En $\mathbb{R}^4$ y respecto de una base B se considera el subespacio de ecuaciones cartesianas:

$$F : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Hallar unas ecuaciones cartesianas del subespacio conjugado o anulador F^0, en la base B^*.

2. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y F subespacio de E. Demostrar que $F^0 = \{f \in E^* : f(x) = 0 \, \forall x \in F\}$ es subespacio de E^*.

3. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, F subespacio de E y $B_F = \{u_1, \ldots, u_r\}$ base de F. Demostrar que $f \in F^0 \Leftrightarrow f(u_1) = \ldots = f(u_r) = 0$.

Solución. 1. Llamemos $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Usando el conocido método para hallar una base de un subespacio dado por unas ecuaciones cartesianas, obtenemos la base de $F : B_F = \{(1, 8, 3, -2)\}$ (en coordenadas en B), es decir:

$$B_F = \{e_1 + 8e_2 + 3e_3 - 2e_4\}.$$

Todo vector f del dual de $\mathbb{R}^4$ es de la forma $f = x_1^* f_1 + x_2^* f_2 + x_3^* f_3 + x_4^* f_4$ con $x_i^* \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$f \in F^0 \Leftrightarrow f(e_1 + 8e_2 + 3e_3 - 2e_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1^* f_1 + x_2^* f_2 + x_3^* f_3 + x_4^* f_4)(e_1 + 8e_2 + 3e_3 - 2e_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^* + 8x_2^* + 3x_3^* - 2x_4^* = 0.$$

Unas ecuaciones pedidas son por tanto

$$F^0 : x_1^* + 8x_2^* + 3x_3^* - 2x_4^* = 0.$$

2. La forma lineal nula $0 : E \to \mathbb{K}$ satisface $0(x) = 0$ para todo $x \in F$, por tanto pertenece a F^0. Para todo $f, g \in F^0$ y para todo $x \in F$:

$$(f + g)(x) = f(x) + f(x) = 0 + 0 = 0,$$

luego $f + g \in F^0$. Por último, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $f \in F^0$ y para todo $x \in F$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0,$$

es decir $\lambda f \in F^0$. Concluimos que F^0 es subespacio de E^*.

3. $\Rightarrow$) Si $f \in F^0$, $f(x) = 0$ para todo $x \in F$, en particular $f(u_1) = \ldots = f(u_r) = 0$ pues $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset F$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $f \in E^*$ satisface $f(u_1) = \ldots = f(u_r) = 0$ y sea $x \in F$. Como B_F es base de F, $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r$ para ciertos escalares λ_i. Entonces, usando la linealidad de f :

$$f(x) = f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r) = \lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_r f(u_r)$$

$$= \lambda_1 0 + \ldots + \lambda_r 0 = 0,$$

lo cual implica que $f \in F^0$.

10.18. Aplicación transpuesta

1. Se considera la aplicación lineal $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $D(p) = p'$. Hallar la matriz de la aplicación transpuesta D^T respecto de las bases duales de la canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, E^* y F^* sus duales respectivos y $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que la aplicación transpuesta de f :

$$f^T : F^* \to E^*, \quad f^T(y^*) = y^* \circ f.$$

es una aplicación lineal.

3. Demostrar que la aplicación $\varphi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F^*, E^*)$, $\varphi(f) = f^T$ es lineal.

4. Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ entonces, $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$.

5. Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$, entonces $(I_E)^T = I_{E^*}$.

6. Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, es isomorfismo también lo es f^T y $\left(f^{-1}\right)^T = \left(f^T\right)^{-1}$.

7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y $u : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ la aplicación lineal $u(x, y) = (x - y, x + y)$. Hallar $u^T(f)$ siendo f la forma lineal dada por $f(x, y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{K}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ la forma lineal $f(p) = \int_a^b p(x)dx$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Sea D el operador derivación sobre $\mathbb{R}_n[x]$ Calcular $D^T(f)$.

9. Dada $T \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, comprobar que $\overline{T}$ pertenece a $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$, donde $\overline{T}$ viene definida por

$$\overline{T}(x, y, z) = T(x + y, x + y - z).$$

Definamos ahora $\varphi : \left(\mathbb{R}^2\right)^* \to \left(\mathbb{R}^3\right)^*$, $\varphi(T) = \overline{T}$.
Demostrar que φ es lineal y calcular la matriz asociada a φ con respecto de las bases duales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Solución. 1. Llamemos B_1 y B_2 a las bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente:

$$B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}, \quad B_2 = \{1, x, x^2\}.$$

Tenemos: $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$. Trasponiendo coeficientes,

$$[D]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

por tanto la matriz pedida es la traspuesta de la anterior:

$$\left[D^T\right]_{B_2^*}^{B_1^*} = \left([D]_{B_1}^{B_2}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Dado que $f : E \to F$ e $y^* : F \to \mathbb{K}$ son lineales, la composición $y^* \circ f : E \to \mathbb{K}$ es lineal. Es decir, $f^T(y^*) \in E^*$ y por tanto la aplicación f^T está bien definida. Veamos que es lineal.
(i) Para todo $y^*, z^* \in F^*$ y para todo $x \in E :$

$$\left[f^T(y^* + z^*)\right](x) = \left[(y^* + z^*) \circ f\right](x) = \left[y^* \circ f + z^* \circ f\right](x) =$$

$$(y^* \circ f)(x) + (z^* \circ f)(x) = \left[f^T(y^*)\right](x) + \left[f^T(z^*)\right](x) = \left[f^T(y^*) + f^T(z^*)\right](x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $f^T(y^* + z^*) = f^T(y^*) + f^T(z^*)$.
(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $y^* \in F^*$ y para todo $x \in E :$

$$\left[f^T(\lambda y^*)\right](x) = \left[(\lambda y^*) \circ f\right](x) = \left[\lambda(y^* \circ f)\right](x) = \left[\lambda f^T(y^*)\right](x),$$

y por definición de igualdad de funciones, $f^T(\lambda y^*) = \lambda f^T(y^*)$. Concluimos que f^T es lineal.

3. Dado que $f^T : F^* \to E^*$ es lineal, $f^T \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F^*, E^*)$ es decir, la aplicación φ está bien definida.
(i) Para todo $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $y^* \in F^*$:

$$[\varphi(f+g)](y^*) = [(f+g)^T](y^*) = y^* \circ (f+g) = y^* \circ f + y^* \circ g$$

$$= f^T(y^*) + g^T(y^*) = [\varphi(f)](y^*) + [\varphi(g)](y^*) = [\varphi(f) + \varphi(g)](y^*),$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ y para todo $y^* \in F^*$:

$$[\varphi(\lambda f)](y^*) = [(\lambda f)^T](y^*) = y^* \circ (\lambda f) = \lambda(y^* \circ f)$$

$$= \lambda f^T(y^*) = [\lambda f^T](y^*) = [\lambda \varphi(f)](y^*)$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $\varphi(\lambda f) = \lambda \varphi(f)$. Concluimos que φ es lineal.

4. Para todo $z^* \in G^*$:

$$(g \circ f)^T(z^*) = z^* \circ (g \circ f) = (z^* \circ g) \circ f$$

$$= g^T(z^*) \circ f = f^T[g^T(z^*)] = (f^T \circ g^T)(z^*),$$

y por definición de igualdad de aplicaciones, $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$.

5. Para todo $y^* \in E^*$ se verifica $(I_E)^T(y^*) = y^* \circ I_E = y^* = I_{E^*}(y^*)$, y por definición de igualdad de aplicaciones, $(I_E)^T = I_{E^*}$.

6. Si f es un isomorfismo de E sobre F, f^{-1} es un isomorfismo de F sobre E y se verifica $f^{-1} \circ f = I_E$, $f \circ f^{-1} = I_F$. Tomando transpuestas:

$$f^T \circ (f^{-1})^T = I_{E^*}, \quad (f^{-1})^T \circ f^T = I_{F^*}.$$

En consecuencia, f^T es invertible y $(f^{-1})^T = (f^T)^{-1}$.

7. Por definición de aplicación transpuesta:

$$u^T(f)(x, y) = (f \circ u)(x, y) = f[u(x, y)] = f(x - y, x + y)$$

$$= a(x - y) + b(x + y) = (a + b)x + (b - a)y.$$

8. Por definición de aplicación transpuesta

$$D^T(f)(p) = (f \circ D)(p) = f[D(p)] = f[p'(x)]$$

$$= \int_a^b p'(x)\, dx = [p(x)]_a^b = p(b) - p(a).$$

9. Por hipótesis, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es lineal. Definamos la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

Entonces, $(T \circ f)(x.y, z) = T(f(x, y, z)) = T(x + y, x + y - z)$, por tanto $\overline{T} = T \circ f$ y la composición de aplicaciones lineales es lineal, lo cual implica que $\overline{T} \in \left(\mathbb{R}^3\right)^*$.
Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo T_1, $T_2 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, y aplicando conocidas propiedades de la composición:

$$\varphi(\lambda T_1 + \mu T_2) = (\lambda T_1 + \mu T_2) \circ f$$

$$= \lambda(T_1 \circ f) + \mu(T_2 \circ f) = \lambda\varphi(T_1) + \mu\varphi(T_2),$$

luego φ es lineal.
Observemos que la aplicación dada φ es justamente la traspuesta de la f, por tanto la matriz de $\varphi = f^T$ en las duales de las canónicas es la traspuesta de la de f en las canónicas. Ahora bien,

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

luego la matriz pedida es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10.19. Matrices de aplicaciones lineales

Sean los espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita $E(\mathbb{K})$, $F(\mathbb{K})$, $G(\mathbb{K})$ y sean las bases respectivas $B_E = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_G = \{w_1, w_2, w_3\}$. Sean los homomorfismos $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ definidos por

$$\begin{cases} f(u_1) = 2v_1 - v_3 \\ f(u_2) = v_2 + 2v_3 \\ f(u_3) = v_1 + 2v_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} g(v_1 + v_3) = 2w_1 + 4w_2 + 6w_3 \\ g(v_2) = w_2 \\ g(v_1 - v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 6w_3. \end{cases}$$

Se pide
1. Matriz $M(f)$ asociada a f respecto a B_E y B_F.
2. Matriz $M(g)$ asociada a g respecto a B_F y B_G.
3. Matriz $M(g \circ f)$ asociada a $g \circ f$ respecto a B_E y B_G.
4. Rango de $M(g \circ f)$.

5. Dimensión de la imagen homomorfa de $E(\mathbb{K})$ según $g \circ f$.
6. Dimensión de $\ker f$ y de $\operatorname{Im} f$.
7. ¿Es inyectiva f? ¿y $g \circ f$?
8. ¿Pertenece $u_1 + u_2 + u_3$ a $\ker f$?
9. Encontrar una nueva base de F, $B'_F = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ tal que la matriz asociada a f respecto a B_E y B'_F sea I (matriz identidad).

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Arquitectura, UPM).

Solución. 1. Trasponiendo coeficientes, obtenemos la matriz pedida:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Teniendo en cuenta que g es lineal:

$$\begin{cases} g(v_1) + g(v_3) = 2w_1 + 4w_2 + 6w_3 \\ g(v_1) - g(v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 6w_3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $g(v_1) = 2w_1 + 3w_2 + 6w_3$ y $g(v_3) = w_2$ con lo cual

$$\begin{cases} g(v_1) = 2w_1 + 3w_2 + 6w_3 \\ g(v_2) = w_2 \\ g(v_3) = w_2. \end{cases}$$

La matriz $M(g)$ es por tanto $M(g) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Usando un conocido teorema

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. El determinante de $M(g \circ f)$ es nulo y al menos hay un menor de orden no nulo de orden 2, en consecuencia $\operatorname{rg} M(g \circ f) = 2$.

5. $\dim (g \circ f)(E) = \operatorname{rg} M(g \circ f) = 2$.

6. La dimensión de la imagen de f es

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} M(f) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales

$$\dim \ker f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 3 = 0.$$

7. Dado que $\dim \ker f = 0$, concluimos que f es inyectiva. Sin embargo y usando de nuevo el teorema de las dimensiones

$$\dim (g \circ f)(E) = 3 - \operatorname{rg} M(g \circ f) = 1 \neq 0,$$

es decir $g \circ f$ no es inyectiva.

8. El vector $u_1 + u_2 + u_3$ no pertenece a $\ker f$ pues no es el vector nulo, y al ser f es inyectiva se verifica $\ker f = \{0\}$.

9. La base pedida $B'_F = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ ha de verificar

$$\begin{cases} f(u_1) = v'_1 \\ f(u_2) = v'_2 \\ f(u_3) = v'_3. \end{cases}$$

Basta elegir por tanto

$$v'_1 = 2v_1 - v_3,\ v'_2 = v_2 + 2v_3,\ v'_3 = v_1 + 2v_3.$$

Los tres vectores anteriores forma efectivamente base en $F(\mathbb{K})$ pues el rango de la matriz $M(f)$ es 3.

10.20. Un endomorfismo nilpotente

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene respecto a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ asociada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta \text{ constante }).$$

Se pide:
(a) Probar que la aplicación $f^3 = f \circ f \circ f$ es la aplicación nula.
(b) Si para $k \in \mathbb{R}$ se define la aplicación lineal $\varphi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$\varphi_k = i + kf + (k^2/2)f^2 \ (i \text{ aplicación identidad}).$$

probar que el conjunto $G = \{\varphi_k : k \in \mathbb{R}\}$ es un grupo respecto de la composición de aplicaciones.
(c) Si $e'_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0),\ e'_2 = (0, -1, -\sin\theta),\ e'_3 = (1, 0, \cos\theta)$, comprobar que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
(d) Hallar la matriz de f asociada a la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

(Propuesto como trabajo personal, Álgebra, ETS de Ing. Aeronaúticos, UPM).

Solución. (a) La matriz de f^3 en la base canónica es A^3, por tanto bastará demostrar que $A^3 = 0$. Usando el teorema de Pitágoras trigonométrico:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

(b) Usando conocidas propiedades de la composición de aplicaciones y que $f^3 = f^4 = 0$:

$$\varphi_k \circ \varphi_s = \left(i + kf + \frac{k^2}{2}f^2\right) \circ \left(i + sf + \frac{s^2}{2}f^2\right)$$

$$= i + sf + \frac{s^2}{2}f^2 + kf + ksf^2 + \frac{ks^2}{2}f^3 + \frac{k^2}{2}f^2 + \frac{k^2 s}{2}f^3 + \frac{k^2 s^2}{2}f^4$$

$$i + (s+k)f + \left(\frac{s^2}{2} + ks + \frac{k^2}{2}\right)f^2 = i + (s+k)f + \frac{(k+s)^2}{2}f^2 = \varphi_{k+s}.$$

La relación anterior implica que la composición es interna en G. La composición es asociativa en general, luego lo es en G. El elemento neutro i de la composición pertenece a G pues $i = \varphi_0$. Dado $\varphi_k \in G$:

$$i = \varphi_0 = \varphi_{k+(-k)} = \varphi_k \circ \varphi_{-k} \Rightarrow \varphi_k^{-1} = \varphi_{-k} \in G.$$

Concluimos que $(G.\circ)$ es grupo. Es además abeliano pues

$$\varphi_k \circ \varphi_s = \varphi_{k+s} = \varphi_{s+k} = \varphi_s \circ \varphi_k.$$

(c) Dado que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, para demostrar que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ basta demostrar que son linealmente independientes o bien que el rango de la matriz correspondiente es 3.

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -1 & -\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1 \neq 0.$$

Concluimos que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ es efectivamente base de $\mathbb{R}^3$.

(d) La matriz de cambio de la base canónica a la $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ es

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 1 \\ \sin\theta & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Por un conocido teorema, la matriz de f en la nueva base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ es $P^{-1}AP$. Operando obtenemos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \\ \sin\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}.$$

10.21. Hiperplanos

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n > 1$. Se dice que H es un *hiperplano* de V cuando H es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Se pide:
(a) Determinar cuales de los subconjuntos H_1, H_2, H_3, H_4 del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son subespacios, y cuales hiperplanos. Justificar las respuestas.

$$H_1 = \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\},\ H_2 = \{(x,x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$
$$H_3 = \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\},\ H_4 = \{(x,x,1) : x \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una forma lineal no idénticamente nula. Demostrar que entonces el núcleo de f es un hiperplano de V.
(c) Enunciar la proposición recíproca de la anterior, y estudiar su validez (en caso afirmativo da una demostración, y en caso contrario construir un contraejemplo.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Un vector pertenece a H_1 si y sólo si es de la forma $x(1,1,1)$ con $x \in \mathbb{R}$. Es decir, $H_1 = L[(1,1,1)]$, y sabemos que todo subconjunto de un espacio vectorial de la forma $L[S]$ es subespacio. Además, $(1,1,1)$ es linealmente independiente y genera a H_1 lo cual implica que $\{(1,1,1)\}$ es base de H_1 y por tanto $\dim H_1 = 1$. Concluimos que H_1 es hiperplano de $\mathbb{R}^3$.

De manera análoga, $H_2 = L[(1,1,0),(0,0,1)]$, es decir H_2 es subespacio de $\mathbb{R}^3$. Los vectores anteriores son linealmente independientes y generan H_2. Entonces, $\dim H_2 = 2$ lo cual implica que H_2 no es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$.

Podemos expresar $H_3 = L[(1,1,0)$. Como se hizo para H_1, concluimos que H_3 es hiperplano de $\mathbb{R}^3$. Por último, el vector nulo no pertenece a H_4, con lo cual no es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una forma lineal no idénticamente nula, entonces existe $v \in V$ tal que $f(v) = a \neq 0$. Es decir, $a \in \text{Im}f$. Dado que $\{0\} \neq \text{Im}f \subset \mathbb{R}$, que $\text{Im}f$ es subespacio de $\mathbb{R}$ y que $\dim \mathbb{R} = 1$ se deduce que $\dim \text{Im}f = 1$. Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales:

$$\dim(\ker f) = \dim V - \dim(\text{Im}f) = n - 1 \Rightarrow \ker f \text{ es hiperplano de } \mathbb{R}^3.$$

(c) La proposición recíproca de la anterior es: *Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una forma lineal. Si $\ker f$ es un hiperplano de V, entonces f no es idénticamente nula.* Esta proposición es cierta. En efecto, aplicando de nuevo el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales tenemos que $n = n - 1 + \dim(\text{Im}f)$, lo cual implica que $\dim(\text{Im}f) = 1$ y por tanto f no es idénticamente nula.

10.22. Endomorfismo y suma $S_4 = 1^4 + ... + n^4$

1. Sea $\mathbb{R}_5[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor que 6 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se considera la aplicación $T : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_5[x]$ definida por $\forall p(x) \in \mathbb{R}_5[x],\ T(p(x)) = p(x+1) - p(x)$. Demostrar que T es lineal.
2. Estudiar si es cierto el siguiente enunciado: $p \in \ker T \Leftrightarrow\ p$ es constante.
3. Hallar las imágenes por T de la base canónica de $\mathbb{R}_5[x]$ y calcular $T^{-1}(x^4)$.
4. Utilizar el resultado anterior para deducir una expresión de la suma

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4.$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. El polinomio $T(p(x)) = p(x+1) - p(x)$ es de grado menor o igual que 5, en consecuencia pertenece a $\mathbb{R}_5[x]$. Por otra parte, $\forall \lambda \forall \mu \in \mathbb{R}$, $\forall p(x) \forall q(x) \in \mathbb{R}_5[x]$ tenemos:

$$T[(\lambda p(x) + \mu q(x))] = \lambda p(x+1) + \mu q(x+1) - (\lambda p(x) + \mu q(x)) =$$
$$\lambda(p(x+1) - p(x)) + \mu(q(x+1) - q(x)) = \lambda T(p(x) + \mu T(q(x)).$$

2. Sea $p = k \in \mathbb{R}_5[x]$ constante. Entonces, $T(p(x)) = k - k = 0$ y en consecuencia $p(x) \in \ker T$. Reciprocamente, si $p \in \ker T$ entonces $p(x+1) - p(x) = 0$ o de forma equivalente $p(x+1) = p(x)$. Supongamos que p no fuera constante. Entonces sería de grado ≥ 1 y por el teorema fundamental del Álgebra tendría una raíz compleja a. Si p perteneciera a $\ker T$ se verificaría $p(x+1) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por tanto:

$$p(a+1) = p(a) = 0,\ p(a+2) = p(a+1) = 0,\ p(a+3) = p(a+2) = 0, \ldots$$

Es decir, p tendría infinitas raíces: $a, a+1, a+2, \ldots$, lo cual es absurdo. Podemos pues concluir que $\ker T = \{p \in \mathbb{R}_5[x] : p \text{ constante}\}$.

3. Los transformados de la base canónica B de $\mathbb{R}_5[x]$ son:
$T(1) = 1 - 1 = 0,$
$T(x) = (x+1) - x = 1,$
$T(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 1 + 2x,$
$T(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = \ldots = 1 + 3x + 3x^2,$
$T(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = \ldots = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3,$
$T(x^5) = (x+1)^5 - x^5 = \ldots = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4.$

Transponiendo coeficientes, obtenemos la expresión matricial de T en B:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}.$$

Las coordenadas de x^4 en la base canónica B son $(0,0,0,0,1,0)^t$. Por tanto, $T^{-1}(x^4)$ está determinado por los $(x_1, \ldots, x_6)^t$ tales que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t = (\alpha, -1/30, 0, 1/3, -1/2, 1/5)^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto $T^{-1}(x^4) = \left\{\alpha - x/30 + x^3/3 - x^4/2 + x^5/5 : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

4. Consideremos cualquier polinomio $h(x) \in T^{-1}(x^4)$ (por ejemplo el correspondiente a $\alpha = 0$). Tal polinomio cumple $T(h(x)) = x^4$ es decir $h(x+1) - h(x) = x^4$ $(*)$. Dando a x los valores $1, 2, \ldots, n$ en $(*)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} h(2) - h(1) &= 1^4, \\ h(3) - h(2) &= 2^4, \\ h(4) - h(3) &= 3^4, \\ &\ldots, \\ h(n+1) - h(n) &= n^4. \end{aligned}$$

Sumando y cancelando obtenemos $h(n+1)-h(n)=1^4+2^4+\ldots+n^4=S_4$. Es decir:

$$S_4=h(n+1)-h(1)=$$
$$-\frac{n+1}{30}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^5}{5}+\frac{1}{30}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}.$$

Operando y simplificando obtenemos:

$$S_4=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n(2n+1)(n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

10.23. Sucesiones exactas

Sean $E,\ F,\ G,\ H$ espacios vectoriales, y sean $f:E\to F$, $g:F\to G$, $h:G\to H$ aplicaciones lineales. Se dice que la sucesión $E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G$ es *exacta* en F cuando $\text{Im}f=\ker g$.

(a) Supongamos que $\dim E=0$. Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente que ha de cumplir g para que la sucesión $E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G$ sea exacta en F.

(b) Supongamos que $\dim H=0$. Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente que ha de cumplir g para que la sucesión $F\xrightarrow{g}G\xrightarrow{h}H$ sea exacta en G.

(c) Supongamos que la sucesión $E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G\xrightarrow{h}H$ es exacta en F y exacta en G. Estudiar la validez de la proposición f es sobreyectiva si y sólo si h es inyectiva. Dar una demostración o construir un contraejemplo.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. ***(a)*** Por hipótesis $\dim E=0$, esto equivale a $E=\{0\}$. Tenemos por tanto la sucesión $\{0\}\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G$ lo cual implica que f es necesariamente la aplicación cero al ser f lineal. Se deduce que $\text{Im}f=\{0\}$. Entonces

$$\{0\}\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G \text{ es exacta en } F\Leftrightarrow \text{Im}f=\ker g\Leftrightarrow$$
$$\{0\}=\ker g\Leftrightarrow g \text{ es inyectiva.}$$

Es decir, la sucesión dada es exacta en F si y sólo si g es inyectiva.

(b) Por hipótesis $\dim H=0$. Esto equivale a $H=\{0\}$. Tenemos por tanto la sucesión $F\xrightarrow{g}G\xrightarrow{h}\{0\}$ lo cual implica que $\ker h=G$. Entonces

$$F\xrightarrow{g}G\xrightarrow{h}\{0\} \text{ es exacta en } G\Leftrightarrow \text{Im}g=\ker h\Leftrightarrow$$
$$\text{Im}g=G\Leftrightarrow g \text{ es sobreyeciva.}$$

Es decir, la sucesión dada es exacta en G si y sólo si g es sobreyectiva.

(c) Por hipótesis $\text{Im}f=\ker g$ e $\text{Im}g=\ker h$. Tenemos

$$f \text{ es sobreyectiva} \Rightarrow \text{Im}f = F = \ker g \Rightarrow$$
$$\text{Im}g = \{0\} = \ker h \Rightarrow h \text{ es inyectiva.}$$

$$h \text{ es inyectiva} \Rightarrow \ker h = \{0\} = \text{Im}g \Rightarrow$$
$$\ker g = F = \text{Im}f \Rightarrow f \text{ es sobreyectiva.}$$

La proposición es por tanto válida.

10.24. Endomorfismo en un subespacio de $C(\mathbb{R})$.

En el espacio vectorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se consideran ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 definidas $\forall x \in \mathbb{R}$ por:

$$\phi_1(x) = 1,\ \phi_2(x) = x,\ \phi_3(x) = x \log |x| \text{ si } x \neq 0,\ \phi_3(0) = 0.$$

1. Probar que $B = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ es una familia libre en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Si E es el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ generado por B, demostrar que la funcion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $\phi(x) = 1 + x - x \log |x|$ si $x \neq 0$, $\phi(0) = 0$ pertenece a E y hallar sus coordenadas en la base B.
2. Sea f el endomorfismo en E cuya matriz respecto de B es:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estudiar si f es automorfismo y determinar en su caso f^{-1}. Resolver la ecuación $f(\varphi) = \phi$, donde ϕ es la función definida en el apartado anterior.
3. Calcular $(M - I)(M + 3I)$. Expresar M^2 y M^{-1} en función de M y de I. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists u_n, v_n \in \mathbb{R}$ tales que $M^n = u_n I + v_n M$ y que $u_n + v_n$ es constante.
4. Expresar u_n, v_n y M^n en función de n para $n \geq 0$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales , UPM).

Solución. 1. Es sencillo comprobar que las funciones ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son efectivamente continuas en $\mathbb{R}$. En cualquier caso y de la redacción de este apartado parece darse por supuesto que lo son. Veamos que forman un sistema libre. Consideremos una combinación lineal de estas funciones igualada a la función cero, es decir $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0$. Dando a x los valores $0, 1, e$ obtenemos:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + e\lambda_2 + e\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

de lo que se deduce que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y por tanto B es una familia libre. Por otra parte de la definición de ϕ se deduce inmediatamente que $\phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3$. Esto prueba que $\phi \in E$ y además que las coordenadas de ϕ en B son $(1, 1, -1)$.

2. La ecuación matricial de f en la base B es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Como $\det(M) = -3 \neq 0$ tenemos que $\dim(\ker f) = 3 - \operatorname{rg}(M) = 0$, lo cual implica que $\ker f = \{0\}$ y f es inyectiva. Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ y f es sobreyectiva. En consecuencia, f es automorfismo.

Si $(x_1, x_2, x_3)^t$ son las coordenadas de φ en B entonces, usando (1) y que las coordenadas de ϕ en B son $(1, 1, -1)^t$ se ha de verificar:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos $(x_1, x_2, x_3)^t = (1/3, 1/3, 1/3)$ o de manera equivalente $\varphi = (1/3)(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$. Queda por tanto:

$$\varphi(x) = \frac{1 - x - x \log |x|}{3} \text{ si } x \neq 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{3}.$$

3. Operando obtenemos $(M - I)(M + 3I) = 0$ o bien $M^2 + 2M - 3I = 0$, por tanto $M^2 = 3I - 2M$. Por otra parte:

$$M^2 + 2M - 3I = 0 \Leftrightarrow M(M + 2I) = 3I \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{3}(M + 2I)\right) = I.$$

Se deduce pues que $M^{-1} = (1/3)(M + 2I)$. Veamos por inducción que si $n \geq 0$ existen $u_n, v_n \in \mathbb{R}$ tales que $M^n = u_n I + v_n M$. Tenemos:

$$M^0 = I = 1I + 0M, \; M^1 = 0I + 1M, \; M^2 = 3I - 2M.$$

En consecuencia es cierto para $n = 0, 1, 2$ verificándose además para estos valores de n que $u_n + v_n = 1$. Supongamos que es cierto para n, entonces:

$$\begin{gathered} M^{n+1} = (u_n I + v_n M)M = u_n M + v_n M^2 = \\ u_n M + v_n(3I - 2M) = 3v_n I + (u_n - 2v_n)M. \end{gathered}$$

Existen pues $u_{n+1} = 3v_n, v_{n+1} = u_n - 2v_n$ tales que $M^{n+1} = u_{n+1}I + v_{n+1}M$ cumpliéndose además $u_{n+1} + v_{n+1} = 3v_n + (u_n - 2v_n) = u_n + v_n = 1$.

Procedemos de análoga manera para M^{-k} con $k > 0$: $M^{-1} = (2/3)I + (1/3)M$ es decir, $M^{-1} = u_{-1}I + v_{-1}M$ con $u_{-1} + v_{-1} = 1$. Si $M^{-k} = u_{-k} + v_{-k}M$ con $u_{-k} + v_{-k} = 1$ entonces:

$$M^{-k-1} = M^{-k}M^{-1} = (u_{-k} + v_{-k}M)\left(\frac{2}{3}I + \frac{1}{3}M\right) =$$
$$\ldots = \frac{2u_{-k} + 3v_{-k}}{3}I + \frac{u_{-k}}{3}M = u_{-k-1}I + v_{-k-1}M,$$

en donde hemos usado $M^2 = 3I - 2M$. Como $u_{-k-1} + v_{-k-1} = u_{-k} + v_{-k} = 1$, podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existen números reales u_n y v_n cuya suma es constante e igual a 1 tales que $M^n = u_nI + v_nM$.

4. Efectuando la división euclídea de x^n entre $x^2 + 2x - 3$ obtenemos:

$$x^n = (x^2 + 2x - 3)q(x) + \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Sustituyendo x por M en (2), obtenemos $M^n = \alpha M + \beta I$. Para determinar α, β sustituimos x por las raíces de $x^2 + 2x - 3$, es decir por 1 y por -3, obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelto, proporciona los valores:

$$\alpha = \frac{1 - (-3)^n}{4}, \quad \beta = \frac{3 + (-3)^n}{4}.$$

Obtenemos M^n en función de n:

$$M^n = \frac{1 - (-3)^n}{4}M + \frac{3 + (-3)^n}{4}I \quad (n \geq 0),$$

con lo cual quedan determinados u_n y v_n en función de n.

10.25. Un operador traspuesto en el espacio dual

Sea $E = \{p \in \mathbb{R}[x] : \text{gr } p < 5\}$, $F = \{p \in E : p(0) = p(1) = 0\}$, f el endomorfismo en E definido por:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \;\to\; a_0 + a_1x + (a_2 - a_4)x^2 - (a_1 + a_2 - a_4)x^3.$$

y g la restricción de f a F. Se pide:
1. Demostrar que F es un espacio vectorial y hallar una base B de F.
2. Demostrar que $f(F) \subset F$ y hallar la matriz de g respecto de B.
3. Determinar unas bases de $\ker g$ e $\operatorname{Im} g$.
4. Obtener la matriz g^t, operador traspuesto de g, respecto de la base dual de B, y hallar la imagen de $x^3 - x$ por la forma lineal $g^t(\phi)$ siendo ϕ el elemento de F^* definido por $\phi(p) = 2$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Dado que E es espacio vectorial y $F \subset E$, bastará demostrar que F es subespacio de E. Usamos una conocida caracterización de subespacios. (i) El polinomio nulo claramente pertenece a F. (ii) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $p, q \in F$, se verifica

$$\begin{cases} (\lambda p + \mu q)(0) = \lambda p(0) + \mu q(0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \\ (\lambda p + \mu q)(1) = \lambda p(1) + \mu q(1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Es decir, $\lambda p + \mu q \in F$. Concluimos que F es subespacio de E. Hallemos una base de F. Los polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ de F son los que cumplen $p(0) = p(1) = 0$. Por tanto:

$$p \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Tenemos así unas ecuaciones cartesianas de F respecto de la base canónica B_c de E. Su dimensión es

$$\dim F = \dim E - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 5 - 2 = 3.$$

Dando a las incógnitas libres a_2, a_3, a_4 los valores de las filas de la matriz identidad de orden 3, obtenemos una base de F expresada en coordenadas en B_c :

$$\{(0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1)\}.$$

En consecuencia, una base de F es $B = \{-x + x^2,\ -x + x,\ -x + x^4\}$.

2. Si un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ pertenece a F, entonces satisface las condiciones (1). El transformado de $p(x)$ por f es el polinomio

$$q(x) = a_0 + a_1 x + (a_2 - a_4)x^2 - (a_1 + a_2 - a_4)x^3.$$

Se verifica $q(0) = a_0 = 0,\ q(1) = 0$ lo cual implica que $f[p(x)] \in F$. Hemos demostrado que $f(F) \subset F$, en consecuencia está bien definida la restricción $g : F \to F$. De acuerdo con la definición de g :

$$\begin{cases} g(-x + x^2) = -x + x^2 \\ g(-x + x^3) = -x + x^3 \\ g(-x + x^4) = -x - x^2 + 2x^3 = -(-x + x^2) + 2(-x + x^3). \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz A pedida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. La expresión matricial de g en la base B es

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\ker g \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{matrix} \right.$$

La dimensión del núcleo es $\dim(\ker g) = \dim F - \text{rg}A = 3 - 2 = 1$. Dando a x_3 el valor 1 obtenemos una base de $\ker g$ en coordenadas con respecto de $B : \{(-2, -2, 1)\}$. Corresponde al vector de F :

$$-2(x - x^2) - 2(-x + x^3) + 1(-x + x^4) = -x + 2x^2 - 2x^3 + x^4.$$

Es decir, una base de $\ker g$ es $B_{\ker g} = \{-x + 2x^2 - 2x^3 + x^4\}$. El rango de A es 2, y sus dos primeras columnas son linealmente independientes, por tanto determinan una base de Im g en coordenadas en B. En consecuencia, una base de la imagen de g es $B_{\text{Im } g} = \{-x + x^2, -x + x^3\}$.

4. Por un conocido teorema, si M es la matriz de una aplicación lineal $h : V \to W$ en unas bases B_V y B_W, entonces la aplicación lineal traspuesta las bases $h^t : W^* \to V^*$ es M^t. En nuestro caso la matriz pedida es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por definición de aplicación lineal traspuesta, $g^t(\phi) = \phi \circ g$ en consecuencia $(g^t(\phi))(x^3 - x) = (\phi \circ g)(x^3 - x)$. Usando la expresión matricial de g deducimos inmediatamente que $g(x^3 - x) = x^3 - x$. Entonces,

$$(g^t(\phi))(x^3 - x) = \phi(x^3 - x) = 2^3 - 2 = 6.$$

10.26. Interpolación en el espacio dual

Sea V el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2. Se consideran las formas lineales $f_0, f_1, f_2 : V \to \mathbb{R}$ definidas por

$$< f_0, p(x) >= p(0),\ < f_1, p(x) >= p'(0),\ < f_2, p(x) >= p''(0).$$

Estas formas lineales son una base del espacio dual V^*.
1. Encontrar una base de V cuya dual sea la base $\{f_0, f_1, f_2\}$. Encontrar un polinomio $q(x)$ (de V) tal que $q(0) = 0!,\ q'(1) = 1!,\ q''(0) = 2!$.
2. Encontrar un polinomio $r(x)$ (de V) tal que

$$\begin{aligned} &r(0) = 0! \\ &r'(0) + r''(0) = 1! + 2! \\ &r(0) + r'(0) + r''(0) = 0! + 1! + 2!. \end{aligned}$$

¿Queda $r(x)$ determinado unívocamente por las condiciones anteriores? En V, se consideran las formas lineales $g_0, g_1, g_2 : V \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} &< g_0, p(x) >= p(0) \\ &< g_1, p(x) >= p'(0) + p''(0) \\ &< g_2, p(x) >= p(0) + p'(0) + p''(0). \end{aligned}$$

¿ Son una base de V^*?

Sea ahora E un espacio vectorial real de dimensión $n+1$ y $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$, $n+1$ formas lineales en E, $h_i : E \to \mathbb{R}$ y sean $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, $n+1$ números reales. Se denomina *problema de interpolación* al siguiente:
Encontrar un elemento v de E tal que

$$< h_0, v >= z_0,\ < h_1, v >= z_1,\ < h_2, v >= z_2,\ \ldots < h_n, v >= z_n$$

Así pues, los los problemas de los apartados 1. y 2. son problemas de interpolación.

3. Demostrar que una condición suficiente para que un problema de interpolación tenga solución y sea única, para cada conjunto de números $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ es que las formas lineales $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$ sean una base de E^*. *Indicación*: Expresar la posible solución en la base de E cuya dual es $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$.
4. ¿Esta condición es también necesaria? Dar una demostración o un contraejemplo.

En el espacio V de los apartados 1. y 2. se considera la base $s_0(x) = 1$, $s_1(x) = 1 + x$, $s_2(x) = 1 + x + x^2$.

5. Calcular los determinantes

$$\begin{vmatrix} < f_0, s_0 > & < f_1, s_0 > & < f_2, s_0 > \\ < f_0, s_1 > & < f_1, s_1 > & < f_2, s_1 > \\ < f_0, s_2 > & < f_1, s_2 > & < f_2, s_2 > \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} < g_0, s_0 > & < g_1, s_0 > & < g_2, s_0 > \\ < g_0, s_1 > & < g_1, s_1 > & < g_2, s_1 > \\ < g_0, s_2 > & < g_1, s_2 > & < g_2, s_2 > \end{vmatrix}.$$

En el espacio E del apartado 3. se considera una base $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente sobre el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} < h_0, e_0 > & \ldots & < h_n, e_0 > \\ \vdots & & \vdots \\ < h_0, e_n > & \ldots & < h_n, e_n > \end{vmatrix}$$

para que el problema de interpolación tenga solución única para cada conjunto de números $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Sea $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ la base de V cuya dual es $\{f_0, f_1, f_2\}$. Por definición de base dual se ha de verificar $< f_i, p_j(x) >= \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker). Llamando $p_0(x) = a + bx + cx^2$ tenemos

$$\begin{cases} < f_0, p_0(x) >= 1 \\ < f_1, p_0(x) >= 0 \\ < f_2, p_0(x) >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2c = 0. \end{cases}$$

Obtenemos pues $p_0(x) = 1$. Razonando de manera análoga para $p_1(x)$ y $p_2(x)$, obtenemos $p_1(x) = x$ y $p_2(x) = x^2/2$. Sea ahora $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, imponiendo las condiciones dadas obtenemos $\alpha = \beta = \gamma = 1$, es decir $q(x) = 1 + x + x^2$.

2. Sea $r(x) = A + Bx + Cx^2$. Entonces

$$\begin{cases} r(0) = 0! \\ r'(0) + r''(0) = 1! + 2! \\ r(0) + r'(0) + r''(0) = 0! + 1! + 2! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B + 2C = 3 \\ A + B + 2C = 4. \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $A = 1,\ B = 3 - 2\lambda,\ C = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. El sistema es indeterminado, por tanto $r(x)$ no está unívocamente determinado por las condiciones dadas. Para $\lambda = 0$ (por ejemplo) obtenemos uno de ellos: $r(x) = 1 + 3x$. Es claro que $g_2 = g_0 + g_1$ lo cual implica que $\{g_0, g_1, g_2\}$ no es sistema libre y por tanto no es base de V.

3. Supongamos que $B^* = \{h_0, \ldots, h_n\}$ es base de E^* y consideremos la base $B = \{u_0, \ldots, u_n\}$ de E cuya dual B^*. Consideremos el vector $v = z_0u_0 + \ldots + z_nu_n$. Entonces, por definición de base dual

$$\begin{cases} < h_0, v >=< h_0, z_0u_0 + \ldots + z_nu_n >= z_0 \\ \ldots \\ < h_n, v >=< h_n, z_0u_0 + \ldots + z_nu_n >= z_n. \end{cases}$$

Esto implica que el problema de interpolación tiene solución para cada conjunto de números $z_0, \ldots, z_n$. Además, es única pues si otro vector $u = \lambda_o u_0 + \ldots + \lambda u_n$ fuera solución, aplicando las condiciones $< h_i, u >= z_i$ obtenemos inmediatamente $\lambda_i = z_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$, es decir $u = v$.

4. Veamos que la condición también es necesaria. Supongamos que para todo conjunto de números $z_0, \ldots, z_n$, el problema de interpolación tiene solución. Dado que $\dim E^* = \dim E = n+1$, para demostrar que $\{h_0, \ldots, h_n\}$ es base de E^* basta demostrar que son linealmente independientes. Supongamos que

$$\lambda_0 h_0 + \ldots + \lambda_n h_n = 0.$$

Para todo $i = 0, \ldots, n$, elijamos $(z_0, \ldots, z_n) = Z_i$ en donde Z_i representa el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Por hipótesis existe un vector $v_i \in E$ tal que

$$< h_0, v_i >= 0, < h_1, v_i >= 0, \ldots, < h_i, v_i >= 1, \ldots, < h_n, v_i >= 0.$$

Entonces, $< \lambda_0 h_0 + \ldots + \lambda_n h_n, v_i >= \lambda_i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$, lo cual demuestra que $\{h_0, \ldots, h_n\}$ es base de E.

5. Tenemos

$$\begin{vmatrix} < f_0, s_0 > & < f_1, s_0 > & < f_2, s_0 > \\ < f_0, s_1 > & < f_1, s_1 > & < f_2, s_1 > \\ < f_0, s_2 > & < f_1, s_2 > & < f_2, s_2 > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} < g_0, s_0 > & < g_1, s_0 > & < g_2, s_0 > \\ < g_0, s_1 > & < g_1, s_1 > & < g_2, s_1 > \\ < g_0, s_2 > & < g_1, s_2 > & < g_2, s_2 > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Veamos que una condición necesaria y suficiente para que el problema de interpolación tenga solución única para cada conjunto de números $z_0, z_1, \ldots, z_n$ es que $\Delta \neq 0$. Como consecuencia de los apartados 3. y 4., basta demostrar que:

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow h_0, \ldots, h_n \text{ son linealmente independientes.}$$

$\Rightarrow$) Sea $\lambda_o h_0 + \ldots + \lambda_n h_n = 0$. Entonces

$$\left\{ \begin{matrix} < \lambda_0 h_0 + \ldots + \lambda_n h_n, e_0 >= 0 \\ \ldots \\ < \lambda_0 h_0 + \ldots + \lambda_n h_n, e_n >= 0 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_0 < h_0, e_0 > + \ldots + \lambda_n < h_n, e_0 >= 0 \\ \ldots \\ \lambda_0 < h_0, e_n > + \ldots + \lambda_n < h_n, e_n >= 0. \end{matrix} \right.$$

El determinante de la matriz del sistema homogéneo anterior es $\Delta \neq 0$, por tanto la única solución es $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$\Leftarrow$) Por reducción al absurdo. Si $\Delta \neq 0$, existe una columna combinación lineal de las demás. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que es la última. Dado que las aplicaciones lineales están determinadas conociendo los transformados de una base del espacio inicial, tenemos que h_n es de la forma $h_n = \mu_0 h_0 + \ldots + \mu_{n-1} h_{n-1}$ y $\{h_0, \ldots, h_n\}$ no es base de E^*.

10.27. Clasificación de una familia de endomorfismos

Se consideran los homomorfismos f_λ de un espacio vectorial real E de dimensión 3 definidos por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{matrix} f_\lambda(e_1) = e_1 + e_2 + \lambda e_3 \\ f_\lambda(e_2) = e_1 + \lambda e_2 + e_3 \\ f_\lambda(e_1) = e_1 + e_2 + \lambda^2 e_3. \end{matrix} \right.$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E.
1. Clasificar en función de λ los distintos endomorfismos f_λ indicando su naturaleza. Para aquellos f_λ que no sean automorfismos, definir la imagen y el núcleo. Para los que sean automorfismos, definir su inverso.
2. Dado el vector $b = e_1 + 2e_2 + e_3$ disentir la existencia o no de solución de la ecuación $f_\lambda(x) = b$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Caminos, UPM).

Solución. 1. Trasponiendo coeficientes obtenemos la matriz A_λ del endomorfismo f_λ respecto de la base B y la expresión matricial correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \end{bmatrix} \; , \; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A_\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Hallemos $\dim(\operatorname{Im} f_\lambda)$, es decir $\operatorname{rg}(A_\lambda)$. Efectuando las transformaciones por filas $F_2 - F_1, F_3 - \lambda F_1$ y luego $F_3 + F_2$ obtenemos la forma escalonada de la matriz A_λ :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Primer caso: $\lambda^2-\lambda=0$. Equivale a decir $\lambda=0$ o $\lambda=1$. Para $\lambda=0$ tenemos $\dim(\text{Im}f_0)=\text{rg}(A_0)=2$ y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f_0)=1$. Para $\lambda=1$ tenemos $\dim(\text{Im}f_1)=\text{rg}(A_1)=1$ y por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f)=2$.

Segundo caso: $\lambda^2-\lambda\neq 0$. Equivale a decir $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$. En este caso tenemos $\dim(\text{Im}f_\lambda)=\text{rg}(A_\lambda)=3$ y de nuevo, por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, $\dim(\ker f_\lambda)=0$. Es decir, en este segundo caso cada aplicación f_λ es inyectiva y sobre, por tanto isomorfismo. Al ser endomorfismo, es automorfismo.

Podemos pues concluir para la familia de endomorfismos dada, tenemos automorfismos exactamente para $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$. Definamos ahora el núcleo y la imagen en los casos que no son automorfismos. Usando la expresión matricial de f_λ obtenemos de forma inmediata unas ecuaciones cartesianas del núcleo y unas ecuaciones paramétricas de la imagen:

$$\ker(f_0)\equiv\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_3=0\\ x_2=0\end{cases}\quad \text{Im}(f_0)\equiv\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_1+x_3\\ y_3=x_2\end{cases}\quad (x_i\in\mathbb{R}),$$
$$\ker(f_1)\equiv\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\quad \text{Im}(f_1)\equiv\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_1+x_2+x_3\\ y_3=x_1+x_2+x_3\end{cases}\quad (x_i\in\mathbb{R}).$$

Ahora encontramos fácilmente unas bases de estos subespacios en coordenadas con respecto de la base B :

$$B_{\ker(f_0)}=\{(-1,0,1)\}\ ,\ B_{\text{Im}(f_0)}=\{(1,1,0),\ (1,0,1)\},$$
$$B_{\ker(f_1)}=\{(-1,1,0),\ (-1,0,1)\}\ ,\ B_{\text{Im}(f_1)}=\{(1,1,1)\}.$$

Es decir:

$$B_{\ker(f_0)}=\{-e_1+e_3\}\ ,\ B_{\text{Im}(f_0)}=\{e_1+e_2,\ e_1+e_3\},$$
$$B_{\ker(f_1)}=\{-e_1+e_2,\ -e_1+e_3\}\ ,\ B_{\text{Im}(f_1)}=\{e_1+e_2+e_3\}.$$

Por un conocido teorema, para cada automorfismo, es decir para cada $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ la matriz de su automorfismo inverso es $(A_\lambda)^{-1}$.

2. La existencia de soluciones de la ecuación $f_\lambda(x)=b$ equivale a la existencia de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\\lambda&1&\lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Efectuando las transformaciones por filas $F_2 - F_1, F_3 - \lambda F_1$ y luego $F_3 + F_2$ obtenemos la forma escalonada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda^2 - \lambda & 1 - \lambda \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda & 1 - \lambda \end{array}\right].$$

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, el sistema es compatible y determinado y por tanto la ecuación tiene solución única. Para $\lambda = 0$, el sistema es incompatible y la ecuación no tiene solución. Para $\lambda = 1$, el sistema es indeterminado y la ecuación tiene infinitas soluciones.

10.28. Dos aplicaciones lineales

Sea E el espacio vectorial de las funciones reales de una variable real que son indefinidamente derivables, con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por números reales. Se consideran en E las aplicaciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{D}$ definidas por

$$\mathcal{I}\left(f(x)\right) = \int_0^x f(t)\ dt, \quad \mathcal{D}\left(f(x)\right) = f'(x).$$

a) Demostrar que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{D}$ son aplicaciones lineales de E en E.
b) Determinar $\mathcal{D} \circ \mathcal{I} - \mathcal{I} \circ \mathcal{D}$.
c) Hallar $\ker\left(Id - \mathcal{I}\right)$ y $\ker\left(Id - \mathcal{D}\right)$, siendo Id la identidad en E.
d) ¿Existen la aplicación inversa de $Id - \mathcal{D}$?

Solución. a) Sea $f \in E$. Por el teorema fundamental del Cálculo,

$$\frac{d}{dx}\mathcal{I}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right) = f(x).$$

Como $f(x)$ es infinitamente derivable, también lo es $\mathcal{I}\left(f(x)\right)$, y por tanto $\mathcal{I}\left(f(x)\right) \in E$. Es decir, $\mathcal{I} : E \to E$ está bien definida. Veamos que es lineal. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $f, g \in E$:

$$\mathcal{I}(\lambda f + \mu g) = \int_0^x \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right)\ dt$$

$$= \lambda \int_0^x f(t)\ dt + \mu \int_0^x g(t)\ dt = \lambda\mathcal{I}(f) + \mu\mathcal{I}(g).$$

Si $f \in E$, es infinitamente derivable luego también lo es $f'(x)$, y por tanto $\mathcal{D}\left(f(x)\right) \in E$. Es decir, $\mathcal{D} : E \to E$ está bien definida. Veamos que es lineal. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $f, g \in E$:

$$\mathcal{D}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = (\lambda f(x) + \mu g(x))'$$

$$= \lambda f'(x) + \mu g'(x) = \lambda \mathcal{D}(f(x)) + \mu \mathcal{D}(g(x)).$$

$b)$ Para todo $f(x) \in E$:

$$(\mathcal{D} \circ \mathcal{I} - \mathcal{I} \circ \mathcal{D})\left(f(x)\right) = (\mathcal{D} \circ \mathcal{I})\left(f(x)\right) - (\mathcal{I} \circ \mathcal{D})\left(f(x)\right)$$

$$= \mathcal{D}\left[\mathcal{I}\left(f(x)\right)\right] - \mathcal{I}\left[\mathcal{D}\left(f(x)\right)\right] = \mathcal{D}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right) - \mathcal{I}\left(f'(x)\right)$$

$$= f(x) - \int_0^x f'(t)\ dt = f(x) - (f(x) - f(0)) = f(0).$$

En la última linea hemos aplicado la regla de Barrow.

$c)$ Tenemos:

$$f(x) \in \ker\left(Id - \mathcal{I}\right) \Leftrightarrow \left(Id - \mathcal{I}\right)\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \int_0^x f(t)\ dt = 0.$$

Derivando la última igualdad, obtenemos $f'(x) = f(x)$, y por un sencillo resultado de ecuaciones diferenciales, $f(x)$ es necesariamente de la forma $f(x) = ke^x$ con $k \in \mathbb{R}$. Ahora bien,

$$\left(Id - \mathcal{I}\right)\left(ke^x\right) = ke^x - \int_0^x ke^t\ dt = ke^x - k(e^x - 1) = k,$$

por tanto ha de ser $k = 0$. Concluimos que $\ker\left(Id - \mathcal{I}\right) = \{0\}$.

Hallemos ahora el otro núcleo. Tenemos:

$$f(x) \in \ker\left(Id - \mathcal{D}\right) \Leftrightarrow \left(Id - \mathcal{D}\right)\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f'(x) = 0,$$

y $f(x)$ es necesariamente de la forma $f(x) = ke^x$ con $k \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $f(x) = ke^x$, entonces $\left(Id - \mathcal{D}\right)\left(f(x)\right) = ke^x - ke^x = 0$ luego $f(x) \in \ker\left(Id - \mathcal{D}\right)$. Por tanto,

$$\ker\left(Id - \mathcal{D}\right) = \{f(x) = ke^x : k \in \mathbb{R}\}.$$

$d)$ Dado que $\ker(Id - \mathcal{D}) \neq \{0\}$, la aplicación $Id - \mathcal{D}$ no es inyectiva, luego no tiene inversa.

10.29. Endomorfismo en $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$

Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de los números complejos respecto del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Se considera la aplicación $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida para todo $z\in\mathbb{C}$ por $f(z)=uz$, en donde $u=1+i$ siendo i la unidad imaginaria.

1. Demostrar que f es una aplicación lineal.
2. Determinar la matriz asociada a f respecto de la base canónica $\{1,i\}$.
3. Determinar el núcleo y la imagen de f.
4. Determinar según el valor de n entero y positivo, la matriz de f^n respecto de la base canónica.
5. Determinar la dimensión del espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado por todas las aplicaciones lineales que son combinación lineal de las f^n, es decir del espacio vectorial $F=\{\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nf^n : a_n\in\mathbb{R}\}$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Para cualquier par de escalares $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y para cada par de vectores $z,w\in\mathbb{C}$ se verifica:

$$\begin{aligned}f(\lambda z+\mu w)&=u(\lambda z+\mu w)\\&=\lambda uz+\mu uw\\&=\lambda f(z)+\mu f(w).\end{aligned}$$

Es decir, f es lineal.

2. Hallando los transformados por f de la base canónica obtenemos la matriz A pedida:

$$\left\{\begin{matrix}f(1)=(1+i)1=1+i\\f(i)=(1+i)i=-1+i\end{matrix}\right.\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}.$$

3. Denotemos por $(x_1,x_2)^t\in\mathbb{R}^2$ a las coordenadas de un vector $z\in\mathbb{C}$ y por $(y_1,y_2)^t\in\mathbb{R}^2$ a las coordenadas de su transformado $f(z)$. Entonces

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\Rightarrow\ker f\equiv\left\{\begin{matrix}x_1-x_2=0\\x_1+x_2=0\end{matrix}\right.\Rightarrow x_1=x_2=0.$$

Es decir, $\ker f=\{0\}$. Usando el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales, tenemos $\dim C=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im}f$ o equivalentemente $\dim\operatorname{Im}\,f=2$ lo cual implica $\operatorname{Im}f=\mathbb{C}$.

4. La matriz de f^n respecto de la base canónica es A^n. Las primeras potencias son:

$$A^1=A,\ A^2=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}=-4I.$$

De lo cual deducimos

$$\left\{\begin{matrix} A^5 = -4A \\ A^6 = -4A^2 \\ A^7 = -4A^3 \\ A^8 = (-4)^2 I \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} A^9 = (-4)^2 A \\ A^{10} = (-4)^2 A^2 \\ A^{11} = (-4)^2 A^3 \\ A^{12} = (-4)^3 I \end{matrix}\right. \quad \cdots \quad \left\{\begin{matrix} A^{4k+1} = (-4)^k A \\ A^{4k+2} = (-4)^k A^2 \\ A^{4k+3} = (-4)^k A^3 \\ A^{4k} = (-4)^k I \end{matrix}\right.$$

para todo entero $k \geq 0$.

5. Fijada una base B en un espacio vectorial E de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sabemos que la aplicación entre el álgebra End E de los endomorfismos sobre E y el álgebra de matrices $\mathbb{K}^{n\times n}$ que asocia a cada endomorfismo $f \in$ End E su matriz con respecto a B, es un isomorfismo de álgebras. En consecuencia bastará hallar la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dado por $F_1 = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n A^n : a_n \in \mathbb{R}\}$.

De los resultados del apartado 4. deducimos que este espacio está generado por el sistema de vectores $\{I, A, A^3, A^3\}$, es decir por los vectores

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ A^3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Expresando estos vectores en coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tenemos

$$\dim F = \dim F_1 = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 2.$$

Capítulo 11

Valores y vectores propios

11.1. Concepto de valor y vector propio

1. Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Analizar cuales de los siguientes vectores son vectores propios de f

$$v = (1,1)^t,\ v = (-2,1)^t,\ w = (3,1)$$

2. Sea E el espacio vectorial

$$E = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \text{ es infinitamente derivable en } \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$, la función $v(t) = e^{at}$ es vector propio del endomorfismo

$$f : E \to E, \quad f\left(x(t)\right) = x'(t).$$

3. En el espacio vectorial real E de los vectores libres del plano se considera el endomorfismo f que rota cada vector $x \in E$ un ángulo $\theta = 90^0$. Demostrar que f no tiene vectores propios.

4. Sea $E \neq \{0\}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Hallar los valores y vectores propios de los endomorfismos
(a) $\mathbf{0} : E \to E,\ \mathbf{0}(x) = 0 \quad \forall x \in E$ (endomorfismo nulo).
(b) $I : E \to E,\ I(x) = x \quad \forall x \in E$ (endomorfismo identidad).

5. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Comprobar que $u = (1,1,1,1)^t$ y $v = (1,0,0,-1)^t$ son vectores propios de la matriz A.

6. Una matriz cuadrada A se dice que es involutiva si, y sólo si $A^2 = I$. Demostrar que si λ es valor propio de una matriz involutiva, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

7. Supongamos que x es un vector propio de un endomorfismo $f : E \to E$, asociado a un valor propio λ. Demostrar que para todo entero $n > 0$, x también es un vector propio de f^n correspondiente a λ^n.

Solución. 1. Vector u:

$f(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4u$, por tanto u es vector propio de f asociado al valor propio $\lambda = 4$.

Vector v :

$f(v) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1v$, es decir v es vector propio de f asociado al valor propio $\lambda = 1$.

Vector w :

$f(w) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, ahora bien,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 8/3 \text{ y } \lambda = 6.$$

No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaciendo las condiciones anteriores, luego w no es vector propio de f.

2. Para todo $a \in \mathbb{R}$ la función $v(t) = e^{at}$ es no nula y se verifica

$$f\left(v(t)\right) = v'(t) = ae^{at} = av(t).$$

Es decir, $v(t) = e^{at}$ es vector propio de f asociado al valor propio $\lambda = a$.

3. Si $x \in E$ es no nulo, entonces $f(x)$ es no nulo y está en distinta dirección que x. Esto implica que $f(x)$ no es proporcional a x o equivalentemente $f(x) \neq \lambda x$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, f no tiene ni valores ni vectores propios.

4. (a) Para todo $x \in E$ no nulo se verfica $\mathbf{0}(x) = 0 = 0x$, es decir todo vector no nulo de E es valor propio del endomorfismo nulo asociado al único valor propio $\lambda = 0$.

(b) Para todo $x \in E$ no nulo se verifca $I(x) = x = 1x$, es decir todo vector no nulo de E es valor propio del endomorfismo identidad asociado al único valor propio $\lambda = 1$.

5. Tenemos

$$Au = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b \\ a+3b \\ a+3b \\ a+3b \end{bmatrix} = (a+3b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Av = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 0 \\ 0 \\ b-a \end{bmatrix} = (a-b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, u es vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda = a+3b$, y v lo es correspondiente al $\lambda = a-b$

6. Si λ es valor propio de la matriz involutiva A, existe vector columna x no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Multiplicando por A :

$$A(Ax) = A(\lambda x) \Rightarrow A^2 x = \lambda(Ax) \Rightarrow Ix = \lambda(\lambda x) \Rightarrow x = \lambda^2 x$$

$$\Rightarrow \left(\lambda^2 - 1\right) x = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{x \neq 0} \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1.$$

7. Tenemos que demostrar que $f^n(x) = \lambda^n x$ para todo entero $n > 0$. Aplicamos el método de inducción.
Paso base. Por hipótesis, $f(x) = \lambda x$, es decir $f^1(x) = \lambda^1 x$ lo cual implica que la propiedad es cierta para $n = 1$.
Paso de inducción. Se la propiedad cierta para n. Veamos que es cierta para $n+1$. En efecto, usando la hipótesis de inducción y que f^n (composición de aplicaciones lineales) es lineal:

$$f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right) = f(\lambda^n x) = \lambda^n f(x) = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1} x.$$

La fórmula es cierta para $n+1$.

11.2. Primeras propiedades de los valores y vectores propios

1. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita n y $f : E \to E$ un endomorfismo. Demostrar que si B es una base de E formada por vectores propios de f, entonces la matriz de f en la base B es diagonal.

2. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : E \to E$ un endomorfismo. Sea λ valor propio de f. Demostrar que $V_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda x\}$ es subespacio vectorial de E.

3. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : E \to E$ un endomorfismo que admite m valores propios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Sea $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ en donde para cada $i = 1, \ldots, m$, x_i es vector propio asociado a λ_i. Demostrar que S es un sistema libre.

Solución. 1. Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de E formada por vectores propios de f. Por definición de vector propio, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ f(e_2) = \lambda_2 e_2 \\ \quad \ldots \\ f(e_n) = \lambda_n e_n. \end{cases}$$

Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz de f en B :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{(matriz diagonal).}$$

2. Un vector x de E pertenece a V_λ si y sólo si $f(x) = \lambda x$. Pero

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(f - \lambda I),$$

y el núcleo de toda aplicación lineal sabemos que es un subespacio del espacio inicial.

3. El resultado es cierto para $m = 1$. En efecto, como $x_1 \neq 0$ de la igualdad $\alpha_1 x_1 = 0$ se deduce $\alpha_1 = 0$, luego $S = \{x_1\}$ es un sistema libre. Sea cierta la propiedad para $m - 1$ y consideremos la igualdad

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_m = 0. \quad (1)$$

Aplicando f a ambos miembros:

$$\alpha_1\lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m x_m = 0. \quad (2)$$

Multiplicando la relación (1) por λ_1 :

$$\lambda_1\alpha_1 x_1 + \ldots + \lambda_1\alpha_m x_m = 0. \quad (3)$$

Restando a la igualdad (2) la (3) :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_m - \lambda_1)x_m = 0.$$

Por hipótesis de inducción, $\{x_2, \ldots, x_m\}$ es sistema libre, por tanto:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \ldots, \alpha_n(\lambda_m - \lambda_1) = 0.$$

Dado que los λ_i son distintos dos a dos, se verifica $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ para todo $i = 2, \ldots, m$, luego $\alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Sustituyendo en (1) obtenemos $\alpha_1 = 0$ y queda demostrada la propiedad para m.

11.3. Polinomio característico

1. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita n. Sea A la matriz de f respecto de una determinada base B de E. Demostrar que:
(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
(b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de f, entonces $x \in V_\lambda \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$ en donde X es el vector de coordenadas de x en la base B.

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ dos matrices semejantes. Demostrar que A y B tienen el mismo polinomio característico.

3. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\chi(\lambda)$ su polinomio característico. Demostrar que:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A \quad (\text{si } n = 2),$$
$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + (\text{traza } A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A \quad (\text{si } n = 3),$$

en donde A_{ii} representa el adjunto del elemento a_{ii} de la matriz A.

4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\chi(\lambda)$ su polinomio característico. Demostrar que

$$\chi(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\text{traza } A)\lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

5. Sea f un endomorfismo sobre un espacio vectorial E de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea λ_i valor propio de f. Demostrar que $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq$

$m(\lambda_i)$, en donde $m(\lambda_i)$ representa la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de f.

6. Sin efectuar previamente el producto, calcular el polinomio característico de la matriz AB, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Demostrar que una matriz cuadrada A y su traspuesta A^t tienen el mismo polinomio característico. ¿Tienen los mismos vectores propios?

8. Hallar el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

siendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ escalares.

9. Una matriz $A = [a_{ij}]$ cuadrada real de orden n se dice que es *matriz de Markov* si y sólo si todos sus elementos a_{ij} son mayores o iguales que 0 y la suma de las componentes de cada columna de A es 1. Demostrar que $\lambda = 1$ es valor propio de toda matriz de Markov.

Solución. 1. (a) $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de f si y sólo si existe un $x \in E$ no nulo tal que $f(x) = \lambda x$. Esto equivale a decir que existe un $x \in E$ no nulo tal que $(f - \lambda I)x = 0$, que a su vez equivale a decir que $\ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$. Dado que la matriz de $f - \lambda I$ en la base B es $A - \lambda I$, su rango no es máximo, que equivale a decir que $\det(A - \lambda I) = 0$.

(b) $x \in V_\lambda$ si y sólo si $(f - \lambda I)x = 0$. Como la matriz de $f - \lambda I$ en la base B es $A - \lambda I$, la condición $(f - \lambda I)x = 0$ equivale a $(A - \lambda I)X = 0$ en donde X es el vector de coordenadas de x en la base B.

2. Si A y B son matrices semejantes, existe $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces, usando conocidas propiedades de los determinantes:

$$\chi_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP| = |P^{-1}(A - \lambda I)P|$$

$$= |P^{-1}||A-\lambda I||P| = \frac{1}{|P|}|A-\lambda I||P| = |A-\lambda I| = \chi_A(\lambda).$$

Es decir, A y B tienen el mismo polinomio característico.

3. Una matriz genérica de orden 2×2 tiene la forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Su polinomio característico es:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = ad - d\lambda - a\lambda + \lambda^2 - cd$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cd = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A.$$

Una matriz genérica de orden 3×3 tiene la forma $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Aplicando la regla de Sarrus y agrupando términos semejantes en λ :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a+e+i)\lambda^2$$
$$-\left[(ei-hf)+(ai-cg)+(ae-db)\right]\lambda + aei + dhc + bfg - gec - hfa - dbi$$
$$= -\lambda^3 + (\text{traza } A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A.$$

4. Una matriz genérica de orden $n \times n$ es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

En cada término de un determinante aparece exactamente uno de cada fila y uno de cada columna. Un término es:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda). \quad (1)$$

Cualquier otro término es de grado $\leq n-2$ (por ejemplo, si interviniera a_{21} no intervendría ni $a_{11}-\lambda$ ni $a_{22}-\lambda$). En consecuencia los términos de grados n y $n-1$ solamente aparecen en (1). Ahora bien

$$\begin{aligned}&(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)=\\&(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots\ .\end{aligned}$$

Por otra parte, $\chi(0)=\det A$ con lo cual el término independiente de $\chi(\lambda)$ es $\det A$. Podemos concluir que:

$$\chi(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\text{traza } A)\lambda^{n-1}+\ldots+\det A.$$

5. Dado que $V_{\lambda_i}\neq\{0\}$, se verifica $\dim V_{\lambda_i}\geq 1$. Sea $m(\lambda_i)=k$ y supongamos que la multiplicidad $m(\lambda_i)$ fuera $k+1$. Por el teorema de la base incompleta se podría formar una base $\mathcal{B}$ de E eligiendo los $k+1$ primeros vectores de V_{λ_i}. En tal base la matriz de f tendría la forma por cajas

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_i I_{k+1} & M\\ 0 & N\end{bmatrix},$$

siendo I_{k+1} la matriz identidad de orden $k+1$. Ahora bien, el polinomio característico de A sería de la forma:

$$\chi(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{k+1}q(\lambda) \text{ con } q(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda],$$

por lo que λ_i sería raíz de multiplicidad mayor que k (contradicción). Concluimos pues que $1\leq\dim V_{\lambda_i}\leq m(\lambda_i)$.

6. La matriz AB es de orden 5×5. Si $Bx=0$ con $x\neq 0$ vector de $\mathbb{R}^5$, entonces $(AB)x=A(Bx)=0=0x$, luego x es vector propio de AB asociado al valor propio $\lambda=0$. La dimensión del subespacio de $Bx=0$ de $\mathbb{R}^5$ es $5-\text{rg } B=5-2=3$, por tanto $\lambda=0$ es valor propio al menos triple de AB. Por otra parte, BA es de orden 2×2. Si μ es valor propio de BA, existe $v\in\mathbb{R}^2$ no nulo tal que $(BA)v=\mu v$. Entonces,

$$BAv=\mu v\Rightarrow A(BA)v=A(\mu v)\Rightarrow(AB)(Av)=\mu(Av).$$

Es decir, μ es valor propio de AB si $Av\neq 0$. Operando obtenemos BA y sus valores propios

$$BA=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ \ |BA-\mu I|=\mu^2-7\mu+6=0\Leftrightarrow\mu_1=1,\mu_2=6 \text{ (simples)}.$$

Los correspondientes subespacios propios y unas bases de cada uno de ellos son

$$V_1\equiv\begin{cases}6x_1-3x_2=0\\ 2x_1-x_2=0,\end{cases}\quad B_1=\{v=(1,2)^T\},$$

$$V_6 \equiv \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0, \end{cases} \qquad B_6 = \{w = (3,1)^T\}.$$

Pero Av y Aw son no nulos, por tanto $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 6$ son valores propios de AB. Podemos concluir que el polinomio característico de AB es

$$\chi_{AB}(\lambda) = -\lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

7. Usando que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta y conocidas propiedades de la transposición:

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I|.$$

Es decir, A y A^t tienen el mismo polinomio característico y como consecuencia, los mismos valores propios. No es cierto en general que tienen los mismos vectores propios, tomemos por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tenemos:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por tanto $(1,0)^t$ es vector propio de A pero no de A^t.

8. El polinomio característico de A es

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - \lambda & \dots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Restando a todas las filas (a partir de la segunda) la primera:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_n \\ \lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Sumando a la primera fila todas las demás:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \lambda & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\chi(\lambda) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \lambda)(-\lambda)^{n-1}.$$

9. Que $\lambda = 1$ sea valor propio de una matriz A equivale a decir $|A - 1I| = 0$. Sea$A = [a_{ij}]$ matriz de Markov y hallemos $|A - 1I|$.

$$|A - 1I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix}.$$

Sumando a última fila la suma de todas las demás, queda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_{n1} + \ldots + a_{n1}) - 1 & (a_{11} + \ldots + a_{n2}) - 1 & \ldots & (a_{1n} + \ldots + a_{nn}) - 1 \end{vmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que la suma de las componentes de cada columna es 1 :

$$|A - 1I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $\lambda = 1$ es valor propio de A. Notemos que la condición de ser los elementos a_{ij} mayores o iguales que 0 no ha sido necesaria.

11.4. Cálculo de valores y vectores propios

1. Sea E un espacio vectorial real y $f : E \to E$ el endomorfismo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcular los valores propios de f.
(b) Determinar los subespacios propios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos.

2. Sea E un espacio vectorial real y $f : E \to E$ el endomorfiamo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcular los valores propios de f.
(b) Determinar los subespacios propios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos.

3. Sea E un espacio vectorial y $f : E \to E$ el endomorfismo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcular los valores propios de f, los subespacios propios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos en los casos:
(a) El cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$.
(b) El cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$.

4. Sea E un espacio vectorial real y $f : E \to E$ el endomorfiamo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcular los valores propios de f.
(b) Determinar los subespacios propios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos.

5. Sea $E = \mathbb{R}^{2\times 2}$ el espacio vectorial real de las matrices de orden 2. Se considera la aplicación

$$f : E \to E\ , \quad f(X) = X^t \text{ (traspuesta de } X).$$

(a) Demostrar que f es lineal.
(b) Hallar la matriz A de f con respecto a la base canónica de E.
(c) Calcular los autovalores de f, los autoespacios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos.

6. Determinar el endomorfismo h de $\mathbb{R}^3$ que verifica las dos condiciones siguientes

$i)$ Los subespacios $L[(1,0,1)]$ y el de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ son autoespacios (subespacios propios).
$ii)$ $h(0,0,1) = (1,0,1)$.

Solución. 1. (a) Valores propios de f :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 1 \text{ (simples)}.$$

(b) Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}, \quad V_1 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = 4$ valor propio simple, $\dim V_4 = 1$ y una base de V_4 (en coordenadas en B) es $\{(1,1)^t\}$. Por tanto, una base de V_4 es $B_{V_4} = \{u_1 + u_2\}$. Razonando análogamente obtenemos $B_{V_1} = \{-2u_1 + u_2\}$.

2. (a) Valores propios de f :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ (doble)}.$$

(b) Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

La dimensión de V_4 es $\dim V_4 = 2 - \text{rg}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$ y una base de V_4 en (coordenadas en B) es $\{(1,1)^t\}$. Por tanto, una base de V_4 es $B_{V_4} = \{u_1 + u_2\}$.

3. (a) Valores propios de f :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \text{ (simples)}.$$

Como las raíces del polinomio característico no son reales, se concluye que f no tiene valores propios y como consecuencia no tiene vectores propios.
(b) Los valores propios son $\lambda = \pm i$ (simples). Los subespacios propios son

$$V_i \equiv \begin{cases} (1-i)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1-i)x_2 = 0 \end{cases}, \quad V_{-i} \equiv \begin{cases} (1+i)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1+i)x_2 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = i$ valor propio simple, $\dim V_i = 1$ y una base de V_i (en coordenadas en B) es $\{(1, 1-i)^t\}$, por tanto una base de V_i es $B_{V_i} = \{u_1 + (1-i)u_2\}$.

Razonando análogamente obtenemos $B_{V_{-i}} = \{u_1 + (1+i)u_2\}$.

4. (a) Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ -2-\lambda & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

(hemos sumado a la primera columna la segunda y posteriormente hemos restado a la segunda fila la primera). Los valores propios son $\lambda = 4$ (simple) y $\lambda = -2$ (doble).

(b) Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}, \quad V_{-2} \equiv \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = 4$ valor propio simple, $\dim V_4 = 1$ y una base de V_4 (en coordenadas en B) es $\{(1,1,2)^t\}$. Por tanto, una base de V_4 es $B_{V_4} = \{u_1 + u_2 + 2u_3\}$. La dimensión de V_{-2} es

$$\dim V_{-2} = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

y una base de V_4 (en coordenadas en B) es $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Por tanto, una base de V_{-2} es $B_{V_{-2}} = \{u_1 + u_2, -u_1 + u_3\}$.

5. (a) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para todo $X, Y \in E$ y usando conocidas propiedades de la trasposición:

$$f(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)^t = \alpha X^t + \beta Y^t = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Es decir, f es lineal.

(b) Consideremos la base canónica $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de E :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallando los transformados de los elementos de B y trasponiendo coeficientes obtenemos la matriz A pedida:

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = u_3 \\ f(u_3) = u_2 \\ f(u_4) = u_4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)(\lambda-1)^3.$$

Los valores propios o autovalores son $\lambda = -1$ (simple) y $\lambda = 1$ (triple). Los autoespacios o subespacios propios son:

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}, \qquad V_1 \equiv \begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = -1$ valor propio simple, $\dim V_{-1} = 1$ y una base de V_{-1} (en coordenadas en B) es $\{(0,1,-1,0)^t\}$, por tanto una base de V_{-1} es

$$B_{V_{-1}} = \{u_2 - u_3\} = \{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

La dimensión de V_1 es $\dim V_1 = 4 - \text{rg }(A-I) = 4 - 1 = 3$ y una base de V_1 (en coordenadas en B) es $\{(1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$. Es decir,

$$B_{V_1} = \{u_1, u_2 + u_3, u_4\} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}.$$

6. Como $L[(1,0,1]$ es subespacio propio, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $h(1,0,1) = \lambda(1,0,1)$.
Una base del subespacio de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ es $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$, por tanto existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(1,1,0) = \mu(1,1,0), \quad h(-1,0,1) = \mu(-1,0,1).$$

Por otra parte,

$$\text{rg }\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3, \text{ i.e. } B = \{(1,0,1), (1,1,0), (-1,0,1)\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3,$$

y por tanto la matriz de h en B es $D = \text{diag}(\lambda, \mu, \mu)$. Usemos ahora la condición $ii)$ para determinar λ y μ

$$(0,0,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(-1,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 \qquad = 0 \\ \alpha_1 \qquad + \alpha_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1/2. \end{cases}$$

Las coordenadas de $(0,0,1)$ en B son por tanto $(1/2,0,1/2)$ y las de $(1,0,1)$ en B son evidentemente $(1,0,0)$ Entonces,

$$h(0,0,1) = (1,0,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, h es el endomorfismo cuya matriz en la base B es $D = \text{diag}\,(2,0,0)$.

11.5. Endomorfismos diagonalizables

1. Sea E un espacio vectorial real y $f : E \to E$ el endomorfismo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Estudiar si es diagonalizable.
(b) En caso afirmativo, encontrar una base de E formada por vectores propios de f y una matriz inverible P tal que $P^{-1}AP = D$ con D matriz diagonal de valores propios.

2. Sea E un espacio vectorial real y $f : E \to E$ el endomorfismo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Estudiar si es diagonalizable.
(b) En caso afirmativo, encontrar una base de E formada por vectores propios de f y una matriz inverible P tal que $P^{-1}AP = D$ con D matriz diagonal de valores propios.

3. Sea E un espacio vectorial y $f : E \to E$ el endomorfismo cuya matriz en una determinada base $B = \{u_1, u_2\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Demostrar que no es diagonalizable si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$.
(b) Demostrar que es diagonalizable si el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$, encontrar una base de E formada por vectores propios de f y una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$ con D matriz diagonal de valores propios.

4. Se considera la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que es diagonalizable en $\mathbb{R}$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A y una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$ con D matriz diagonal de valores propios.

5. Se considera la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$. Demostrar que no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

6. Se consideran las matrices reales:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para cada una de ellas, estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo hallar una matriz diagonal semejante y la correspondiente matriz de paso.

7. Se considera la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Demostrar que no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
(b) Demostrar que es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y hallar una matriz $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $P^{-1}AP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valores propios de A.

Solución. 1. (a) Valores propios de f :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 1 \text{ (simples)}.$$

Existen dos valores propios reales y simples, en consecuencia f es diagonalizable.
(b) Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \quad x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \qquad V_1 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Una base de V_4 (en coordenadas en B) es $\{(1,1)^t\}$. Por tanto, una base de V_4 es $B_{V_4} = \{u_1 + u_2\}$. Análogamente obtenemos $B_{V_1} = \{-2u_1 + u_2\}$. Una base de E formada por vectores propios de f es

$$B' = \{u_1 + u_2, -2u_1 + u_2\}.$$

La matriz P pedida es la matriz de cambio de B a B', es decir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y se verifica } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Valores propios de f :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ (doble)}.$$

Existen dos valores propios reales. Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \sim \{x_1 - x_2 = 0.$$

La dimensión de V_4 es $\dim V_4 = 2 - \operatorname{rg} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$, menor que la multiplicidad de $\lambda = 4$, por tanto f no es diagonalizable.
(b) No ha lugar.

3. (a) Valores propios de f :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \text{ (simples)}.$$

No existen dos valores propios reales. En consecuencia, f no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
(b) Existen dos valores propios complejos y además son simples, por tanto f es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Los subespacios propios son

$$V_i \equiv \begin{cases} (1-i)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1-i)x_2 = 0, \end{cases} \quad V_{-i} \equiv \begin{cases} (1+i)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1+i)x_2 = 0. \end{cases}$$

Una base de V_i (en coordenadas en B) es $\{(1,1-i)^t\}$, por tanto una base de V_i es $B_{V_i}=\{u_1+(1-i)u_2\}$. Análogamente obtenemos $B_{V_{-i}}=\{u_1+(1+i)u_2\}$. Una base de E formada por vectores propios de f es

$$B'=\{u_1+(1-i)u_2,u_1+(1+i)u_2\}.$$

La matriz P pedida es la matriz de cambio de B a B', es decir

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix},\ \text{y se verifica } P^{-1}AP=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}.$$

4. Valores propios de A:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -3 & 3\\ -2-\lambda & -5-\lambda & 3\\ 0 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -3 & 3\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 0 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)^2(4-\lambda)=0$$

(hemos sumado a la primera columna la segunda y posteriormente hemos restado a la segunda fila la primera). Los valores propios son por tanto $\lambda=4$ (simple), y $\lambda=-2$ (doble). La matriz A tiene tres valores reales en $\mathbb{R}$ (repetidos o no). Por otra parte la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda=4$ es 1 por ser $\lambda=4$ simple. La dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda=-2$ es

$$\dim V_{-2}=3-\text{rg }(A+2I)=3-\text{rg }\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{bmatrix}=3-1=2.$$

Por tanto, A tiene tres valores propios reales y la dimensión de cada subespacio propio coincide con la multiplicidad del correspondiente valor propio: A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Las ecuaciones de los subespacios propios son

$$V_4\equiv\begin{cases}-3x_1-3x_2+3x_3=0\\ 3x_1-9x_2+3x_3=0\\ 6x_1-6x_2=0,\end{cases}\qquad V_{-2}\equiv\begin{cases}3x_1-3x_2+3x_3=0\\ 3x_1-3x_2+3x_3=0\\ 6x_1-6x_2+6x_3=0,\end{cases}$$

y unas bases respectivas $B_4=\{(1,1,2)\}$ y $B_{-2}=\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Trasponiendo obtenemos la correspondiente matriz P:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \text{y se verifica } P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

5. Hallemos los valores propios de A. Para ello efectuamos la transformación $F_3 - F_2$ y a continuación $C_2 + C_3$:

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}2-\lambda & 6 & -15\\ 1 & 1-\lambda & -5\\ 1 & 2 & -6-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-\lambda & 6 & -15\\ 1 & 1+\lambda & -5\\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}2-\lambda & -9 & -15\\ 1 & -4+\lambda & -5\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -9\\ 1 & -4-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^3.\end{aligned}$$

El único valor propio de A es $\lambda = -1$ (triple), por tanto A tiene tres valores propios reales (repetidos o no). La dimensión del subespacio propio asociado es:

$$\dim V_{-1} = 3 - \text{rg } (A+I) = 3 - \text{rg } \begin{bmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

La dimensión es menor que la multiplicidad, por tanto A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$

6. Polinomio característico de M :

$$|M-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 3 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2.$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, ambos dobles. La matriz M tiene por tanto cuatro valores propios (repetidos o no). Los subespacios propios son:

$$V_1 \equiv \begin{cases}2x_1 = 0\\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\\ 4x_3 + x_4 = 0,\end{cases} \qquad V_2 \equiv \begin{cases}-x_1 = 0\\ 2x_1 - x_2 = 0\\ -x_1 + 3x_2 = 0\\ 4x_3 = 0.\end{cases}$$

La dimensión de V_1 es:

$$\dim V_1 = 4 - \text{rg } (M-I) = 4 - \text{rg } \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\end{bmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, es decir M no es diagonalizable. Polinomio característico de N :

$$|N-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2.$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, ambos dobles. La matriz N tiene por tanto cuatro valores propios (repetidos o no). Los subespacios propios son:

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad V_2 \equiv \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

La dimensión de V_1 es:

$$\dim V_1 = 4 - \operatorname{rg}\,(N-I) = 4 - \operatorname{rg}\,\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4-2 = 2.$$

La dimensión de V_2 es:

$$\dim V_2 = 4 - \operatorname{rg}\,(N-2I) = 4 - \operatorname{rg}\,\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4-2 = 2.$$

Para cada valor propio la dimensión coincide con la multiplicidad, luego N es diagonalizable. Unas bases de V_1 y V_2 son:

$$B_{V_1} = \{(1,0,1,-3)^t, (0,1,-1.-1)^t\},\ B_{V_2} = \{(0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}.$$

Por tanto, se verifica $P^{-1}AP = D$ siendo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Valores propios de A :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5.$$

Una raíz del polinomio característico es $\lambda = 1$. Usando la regla de Ruffini obtenemos:

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5).$$

Resolviendo la ecuación $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, obtenemos $\lambda = 2 \pm i$. En consecuencia, los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + i,\ \lambda_3 = 2 - i \text{ (simples)}.$$

La matriz A no tiene tres valores propios en $\mathbb{R}$ (repetidos o no), luego no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
(b) La matriz A tiene tres valores propios en $\mathbb{C}$ (repetidos o no). Además, al ser todos los valores propios simples, es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Subespacios propios:

$$V_{\lambda_1} \equiv \left\{\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \end{matrix}\right.$$

$$V_{\lambda_2} \equiv \left\{\begin{matrix} (1-i)x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 + (-5-i)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + (3-i)x_3 = 0, \end{matrix}\right. \quad V_{\lambda_3} \equiv \left\{\begin{matrix} (1+i)x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 + (-5+i)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + (3+i)x_3 = 0. \end{matrix}\right.$$

Unas bases respectivas son $B_1 = \{(1,2,1)^t\}$, $B_2 = \{(i, 1+i, 2)^t\}$ y $B_3 = \{(-i, 1-i, 2)^t\}$. Las matrices pedidas son por tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 2 & 1+i & 1-i \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \text{diag }(1, 2+i, 2-i)).$$

11.6. Potencia enésima de una matriz por diagonalización

1. Sea A una matriz cuadrada de orden m con elementos en un cuerpo $\mathbb{K}$ y diagonalizable. Deducir la fórmula para A^n en función de la correspondiente matriz diagonal y la matriz de paso.

2. Calcular la potencia enésima de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución. 1. Al ser A diagonalizable, sabemos que existe una matriz invertible $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ tal que $P^{-1}AP = D$ siendo $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ con λ_i los correspondientes valores propios de A. Despejando A obtenemos $A = PDP^{-1}$ y elevando a n:

$$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \ldots (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}.$$

2. Valores propios de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ -2-\lambda & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

(hemos sumado a la primera columna la segunda y posteriormente hemos restado a la segunda fila la primera). Los valores propios son por tanto $\lambda = 4$ (simple), y $\lambda = -2$ (doble). La matriz A tiene tres valores reales en $\mathbb{R}$ (repetidos o no). Por otra parte la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda = 4$ es 1 por ser $\lambda = 4$ simple. La dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda = -2$ es

$$\dim V_{-2} = 3 - \text{rg }(A+2I) = 3 - \text{rg }\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Por tanto, A tiene tres valores propios reales y la dimensión de cada subespacio propio coincide con la multiplicidad del correspondiente valor propio: A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Las ecuaciones de los subespacios propios son

$$V_4 \equiv \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0, \end{cases} \qquad V_{-2} \equiv \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

y unas bases respectivas $B_4 = \{(1,1,2)\}$ y $B_{-2} = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Trasponiendo obtenemos la correspondiente matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

en consecuencia

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \ldots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4^n + (-2)^n & -4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & -4^n + 3(-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 2\cdot 4^n - 2(-2)^n & -2\cdot 4^n + 2(-2)^n & 2\cdot 4^n \end{bmatrix}.$$

11.7. Teorema de Cayley-Hamilton

1. Verificar la validez del teorema de Cayley-Hamilton para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Usando el teorema de Cayley-Hamilton, expresar A^{-1} como combinación lineal de I y de A.

3. Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar su potencia enésima

(a) Por diagonalización.
(b) Usando el teorema de Cayley-Hamilton.

4. Dada la matriz real $A = \begin{bmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$, calcular $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} A^n$ (Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Polinomio característico de A :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Sustituyendo λ por A :

$$\chi(A) = A^2 - 4A + 5I = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. El polinomio característico de A es

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se verifica $A^2 - 7A + 6I = 0$, entonces

$$A^2 - 7A + 6I = 0 \Leftrightarrow A(A - 7I) = -6I \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{6}(A - 7I)\right) = I.$$

Por definición de matriz inversa se concluye que $A^{-1} = -\dfrac{1}{6}A + \dfrac{7}{6}I.$

3. (a) Valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 6.$$

Los valores propios son reales y simples, en consecuencia A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Subespacios propios:

$$V_1 \equiv \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \qquad V_6 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Unas bases respectivas son $B_{V_1} = \{(2, -3)\}$ y $B_{V_6} = \{(1, 1)\}$. Una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = D$ con $D = \text{diag }(1, 6)$ es por tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A^n es

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 + 3 \cdot 6^n & -2 + 2 \cdot 6^n \\ -3 + 3 \cdot 6^n & 3 + 2 \cdot 6^n \end{bmatrix}.$$

(b) Consideremos el polinomio $p(\lambda) = \lambda^n$. Efectuando la división euclídea de $p(\lambda)$ entre el polinomio característico de A obtenemos un cociente $c(\lambda)$ y un resto, que será de grado a lo sumo 1 y por tanto de la forma $r(\lambda) = a\lambda + b$. Queda por tanto:

$$\lambda^n = c(\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) + a\lambda + b. \quad (1)$$

Sustituyendo λ por A en (1) y teniendo en cuenta que $A^2 - 7A + 6I = 0$ (teorema de Cayley-Hamilton) queda:

$$A^n = aA + bI. \quad (2)$$

Para hallar los valores de a y b, sustituimos λ por cada valor propio en la igualdad (1):

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 6^n = 6a + b. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = \dfrac{1}{5}(6^n - 1)$, $b = \dfrac{1}{5}(6 - 6^n)$. Usando (2) :

$$A^n = \frac{1}{5}(6^n - 1) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(6 - 6^n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 + 3 \cdot 6^n & -2 + 2 \cdot 6^n \\ -3 + 3 \cdot 6^n & 3 + 2 \cdot 6^n \end{bmatrix}.$$

4. Polinomio característico de A:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

El único valor propio de la matriz es por tanto $\lambda = 1$ (doble). Fácilmente se comprueba que A no es diagonalizable. Usaremos el teorema de Cayley-Hamilton. Efectuando la división euclídea de λ^n entre $\chi(\lambda)$ obtenemos:

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + \alpha\lambda + \beta. \quad (1)$$

Sustituyendo λ por A en (1) y usando el teorema de Cayley-Hamilton

$$A^n = q(A)(\lambda - I)^2 + \alpha A + \beta I = q(A) \cdot 0 + \alpha A + \beta I = \alpha A + \beta. \quad (2)$$

Sustituyendo el valor propio $\lambda = 1$ en (1) obtenemos $1 = \alpha + \beta$. Derivando la igualdad (1): $n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 1)^2 + 2(\lambda - 1)q(\lambda) + \alpha$. Sustituyendo en esta ultima expresión de nuevo $\lambda = 1$ obtenemos $n = \alpha$, con lo cual $\beta = 1 - n$. Como consecuencia de (2):

$$A^n = nA + (1-n)I = n\begin{bmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} + (1-n)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15n + 1 & 25n \\ -9n & 15n + 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} A^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \begin{bmatrix} -15n + 1 & 25n \\ -9n & 15n + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 25 \\ -9 & 15 \end{bmatrix}.$$

11.8. Diagonalización según parámetros

1. Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales es diagonalizable en $\mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

2. Determinar los valores de α y β reales para los cuales es diagonalizable en $\mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

3. Determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales es diagonalizable en $\mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

4. Determinar los valores de m para los cuales no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & m & 8 \\ 2 & 8 & m \end{bmatrix}.$$

Solución. 1. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 2\alpha+4-\lambda & 1-\alpha & -2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 4-\alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2\alpha+4-\lambda)(4-\alpha-\lambda)(4-\alpha^2-\lambda). \end{aligned}$$

Los valores propios de A son por tanto $\lambda_1 = 2\alpha+4$, $\lambda_2 = 4-\alpha$ y $\lambda_3 = 4-\alpha^2$. Dado que los tres valores propios son reales, la matriz A será diagonalizable si y sólo si la dimensión da cada subespacio propio coincide con la multiplicidad del mismo. Determinemos que multiplicidades pueden aparecer.

Primer caso: $\lambda_1 = \lambda_2$. Entonces, $2\alpha+4 = 4-\alpha$ es decir $\alpha = 0$. En este caso el único valor propio es $\lambda_1 = 4$ (triple). La dimensión del subespacio propio V_4 asociado al valor propio 4 es:

$$\dim V_4 = 3 - \operatorname{rg}(A-4I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-1 = 2.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, por tanto A no es diagonalizable.

Segundo caso: $\lambda_1 = \lambda_3$. Entonces, $2\alpha+4 = 4-\alpha^2$ es decir $\alpha^2+2\alpha = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $\alpha = 0$ y $\alpha = -2$. El caso $\alpha = 0$ ya está estudiado. Para $\alpha = -2$ tenemos los valores propios $\lambda_1 = 0$ (doble) y $\lambda_2 = 6$ (simple). Por ser 6 valor propio simple, $\dim V_6 = 1$. Hallemos la dimensión de V_0 :

$$\dim V_0 = 3 - \operatorname{rg}(A-0I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-1 = 2.$$

La matriz es por tanto diagonalizable.

Tercer caso: $\lambda_2 = \lambda_3$. Entonces, $4-\alpha = 4-\alpha^2$ es decir $\alpha^2-\alpha = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. El caso $\alpha = 0$ ya está estudiado. Para $\alpha = 1$ tenemos los valores propios $\lambda_1 = 6$ (simple) y $\lambda_2 = 3$ (doble). Por ser 6 valor propio simple, $\dim V_6 = 1$. Hallemos la dimensión de V_3 :

$$\dim V_3 = 3 - \operatorname{rg}(A-3I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-1 = 2.$$

La matriz es diagonalizable.
Cuarto caso: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$. Es decir, los valores propios son distintos dos a dos. Esto ocurre para $\alpha \neq 0 \ \wedge \ \alpha \neq -2 \ \wedge \ \alpha \neq 1$. Los tres valores propios son simples, y en consecuencia A es diagonalizable.
De todos los casos analizados concluimos que A es diiagonalizable si y sólo si $\alpha \neq 0$.

2. Polinomio característico de A :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ 3 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(\alpha-\lambda).$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = \alpha$ (todos reales).
Primer caso: $\lambda_1 = \lambda_2$. Equivale a $5 = -1$, por tanto éste caso no ocurre.
Segundo caso: $\lambda_1 = \lambda_3$. Equivale a $5 = \alpha$. Los valores propios son 5 (doble) y -1 (simple). La dimensión de V_{-1} es 1 por ser -1 simple. La dimensión de V_5 es

$$\dim V_5 = 3 - \text{rg}\ (A - 5I) = 3 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & \beta \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, por tanto A no es diagonalizable.
Tercer caso: $\lambda_2 = \lambda_3$. Equivale a $-1 = \alpha$. Los valores propios son 5 (simple) y -1 (doble). La dimensión de V_5 es 1 por ser 5 simple. La dimensión de V_{-1} es

$$\dim V_{-1} = 3 - \text{rg}\ (A + I) = 3 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $\beta = 0$ tenemos $\dim V_{-1} = 3 - 1 = 2$ y A es diagonalizable. Si $\beta \neq 0$ tenemos $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1$ y A no es diagonalizable.
Podemos concluir:

$$\begin{aligned} (\alpha \neq 5) \wedge (\alpha \neq -1) &: \ \text{diagonalizable} \\ \alpha = 5 &: \ \text{no diagonalizable} \\ \alpha = -1 & \begin{cases} \beta = 0 : \ \text{diagonalizable} \\ \beta \neq 0 : \ \text{no diagonalizable.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(c-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = c.$$

Los valores propios son todos reales.
Primer caso: $c = 1$. En éste caso el único valor propio es $\lambda = 1$ (triple).

$$\dim V_1 = 3 - \text{rg }(A - I) = 3 - \text{rg }\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 3.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad y por tanto A no es diagonalizable.
Segundo caso: $c \neq 1$. En éste caso, los valores propios son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = c$ (simple). La dimensión de V_c es 1 por ser $\lambda = c$ simple.

$$\dim V_1 = 3 - \text{rg }(A - I) = 3 - \text{rg }\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix}.$$

Si $a = 0$, $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$ y por tanto, A es diagonalizable. Si $a \neq 0$, al ser $c - 1 \neq 0$ tenemos $\dim V_1 = 3 - 2 = 1$ y por tanto, A no es diagonalizable.
Podemos concluir:

$$A \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow (c \neq 1) \wedge (a = 0).$$

4. Sumando a la tercera fila la segunda y posteriormente, restando a la segunda columna la tercera::

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & m-\lambda & 8 \\ 2 & 8 & m-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & m-\lambda & 8 \\ 0 & m-\lambda+8 & m-\lambda+8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & m-\lambda-8 & 8 \\ 0 & 0 & m-\lambda+8 \end{vmatrix} = (m-\lambda-8)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & m-\lambda+8 \end{vmatrix}$$

$$= (m-\lambda-8)(m-\lambda+8)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = m-8) \vee (\lambda = m+8) \vee (\lambda = 1).$$

Todos los valores propios son reales.
Primer caso: $m - 8 = m + 8$. Equivale a decir $-8 = 8$, es decir éste caso no ocurre.

Segundo caso: $m - 8 = 1$. Equivale a $m = 9$ y los valores propios son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = 17$ (simple). La dimensión de V_{17} es 1 por ser $\lambda = 17$ simple.

$$\dim V_1 = 3 - \text{rg }(A - I) = 3 - \text{rg }\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

La matriz A no es diagonalizable.
Tercer caso: $m+8=1$. Equivale a $m=-7$ y los valores propios son $\lambda=1$ (doble) y $\lambda=-15$ (simple). La dimensión de V_{-15} es 1 por ser $\lambda=-15$ simple.

$$\dim V_1 = 3 - \text{rg } (A-I) = 3 - \text{rg } \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & 8 \\ 2 & 8 & -8 \end{bmatrix} = 3-2=1.$$

La matriz A no es diagonalizable.
Cuarto caso: los valores propios son distintos dos a dos. Equivale a $m \neq 9$ y $m \neq -7$. En éste caso al ser los valore propios simples, la matriz es diagonalizable. Podemos concluir que:

$$A \text{ no es diagonalizable} \Leftrightarrow (m=9) \vee (m=-7).$$

11.9. Suma y producto de valores propios

Se considera la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hallar la suma y el producto de sus valores propios sabiendo que es diagonalizable.

Solución. Por hipótesis, existe $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertible cumpliendo:

$$P^{-1}AP = D, \text{ con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los valores propios de A. Como A y D son semejantes tienen, según sabemos, la misma traza y el mismo determinante. Por tanto:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \text{traza } D = \text{traza } A = 5, \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det D = \det A = 71.$$

11.10. Valores propios del endomorfismo inverso

Sea λ un valor propio de un endomorfismo $f : E \to E$ invertible.
(a) Demostrar que $\lambda \neq 0$.
(b) Demostrar que $1/\lambda$ es valor propio de f^{-1}.

(c) Aplicación: se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar los valores y vectores propios de A^{-1}.

Solución. (a) Supongamos que fuera $\lambda = 0$. Entonces existiría un $x \in E$ no nulo tal que $f(x) = 0x = 0$. Es decir $\ker f$ no se reduciría al vector nulo y por tanto f no sería inyectiva. Esto es una contradicción pues f es invertible por hipótesis.

(b) Por hipótesis, existe $x \in E$ no nulo tal que $f(x) = \lambda x$. Aplicando f^{-1} a ambos miembros y teniendo en cuenta que f^{-1} es lineal:

$$f(x) = \lambda x \Rightarrow f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\lambda x\right) \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = \lambda f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow I(x) = \lambda f^{-1}(x) \Rightarrow x = \lambda f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x.$$

Es decir, $1/\lambda$ es valor propio de f^{-1} y además, los correspondientes vectores propios asociados a λ para f y $1/\lambda$ para f^{-1} coinciden.

(c) Como $\det A = -5 \neq 0$, A representa un endomorfismo invertible en $\mathbb{R}^2$ con respecto de la base canónica, y la matriz del endomorfismo inverso en tal base es justamente A^{-1}. Valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5 \vee \lambda_2 = -1 \text{ (simples).}$$

Subespacios propios de A :

$$V_{\lambda_1} \equiv \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0, \end{cases} \qquad V_{\lambda_2} \equiv \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Unas bases respectivas son $B_{V_{\lambda_1}} = \{(1,1)^t\}$ y $B_{V_{\lambda_2}} = \{(-1,1)^t\}$. Usando el apartado anterior, concluimos que los valores propios de A^{-1} son

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{5}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2} = -1,$$

y unas bases de los correspondientes subespacios propios son

$$B_{V_{\mu_1}} = \{(1,1)^t\}, \quad B_{V_{\mu_2}} = \{(-1,1)^t\}.$$

11.11. Diagonalización de un endomorfismo en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Sea $E = \mathbb{R}^{2\times 2}$ el espacio vectorial real de las matrices de orden 2. Se considera la aplicación

$$f : E \to E\ , \quad f(X) = X^t \text{ (traspuesta de } X).$$

(a) Demostrar que f es lineal.
(b) Hallar la matriz A de f con respecto a la base canónica de E.
(c) Calcular los autovalores de f, los autoespacios, sus dimensiones y una base de cada uno de ellos.

Solución. (a) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para todo $X, Y \in E$ y usando conocidas propiedades de la trasposición:

$$f(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)^t = \alpha X^t + \beta Y^t = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Es decir, f es lineal.

(b) Consideremos la base canónica $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de E :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallando los transformados de los elementos de B y trasponiendo coeficientes obtenemos la matriz A pedida:

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = u_3 \\ f(u_3) = u_2 \\ f(u_4) = u_4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (\lambda+1)(\lambda-1)^3.$$

Los valores propios o autovalores son $\lambda = -1$ (simple) y $\lambda = 1$ (triple). Los autoespacios o subespacios propios son:

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}, \qquad V_1 \equiv \begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = -1$ valor propio simple, $\dim V_{-1} = 1$ y una base de V_{-1} (en coordenadas en B) es $\{(0,1,-1,0)^t\}$, por tanto una base de V_{-1} es

$$B_{V_{-1}} = \{u_2 - u_3\} = \{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

La dimensión de V_1 es $\dim V_1 = 4 - \text{rg}\,(A - I) = 4 - 1 = 3$ y una base de V_1 (en coordenadas en B) es $\{(1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$. Es decir,

$$B_{V_1} = \{u_1, u_2 + u_3, u_4\} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}.$$

11.12. Diagonalización de un endomorfismo en $\mathbb{R}_2[x]$

Se considera el endomorfismo T en $\mathbb{R}_2[x]$ definido por

$$T\,(p(x)) = p(x+1) + (x+1)p'(x+1).$$

1) Hallar la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$
2) Demostrar que T es diagonalizable.
3) Hallar una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que lo diagonaliza y la matriz diagonal D de T en dicha base.
4) Encontrar una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = D$.

Solución. 1) Hallemos los transformados de los elementos de la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$:

$$T(1) = 1 + (x+1)\cdot 0 = 1 = 1, T(x) = (x+1) + (x+1)\cdot 1 = 2 + 2x,$$

$$T(x^2) = (x+1)^2 + (x+1)\cdot 2(x+1) = 3 + 6x + 3x^2.$$

Transponiendo, obtenemos la matriz A de T en la base B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \text{ (simples)}.$$

El polinomio característico tiene 3 raíces en $\mathbb{R}$ y la dimensión de cada subespacio propio es 1 por ser todos los valores propios simples, por tanto T es diagonalizable.

3) Los subespacios propios y unas respectivas bases (en coordenadas en B), son

$$V_1 \equiv \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad B_{V_1} = \{(1, 0, 0)\}$$

$$V_2 \equiv \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad B_{V_2} = \{(2, 1, 0)\}$$

$$V_3 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}, \quad B_{V_2} = \{(15, 12, 2)\}$$

En consecuencia, una base B' que diagonaliza a T es:

$$B' = \{1,\ 2 + x,\ 15 + 12x + 2x^2\},$$

y la matriz de T en B' es $D = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$.

4) Una matriz P que satisface $P^{-1}AP = D$, sabemos que es la matriz de cambio de base de la B a la B', esto es,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.13. Valores propios de una matriz nilpotente

Sea A matriz cuadrada nilpotente, es decir existe un entero positivo m tal que $A^m = 0$. Se pide:
(a) Demostrar que $\lambda = 0$ es valor propio de A.
(b) Demostrar que $\lambda = 0$ es el único valor propio de A.

Solución. (a) Existe m entero positivo tal que $A^m = 0$. Tomando determinantes queda $|A^m| = |A|^m = 0$, por tanto $|A| = 0$. Entonces, $|A - 0I| = 0$ lo cual implica que $\lambda = 0$ es valor propio de A.

(b) Si λ valor propio de A, existe un vector columna x no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Ahora bien,

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x,$$

$$A^3x = A(A^2x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 Ax = \lambda^3 x, \dots$$

Deducimos inmediatamente por inducción que $A^m x = \lambda^m x$. Pero $A^m = 0$ con lo cual queda $\lambda^m x = 0$ con $x \neq 0$. Esto implica $\lambda^m = 0$, luego $\lambda = 0$.

11.14. Logaritmo de una matriz

Sean:
(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
(ii) $\mathcal{S}$ el conjunto formado por todas las matrices de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que son diagonalizables y tienen todos los valores propios mayores que cero.
(iii) La función $\log : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ que cumple las propiedades:

a) Si $D = \operatorname{diag}(a, b, c)$ entonces $\log D = \operatorname{diag}(\log a, \log b, \log c)$.
b) Si $M, N \in \mathcal{S}$, $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con P invertible y $M = P^{-1}NP$ entonces $\log M = P^{-1}(\log N)P$.

Se pide:
1. Estudiar si $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3\times 3}$. 2. Comprobar que $A \in \mathcal{S}$.
3. Calcular $\log A$.
4. Estudiar si se verifica la igualdad $\log(MN) = \log M + \log N$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

Solución. *Observación previa*: Aunque no se pide explícitamente, demostremos que la función log dada está bien definida. En efecto, para $D = \operatorname{diag}(a, b, c)$ con a, b, c positivos, existen $\log a, \log b, \log c$ y pertenecen a $\mathbb{R}$. Por tanto existe $\log D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Sea ahora una matriz $A \in \mathcal{S}$ cualquiera. Entonces, existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertible tal que $P^{-1}AP = D$ y por la hipótesis b) será $\log D = P^{-1}(\log A)P$ o bien $\log A = P(\log D)P^{-1}$. Tenemos que demostrar que $\log A$ no depende de la elección de P. En efecto, supongamos que $A = QDQ^{-1}$, tenemos:

$$A = QDQ^{-1} \Rightarrow PDQ^{-1} = QDQ^{-1} \Rightarrow D = P^{-1}AP = P^{-1}QDQ^{-1}P =$$
$$(Q^{-1}P)^{-1}D(Q^{-1}P) \Rightarrow \text{ (por b) } \log D = (Q^{-1}P)^{-1}(\log D)(Q^{-1}P) =$$
$$P^{-1}Q(\log D)Q^{-1}P \Rightarrow P(\log D)P^{-1} = Q(\log D)Q^{-1}.$$

1. La matriz 0 de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ es diagonalizable (ella misma es diagonal) con valor propio $\lambda = 0$ (triple). En consecuencia, $0 \notin \mathcal{S}$ y por tanto $\mathcal{S}$ no es subespacio

de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

2. Polinomio característico de A :

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & -2\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=-(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Los valores propios de A son $\lambda_1=2$ (doble) y $\lambda_2=1$ (simple). La dimensión de $\ker(A-\lambda_2 I)$ es 1 por ser λ_1 simple. La dimensión de $\ker(A-\lambda_1 I)$ es:

$$\dim(\ker(A-2I))=3-\operatorname{rg}\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=3-1=2.$$

La matriz A es por tanto diagonalizable con matriz diagonal $D=\operatorname{diag}(2,2,1)$ y como consecuencia, $A\in\mathcal{S}$.

3. Hallemos bases de los subespacios propios:

$$\ker(A-2I)\equiv\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\ker(A-I)\equiv\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Unas bases respectivas son $B_2=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, $B_1=\{(2,-1,0)\}$. Por tanto, una matriz P tal que $P^{-1}AP=D$ es:

$$P=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

y la matriz $\log A=P(\log D)P^{-1}$ es:

$$\log A=P\begin{bmatrix}\log 2 & 0 & 0\\ 0 & \log 2 & 0\\ 0 & 0 & \log 1\end{bmatrix}P^{-1}=\ldots=\begin{bmatrix}-\log 2 & -2\log 2 & -2\log 2\\ \log 2 & 2\log 2 & \log 2\\ 0 & 0 & \log 2\end{bmatrix}.$$

4. Dadas $M,N\in\mathcal{S}$ para que se verifique la igualdad $\log(MN)=\log M+\log N$ es necesario que $MN\in\mathcal{S}$. Veamos que esto no siempre ocurre. En efecto, consideremos por ejemplo las matrices:

$$M=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

La matriz M pertenece a $\mathcal{S}$ y la matriz N la hemos elegido de tal manera que tenga el mismo polinomio característico que M, es decir $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. Es fácil comprobar que $N \in \mathcal{S}$, sin embargo la matriz

$$MN = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

no es diagonalizable como fácilmente se comprueba. Es decir, $MN \notin \mathcal{S}$ y por tanto no es cierto en general que $\log(MN) = \log M + \log N$.

11.15. Un determinante por recurrencia

Sea $n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $D_n = |A_n|$. En todo lo que sigue supondremos la existencia de $p, q \in \mathbb{R}$ tales que si $n > 2$, $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$. Se pide:

1. Si $q = 0$, hallar D_n en función de p, n, D_2.
2. Si $q \neq 0$ y r, s son las raíces que suponemos distintas de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, hallar D_n en función de D_1, D_2, r, s, n.
3. Si $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ hallar $|A_5^{-1}|$ cuando $p = 2, q = 0$.
4. Calcular el determinante de la matriz: $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{bmatrix}^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Para $q = 0$ tenemos:

$$\begin{gathered} D_3 = pD_2 \\ D_4 = pD_3 = p(pD_2) = p^2 D_2 \\ D_5 = pD_4 = p(p^2 D_2) = p^3 D_2 \\ \dots \end{gathered}$$

Se deduce inmediatamente por inducción que $D_n = p^{n-2} D_2$ si $n > 2$.

2. La relación $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Llamando $X_k = \begin{bmatrix} D_k & D_{k-1} \end{bmatrix}^t$ obtenemos:

$$X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = M^3X_{n-3} = \ldots = M^{n-2}X_2 = M^{n-2}X_2.$$

Es decir, obtenemos la relación:

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix}.$$

Hallemos M^{n-2} por diagonalización. Valores propios de M:

$$\det(M - xI) = \det \begin{bmatrix} p-x & q \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 - px - q,$$

cuyas raíces son por hipótesis r, s con $r \neq s$ lo cual asegura que M es diagonalizable. Los subespacios propios son:

$$\ker(M - rI) \equiv \begin{bmatrix} p-r & q \\ 1 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\ker(M - sI) \equiv \begin{bmatrix} p-s & q \\ 1 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Unas bases son $B_r = \{(r,1)\}$, $B_s = \{(s,1)\}$ respectivamente. Se verifica pues:

$$M = PDP^{-1} \text{ con } D = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = PD^{n-2}P^{-1} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{n-2} & 0 \\ 0 & s^{n-2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{r-s} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ -1 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{r-s} \begin{bmatrix} (r^{n-1} - s^{n-1})D_2 + rs(s^{n-2} - r^{n-2}D_1) \\ (r^{n-2} - s^{n-2})D_2 + rs(s^{n-3} - r^{n-3}D_1) \end{bmatrix}.$$

Queda por tanto:

$$D_n = \frac{(r^{n-1} - s^{n-1})D_2 + rs(s^{n-2} - r^{n-2})D_1}{r-s}. \quad (1)$$

3. Por el apartado 1 tenemos $D_5 = p^3 D_2$, en consecuencia:

$$\left|A_5^{-1}\right| = \frac{1}{|A_5|} = \frac{1}{D_5} = \frac{1}{p^3 D_2} = \frac{1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}.$$

4. El determinante pedido es el cuadrado del determinante D_n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna obtenemos $D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2}$. Es decir, estamos en el caso del apartado 2 con $p = 7, q = 10$. Las raíces de $x^2 - 7x + 10 = 0$ son $r = 5, s = 2$. Teniendo en cuenta que $D_2 = 39, D_1 = 7$ y sustituyendo en (1):

$$D_n = \frac{1}{3}\left[39(5^{n-1} - 2^{n-1}) + 70(2^{n-2} - 5^{n-2})\right].$$

y la solución es D_n^2.

11.16. Diagonalización en un espacio complejo

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. En el espacio vectorial $\mathbb{C}_n[z]$ sobre $\mathbb{C}$ de los polinomios complejos de grado menor o igual que n se considera la aplicación:

$$f_n : \mathbb{C}_n[z] \to \mathbb{C}_n[z], \quad f_n[p(z)] = (1+z)^n p\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

1. Estudiar la linealidad de f_n.
2. Obtener $f_n(p_k)$ siendo $p_k(z) = (1+z)^k$ con $0 \le k \le n$. Determinar $f_n \circ f_n$.
3. Calcular los polinomios característico y mínimo así como los valores propios de f_3.
4. Determinar los subespacios propios de f_3. ¿Es diagonalizable f_3?

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Veamos que f_n está bien definida. Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \in \mathbb{C}_n[z]$ de grado $d \le n$, entonces:

$$f_n[p(z)] = (1+z)^n p\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = (1+z)^n \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{d} a_k (1-z)^k (1+z)^{n-k} \in \mathbb{C}_n[z].$$

Veamos que f_n es lineal. En efecto, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y para todo $p(z), q(z) \in \mathbb{C}_n[z]$ tenemos:

$$\begin{aligned}
f_n[\lambda p(z)+\mu q(z)] = (1+z)^n(\lambda p+\mu q)\left(\frac{1-z}{1+z}\right) =\\
(1+z)^n\left(\lambda p\left(\frac{1-z}{1+z}\right)+\mu q\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right) =\\
\lambda(1+z)^n p\left(\frac{1-z}{1+z}\right)+\mu(1+z)^n q\left(\frac{1-z}{1+z}\right) =\\
\lambda f_n[p(z)]+\mu f_n[q(z)].
\end{aligned}$$

2. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f_n[p_k(z)] = (1+z)^n p_k\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = (1+z)^n\left(1+\frac{1-z}{1+z}\right)^k =\\
(1+z)^n\cdot\frac{2^k}{(1+z)^k} = 2^k(1+z)^{n-k} = 2^k p_{n-k}(z).
\end{aligned}$$

Determinemos $f_n\circ f_n$:

$$\begin{aligned}
(f_n\circ f_n)[p(z)] = f_n[f_n(p(z))] = f_n\left[(1+z)^n p\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right] =\\
(1+z)^n\left(1+\frac{1-z}{1+z}\right)^n p\left(\frac{1-((1-z)/(1+z))}{1+((1-z)/(1+z))}\right) =\\
(1+z)^n\cdot\frac{2^n}{(1+z)^n}\cdot p(z) = 2^n p(z) = 2^n I[p(z)] \Rightarrow f_n\circ f_n = 2^n I.
\end{aligned}$$

3. Una base de $\mathbb{C}_3[z]$ es:

$$B=\left\{p_0(z)=1, p_1(z)=1+z, p_2(z)=(1+z)^2, p_3(z)=(1+z)^3\right\}.$$

Según el apartado 2:

$$f_3(p_0)=p_3,\ f_3(p_1)=2p_2,\ f_3(p_2)=2^2p_1,\ f_3(p_3)=2^3p_0.$$

La matriz de f_3 en B es por tanto:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&8\\0&0&4&0\\0&2&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es:

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&8\\0&-\lambda&4&0\\0&2&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&4&0\\2&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}0&-\lambda&4\\0&2&-\lambda\\1&0&0\end{vmatrix} =\\
\lambda^2(\lambda^2-8)-8(\lambda^2-8)=(\lambda^2-8)^2=(\lambda+2\sqrt{2})^2(\lambda-2\sqrt{2})^2.
\end{aligned}$$

Los valores propios de f_3 son $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -2\sqrt{2}$ (dobles). El polinomio mínimo $\mu(\lambda)$ de f_3 tiene que dividir a $\chi(\lambda)$ y tener los mismos factores irreducibles. El de menor grado que cumple esto es $p(\lambda) = (\lambda-2\sqrt{2})(\lambda+2\sqrt{2}) = \lambda^2-8$. Ahora bien, por el apartado 2, tenemos $f_3 \circ f_3 = 2^3 I$ o bien $f_3^2 - 8I = 0$. Esto implica que $p(f_3) = 0$ y por tanto el polinomio mímimo de f_3 es $\mu(\lambda) = (\lambda - 2\sqrt{2})(\lambda + 2\sqrt{2})$.

4. Dado que $(f_3 - \lambda_1 I)(f_3 - \lambda_2 I) = 0$ siendo λ_1, λ_2 los diferentes valores propios de f_3 , se concluye que este endomorfismo es diagonalizable por aplicación de un conocido teorema. Hallemos los subespacios propios:

$$V_1 = \ker(f_3 - \lambda_1 I) \equiv \begin{bmatrix} -\sqrt{8} & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -\sqrt{8} & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{8} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$V_2 = \ker(f_3 - \lambda_2 I) \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 & 8 \\ 0 & \sqrt{8} & 4 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{8} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos sendas bases de V_1 y V_2 :

$$B_1 = \left\{(2\sqrt{2}, 0, 0, 1), (0, \sqrt{2}, 1, 0)\right\}, \quad B_2 = \left\{(-2\sqrt{2}, 0, 0, 1), (0, -\sqrt{2}, 1, 0)\right\},$$

bases que están expresadas en coordenadas en $B = \{p_0(z), p_1(z), p_2(z), p_3(z)\}$, en consecuencia unas bases de los subespacios propios son:

$$B_1 = \left\{2\sqrt{2} + p_3(z), \sqrt{2}p_1(z) + p_2(z)\right\},$$
$$B_2 = \left\{-2\sqrt{2} + p_3(z), -\sqrt{2}p_1(z) + p_2(z)\right\}.$$

11.17. Límite de una sucesión matricial

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es A. Se sabe que $f(2, -1) = (1, -1)$ y que $f(1, -2) = (2, -4)$.

1. Determinar A.
2. Hallar los valores y vectores propios de f.
3. Calcular una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal y comprobar el resultado.
4. Hallar el límite de la sucesión matricial

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3^2}A^2 + \ldots + \frac{1}{3^n}A^n \right).$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales de la UPM).

Solución. 1. Denominemos por $B_c = \{e_1, e_2\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces, de los datos y teniendo en cuenta que f es lineal:

$$\begin{cases} f(2e_1 - e_2) = e_1 - e_2 \\ f(e_1 - 2e_2) = 2e_1 - 4e_2 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} 2f(e_1) - f(e_2) = e_1 - e_2 \\ f(e_1) - 2f(e_2) = 2e_1 - 4e_2. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $f(e_1) = \frac{2}{3}e_2, f(e_2) = -e_1 + \frac{7}{3}e_2$ y trasponiendo coeficientes: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$.

2. Valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{7}{3}\lambda + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = \frac{1}{3} \text{ (simples)}.$$

Subespacios propios:

$$\ker(A - 2I) \equiv \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0, \end{cases} \quad \ker(A - \tfrac{1}{3}I) \equiv \begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Como ambos valores propios son simples, la dimensión de sus subespacios propios es 1, y unas bases respectivas de éstos son $B_2 = \{(1, -2)\}$ y $B_{1/3} = \{(3, -1)\}$.

3. La matriz de f en la base $B = \{(1, -2), (3, -1)\}$ es $D = \operatorname{diag}(2, 1/3)$ y la matriz de cambio de la base canónica a la B es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia se verifica $P^{-1}AP = D$ o de forma equivalente $AP = PD$. Comprobemos el resultado:

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4. De la relación $P^{-1}AP = D$ se deduce $A = PDP^{-1}$ y por tanto $A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$. La expresión E_n bajo el límite la podemos escribir en la forma:

$$E_n = I + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3^2}A^2 + \ldots + \frac{1}{3^n}A^n$$
$$= PIP^{-1} + \frac{1}{3}PDP^{-1} + \frac{1}{3^2}PD^2P^{-1} + \ldots + \frac{1}{3^n}PD^nP^{-1}$$

$$= P\left(I + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3^2}D^2 + \ldots + \frac{1}{3^n}D^n\right)P^{-1}$$
$$= P\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} + \frac{1}{3^2}\begin{bmatrix}2^2 & 0\\0 & \frac{1}{3^2}\end{bmatrix} + \ldots + \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix}2^n & 0\\0 & \frac{1}{3^n}\end{bmatrix}\right)P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix}1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0\\ 0 & 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n}}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} & 0\\ 0 & \dfrac{\frac{1}{9^{n+1}} - 1}{\frac{1}{9} - 1}\end{bmatrix}P^{-1},$$

en donde hemos aplicado la conocida fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica. Teniendo en cuenta que si $|a| < 1$ entonces $a^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que las matrices P y P^{-1} son constantes (no dependen de n), el límite pedido es:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = P \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} & 0\\ 0 & \dfrac{\frac{1}{9^{n+1}} - 1}{\frac{1}{9} - 1}\end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & \frac{9}{8}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & \frac{9}{8}\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -3\\2 & 1\end{bmatrix} = \frac{3}{40}\begin{bmatrix}10 & -33\\10 & 51\end{bmatrix}.$$

11.18. Modelo de poblaciones

Una ciudad A es de tránsito, estimándose que de los habitantes que tiene al principio de cada año, al final del mismo han emigrado $2/3$ a una cierta región geográfica B y $1/3$ a otra región C. Por otra parte y durante ese mismo año, $1/3$ de la población de B y $1/3$ de la población de C se establece en A. Calcular las poblaciones en régimen estacionario, es decir al final de n años con $n \to \infty$, sabiendo que en un determinado año las poblaciones de A, B y C eran respectivamente $60, 200$ y 300.

Solución. Denotemos $X_k = (x_{kA}, x_{kB}, x_{kC})^t$ siendo x_{kA}, x_{kB} y x_{kC} las poblaciones de A, B y C respectivamente al principio del año k. De los datos proporcionados:

$$\begin{cases} x_{k+1,A} = -\frac{2}{3}x_{k,A} - \frac{1}{3}x_{k,A} + \frac{1}{3}x_{k,B} + \frac{1}{3}x_{k,C} + x_{k,A}\\ x_{k+1,B} = \frac{2}{3}x_{k,A} - \frac{1}{3}x_{k,B} + x_{kB}\\ x_{k+1,C} = \frac{1}{3}x_{k,A} - \frac{1}{3}x_{k,C} + x_{kC}.\end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1,A} \\ x_{k+1,B} \\ x_{k+1,C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k,A} \\ x_{k,B} \\ x_{k,C} \end{bmatrix} \text{ o bien } X_{k+1} = AX_k.$$

Por tanto $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = A^3X_{n-3} = \ldots = A^nX_0$. Llamemos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

De $A = (1/3)M$ se deduce que $A^n = (1/3)^nM^n$. Para hallar los autovalores de M restamos en $|M-\lambda I|$ a la tercera columna la segunda y posteriormente sumamos a la segunda fila la tercera.

$$\begin{aligned} |M-\lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 3 \ \vee \ \lambda = -1 \text{ (simples)}. \end{aligned}$$

Los respectivos autoespacios y una base de cada uno de ellos son :

$$V_2 \equiv \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases} \qquad B_{V_2} = \{(0. -1, 1)^t\}.$$

$$V_3 \equiv \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases} \qquad B_{V_3} = \{(1, 2, 1)^t\}.$$

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0, \end{cases} \qquad B_{V_{-1}} = \{(-3, 2, 1)^t\}.$$

La matriz M es diagonalizable y una matriz P tal que $P^{-1}MP = D = \text{diag }(2, 3, -1)$ es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la conocida fórmula de la potencia enésima de una matriz diagonalizable:

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3^n} M^n X_0 = \frac{1}{3^n} P D^n P^{-1} X_0.$$

Teniendo en cuenta que P y P^{-1} son constantes (no dependen de n):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} X_n &= P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n\right) P^{-1} X_0 \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{diag}\left((2/3)^n, 1, (-1/3)^n\right)\right) P^{-1} X_0 \\ &= P \operatorname{diag}(0,1,0)\, P^{-1} X_0.\end{aligned}$$

Para el estado inicial $X_0 = (60, 200, 300)$:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 280 \\ 140 \end{bmatrix}.$$

Es decir, cuando el tiempo aumenta la tendencia de las poblaciones de A, B y C son respectivamente $140, 280$ y 140.

11.19. Endomorfismo con modelo matemático

Sea f el endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix},$$

y sean $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0\}$, $R_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 + x_2 = k\}$ con $k \in \mathbb{R}$. Se pide:
1. Comprobar que C_1 es f-invariante. Idem para cada R_k.
2. Comprobar que R_0 es un subespacio propio de f. Determinar los valores propios y los subespacios propio de f.
3. Determinar A^n para cada n natural y $\lim_{n\to\infty} A^n$.
4. La restricción de f a $C_1 \cap R_1$ sirve de modelo para el siguiente sistema:

En una autopista de dos carriles, la probabilidad de que un coche esté en el carril i en el instante n habiendo estado en el carril j en el instante anterior $n-1$ es a_{ij}. Si x_{in} es la probabilidad de que un coche se encuentre en el carril i en el instante n y $s_n = (x_{1n}, x_{2n})^t$ representa el estado de la autopista en el instante n, se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ que $s_{n+1} = f(s_n)$.
Determinar:
(a) Si existen estados estacionarios (es decir si existen s_e tales que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ s_n = s_e$) y calcularlos en su caso.
(b) s_n en función de n y s_0.
(c) Si existe $\lim_{n\to\infty} s_n$ para cada s_0, y calcularlo en su caso.
(d) El carril que tenderá a estar más ocupado al crecer n.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Para todo $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ hallemos su transformado $y = (y_1, y_2)^t$ por medio de f

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/4 + x_2/2 \\ 3x_1/4 + x_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Para todo $x \in C_1$ tenemos $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$ y para todo $x \in R_k$, $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = k$ por tanto $f(C_1) \subset C_1$ y $f(R_k) \subset R_k$. Es decir, C_1 y R_k son f-invariantes.

2. Los vectores $x = (x_1, x_2)^t$ de R_0 son los vectores de la forma $(\alpha, -\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y para estos vectores se verifica $A(\alpha, -\alpha)^t = (-\alpha/4, \alpha/4) = (-1/4)(\alpha, -\alpha)^t$. Esto implica que los vectores de R_0 son propios asociados al valor propio $-1/4$. Hallemos todos los valores propios

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \ \vee\ \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

Los valores propios de f son por tanto $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1/4$ (ambos simples). Hallemos una base de cada uno de los subespacios propios

$$\ker(A - 1I) \equiv \begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \ \ \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ \ \ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \equiv \left\{ 3x_1 - 2x_2 = 0. \right.$$

$$\ker(A + (1/4)I) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \equiv \left\{ x_1 + x_2 = 0 \equiv R_0. \right.$$

Unas bases respectivas son $B_1 = \{(2, 3)\}$ y $B_{1/4} = \{(-1, 1)\}$.

3. El endomorfismo f es diagonalizable y por tanto:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la conocida fórmula para el cálculo de la potencia enésima de una matriz diagonalizable

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/4)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$\ldots = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 + 3(-1/4)^n & 2 - 2(-1/4)^n \\ 3 - 3(-1/4)^n & 3 + 2(-1/4)^n \end{bmatrix}.$$

Cuando $n \to \infty$ se verifica $(-1/4)^n \to 0$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. (a) De la hipótesis $s_{n+1} = f(s_n)$ deducimos

$$s_{n+1} = As_n = A^2 s_{n-1} = A^3 s_{n-2} = \ldots = A^{n+1} s_0.$$

Si s_e es estado estado estacionario, necesariamente se ha de cumplir $s_{e+1} = s_e$ o bien $A^{e+1}s_0 = A^e s_0$. Como A es invertible, esto implica $As_0 = s_0$, es decir s_0 ha de ser vector propio asociado al valor propio 1 o bien $s_0 = \alpha(2,3)$. Dado que $s_0 \in C_1 \cap R_1$ se ha de verificar $2\alpha \geq 0, 3\alpha \geq 0$ y $2\alpha + 3\alpha = 1$. Esto se verifica solamente si $\alpha = 1/5$. Concluimos pues que si existen estados estacionarios, necesariamente ha de ser $s_0 = (2/5, 3/5)^t$.
Por otra parte, para este s_0, $s_n = A^{n-1}s_0 = A^{n-2}s_0 = \ldots = As_0 = s_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $s_0 = (2/5, 3/5)^t$ es el único estado estacionario.
(b) Tenemos que $s_n = A^{n-1}s_0$ con $s_0 = (x_{10}, x_{20})^t$ un vector genérico cumpliendo $x_{10} \geq 0,\ x_{20} \geq 0$ y $x_{10} + x_{20} = 1$ y la matriz A^{n-1} ya está calculada. Basta sustituir.
(c) Teniendo en cuenta que $x_{10} + x_{20} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} A^{n-1}s_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(d) Cuando $n \to \infty$ la probabilidad de que un coche ocupe el carril 1 tiende a $2/5$ y de que ocupe el carril 2 tiende a $3/5$. Esto significa que al crecer n el carril 2 tenderá a estar más ocupado.

11.20. Endomorfismo idempotente

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : E \to E$ un endomorfismo idempotente es decir, que cumple $f^2 = f$.
1. Demostrar que $E = \ker f \oplus \text{Im} f$.
2. Demostrar que si f no es inyectiva entonces $\ker f$ es subespacio propio asociado a f y si $f \neq 0$, $\text{Im} f$ es subespacio propio asociado a f.
3. Supongamos ahora que $\dim E = n$ finita. Demostrar que f es diagonalizable. Determinar una base $\mathcal{B}$ de E formada por vectores propios de f y hallar la matriz diagonal D correspondiente.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Montes, UPM).

Solución. 1. (a) Si $x \in \ker f \cap \text{Im} f$ entonces $x \in \ker f$ y $x \in \text{Im} f$. Es decir, $f(x) = 0$ y $\exists u \in E : x = f(u)$. Pero $f(x) = f^2(u) = f(u)$ por ser f idempotente. Es decir, $x = f(u) = f(x) = 0$. Hemos demostrado pues que $\ker f \cap \text{Im} f = \{0\}$.

(b) Sea $x \in E$. Por definición de imagen, tenemos $f(x) \in \text{Im} f$. Por otra parte $x = (x - f(x)) + f(x)$. Ahora bien $f\left(x - f(x)\right) = f(x) - f^2(x) =$

$f(x) - f(x) = 0$ es decir, $(x - f(x)) \in \ker f$, con lo cual $E = \ker f + \text{Im} f$. Concluimos pues que $E = \ker f \oplus \text{Im} f$.

2. f no es inyectiva equivale a decir que existe $0 \neq v \in E$ tal que $f(v) = 0 = 0v$. Esto implica que $\lambda_1 = 0$ es valor propio del endomorfismo f . El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $V_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}$ que es precisamente la definición de $\ker f$. Es decir, $V_0 = \ker f$.
La condición $f \neq 0$ equivale a decir que $\text{Im} f \neq \{0\}$. Existe por tanto $0 \neq w \in \text{Im} f$ tal que w es de la forma $w = f(x)$. Como f es nilpotente

$$f(w) = f[f(x)] = f^2(x) = f(x) = w = 1w.$$

Es decir, $\lambda_2 = 1$ es valor propio del endomorfismo f. Entonces el subespacio propio asociado es $V_1 = \{x \in E : f(x) = x\}$. Por lo ya visto, $\text{Im} f \subset V_1$ y por otra parte si $x \in V_1$ se verifica $x = f(x)$ es decir $x \in \text{Im} f$. Se concluye que $\text{Im} f = V_1$.

3. *Caso 1.* Supongamos que f no es inyectiva y $f \neq 0$ entonces $\dim(\ker f) = r > 0$ y $\dim(\text{Im} f) = n - r > 0$. Sea $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_r\}$ base de $\ker f$ y $\mathcal{B}_2 = \{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ base de $\text{Im} f$. Como $E = \ker f \oplus \text{Im} f$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es base de E. Además se verifica

$$f(e_1) = 0e_1, \ \ldots \ , \ f(e_r) = 0e_r, \ f(e_{r+1}) = 1e_{r+1}, \ \ldots \ , \ f(e_n) = 1e_n.$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz de f con respecto a la base $\mathcal{B}$: $D = \text{diag}\ (0, \ldots, 0, 1 \ldots, 1.)$ es decir f es diagonalizable.

Caso 2. Si f es inyectiva, por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales se concluye que también es sobreyectiva, es decir f es un isomorfismo. De la igualdad $f^2 = f$ se deduce componiendo con f^{-1} que $f = I_E$ y la matriz de f respecto de cualquier base de E es $I = \text{diag}\ (1, 1, \ldots, 1)$: f es diagonalizable.

Caso 3. Si $f = 0$ la matriz de f respecto de cualquier base de E es la matriz nula $0 = \text{diag}\ (0, 0, \ldots, 0)$: f es diagonalizable.

11.21. Límite de sucesión de puntos diagonalizando en $\mathbb{C}$

Se consideran tres puntos p_1, p_2, p_3 sobre la recta real y se construye una sucesión del siguiente modo: p_4 es el punto medio del segmento $\overline{p_1 p_2}$, p_5 es el punto medio de $\overline{p_2 p_3}$, p_6 es el punto medio de $\overline{p_3 p_4}$ y así sucesivamente.

Se desea conocer el límite de esta sucesión, para ello se pide:

1. Expresar p_{k+3} en función de p_k y p_{k+1}. Hallar una matriz A de tal manera que si $x_k = (p_k, p_{k+1}, p_{k+2})^t$, se cumpla $x_{k+1} = Ax_k$. Obtener una expresión que determine x_k como función de A, k y x_1, y demostrar que esta expresión es cierta $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calcular el polinomio característico y los valores propios de A en $\mathbb{C}$. Justificar por qué A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{R}$, e indicar una matriz diagonal semejante a ella.
3. Demostrar que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de una matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ y $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es vector propio de M correspondiente a λ, entonces $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ es un vector propio de M asociado a $\bar{\lambda}$. Hallar $T \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $T^{-1}AT$ sea la matriz indicada en el apartado anterior.
4. Calcular en función de p_1, p_2 y p_3, $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} p_n$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Por definición de la sucesión, p_{k+3} es el punto medio de p_k y p_{k+1}, en consecuencia $p_{k+3} = (p_k + p_{k+1})/2$. Podemos por tanto escribir:

$$p_{k+1} = p_{k+1}, \quad p_{k+2} = p_{k+2}, \quad p_{k+3} = (1/2)p_k + (1/2)p_{k+1}.$$

Estas igualdades son equivalentes a la igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ p_{k+2} \\ p_{k+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ p_{k+2} \end{bmatrix}.$$

De forma equivalente, $x_{k+1} = Ax_k$. Podemos escribir:

$$x_k = Ax_{k-1} = A^2x_{k-2} = A^3x_{k-3} = \ldots = A^{k-1}x_1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*).$$

2. Valores propios de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (1/2)\lambda + (1/2) = 0.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = (-1+i)/2, \lambda_3 = (-1-i)/2$. Existe al menos un valor propio que no es real, por tanto la matriz no es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Al ser los tres valores propios complejos y simples se puede asegurar que es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Una matriz diagonal semejante a A es por tanto $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de M entonces existe un vector $z \in \mathbb{C}^n$ con $z \neq 0$ tal que $Mz = \lambda z$. Tomando conjugados y teniendo en cuenta que $\overline{M} = M$, obtenemos $M\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$ lo cual implica que $\bar{z}$ es vector propio de M correspondiente a $\bar{\lambda}$. Determinemos los subespacios propios de A :

$$\ker(A - \lambda_1 I) \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como λ_1 es simple, $\dim \ker(A - \lambda_1 I) = 1$ y una base B_1 estará formada por un vector no nulo solución del sistema anterior, por ejemplo $B_1 = \{(1, 1, 1)\}$.

$$\ker(A - \lambda_2 I) \equiv \begin{bmatrix} (1-i)/2 & 1 & 0 \\ 0 & (1-i)/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & (1-i)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como λ_2 es simple, $\dim \ker(A - \lambda_1 I) = 1$ y una base B_2 estará formada por un vector no nulo solución del sistema anterior, por ejemplo $B_2 = \{(2, -1 + i, -i)\}$.

Como $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, por lo demostrado en este mismo apartado, una base de $\ker(A - \lambda_3 I)$ se obtendrá conjugando el vector obtenido anteriormente, es decir $B_3 = \{(2, -1 - i, i\}$. Transponiendo las coordenadas de los tres vectores hallados, obtenemos la matriz T:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 + i & -1 - i \\ 1 & -i & i \end{bmatrix}.$$

4. De la igualdad $T^{-1}AT = D$ se deduce $A = TDT^{-1}$ y $A^{n-1} = TD^{n-1}T^{-1}$. Por lo demostrado en el apartado 1. tenemos $x_n = A^{n-1}x_1$ o bien $x_n = TD^{n-1}T^{-1}x_1$. Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (TD^{n-1}T^{-1}x_1) = T\left(\lim_{n\to\infty} D^{n-1}\right) T^{-1}x_1.$$

Dado que $\lambda_1 = 1$ y que $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}/2 < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} D^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \lambda_3^{n-1}) = \operatorname{diag}(1, 0, 0).$$

Por otra parte:

$$T^{-1} = \ldots = \frac{1}{10i} \begin{bmatrix} 2i & 4i & 4i \\ 1 + 2i & 2 - i & -3 - 3i \\ -1 + 2i & -2 - i & 3 - i \end{bmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \ldots = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} p_1 + 2p_2 + 2p_3 \\ p_1 + 2p_2 + 2p_3 \\ p_1 + 2p_2 + 2p_3 \end{bmatrix}.$$

Como $x_n = (p_n, p_{n+1}, p_{n+2})^t$, concluimos que la sucesión dada $(p_n)_1^\infty$ tiene por límite:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{p_1 + 2p_2 + 2p_3}{5}.$$

11.22. Valor propio y asíntota horizontal

Se considera el espacio vectorial

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua y } \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}\},$$

es decir la grafica de f tiene una asíntota horizontal para $x \to +\infty$.
Se define la aplicación $T : E \to E$ de la forma $T(f)(x) = f(x+1)$.
(a) Demostrar que T es lineal.
(b) Demostrar que $\lambda = 1$ es valor propio de T.
(c) Demostrar que el subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ está formado exactamente por las funciones constantes.

Solución. (a) Para todo par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para cada par de funciones $f, g \in E$ y aplicando las conocidas definiciones de operaciones entre funciones, se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(x+1) = (\alpha f)(x+1) + (\beta g)(x+1)$$

$$= \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x) = (\alpha T(f) + \beta T(g))\,(x).$$

De la definición de igualdad de funciones deducimos que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$, es decir T es lineal.

(b) La función $h(x) = 1$ es continua, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1 \in \mathbb{R}$, es decir $h \in E$ y además es no nula. Tenemos:

$$T(h)(x) = h(x+1) = 1 = h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow T(h) = h = 1h \;\; (h \neq 0),$$

por tanto, $\lambda = 1$ es valor propio de T.

(c) Sea f función constante, es decir $f(x) = c \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Razonando como en el apartado anterior:

$$T(f)(x) = f(x+1) = c = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow T(f) = f = 1f$$

lo cual implica que f pertenece al subespacio propio V_1 asociado a $\lambda = 1$. Recíprocamente, sea $f \in V_1$, entonces $Tf = f$ o equivalentemente $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función es periódica de periodo 1 y por tanto $f(x+n) = f(x)$ para todo n natural. Si f no fuera constante existirían números reales x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_1 + n) = \lim_{x\to+\infty} f(x_1) = f(x_1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_2 + n) = \lim_{x\to+\infty} f(x_2) = f(x_2).$$

Esto implicaría que no existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ lo cual es absurdo. Concluimos que V_1 está formado exactamente por las funciones constantes.

11.23. Coseno de una matriz

Calcular $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}A\right)$ siendo $A = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. Industriales, UPM).

Solución. Podemos expresar $\dfrac{\pi}{4}A = \dfrac{\pi}{12}B$, siendo $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Hallemos los valores y vectores propios de B

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ -2 & -3-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ -4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-3)(\lambda+3)^2 = 0.$$

Los valores propios de B son $\lambda_1 = 3$ simple y $\lambda_2 = -3$ doble. Los subespacios propios son

$$V_{\lambda_1} \equiv \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \qquad V_{\lambda_2} \equiv \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Hallando unas bases de estos subespacios obtenemos respectivamente

$$B_{\lambda_1} = \{(1,1,-1)^t\} \quad , \quad B_{\lambda_2} = \{(-1,1,0)^t, (-1,0,1)^t\}.$$

La matriz B es por tanto diagonalizable y además

$$P^{-1}BP = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ si } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como consecuencia

$$B = PDP^{-1} \Rightarrow \frac{\pi}{4}A = \frac{\pi}{12}PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} \pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi/4 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Es decir, la matriz $(\pi/4)A$ es diagonalizable y la función $f(x) = \cos x$ toma sus valores en el espectro de $(\pi/4)A$, por tanto

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}A\right) = P \cdot \cos \begin{bmatrix} \pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi/4 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}I\right)P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}I.$$

11.24. Matrices componentes

Se considera la matriz real $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
(a) Calcular sus matrices componentes.
(b) Como aplicación, calcular $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A.

Solución. Recordamos el siguiente teorema:

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de polinomio mínimo $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$. Entonces, existen matrices A_{ik} con $i = 1, 2 \ldots, s,\ k = 0, 1, \ldots, m_i - 1$ tales que para toda función $f : \Omega \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que existe $f(A)$ es decir $\exists f^{(k)}(\lambda_i)$ con $i = 1, 2 \ldots, s,\ k = 0, 1, \ldots, m_i - 1$ se verifica

$$f(A) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i)A_{ik}.$$

A las matrices A_{ik} se las llama matrices componentes de A.

(a) El polinomio mínimo de la matriz A es $\mu(\lambda) = (\lambda - 4)^2$. Es decir $\lambda_1 = 4$ es el único valor propio de A, las matrices componentes de A son $A_{10},\ A_{11}$ y para toda función f para la cual exista $f(A)$ (es decir, existen $f(4)$ y $f'(4)$) se verifica:

$$f(A) = f(4)A_{10} + f'(4)A_{11}.\ \ (*)$$

Para hallar las matrices componentes elegimos las funciones polinómicas (siempre están definidas) $f(\lambda) = 1$, $f(\lambda) = \lambda$ y aplicamos la fórmula $(*)$ lo cual nos conduce al sistema matricial:

$$\begin{cases} I = A_{10} \\ A = 4A_{10} + A_{11}, \end{cases}$$

que resuelto proporciona

$$A_{10} = I \ , \ A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ y usando $f'(\lambda) = 1/(2\sqrt{\lambda})$ obtenemos:

$$f(A) = \sqrt{A} = 2A_{10} + \frac{1}{4}A_{11} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda) = 1/\lambda$ y usando $f'(\lambda) = -1/\lambda^2$ obtenemos:

$$f(A) = \frac{1}{A} = A^{-1} = \frac{1}{4}A_{10} - \frac{1}{16}A_{11} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda) = e^{\lambda}$ y usando $f'(\lambda) = e^{\lambda}$ obtenemos:

$$f(A) = e^{A} = e^{4}A_{10} + e^{4}A_{11} = e^{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 12

Formas canónicas de Jordan

12.1. Bloques de Jordan

1. Comprobar que la siguiente matriz es nilpotente de orden 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Hallar A^n siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Calcular A^n, siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución. 1. Tenemos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, A es nilpotente de orden 4.

2. Tenemos $A = 3I + N$ con I la matriz identidad y $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ N^3 = N^4 = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} A^n &= (3I+N)^n = \binom{n}{0}(3I)^n + \binom{n}{1}(3I)^{n-1}N + \binom{n}{2}(3I)^{n-2}N^2 + \cdots \\ &= 3^n I + n3^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n3^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. La matriz A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ con } A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

por tanto la matriz A^n es $A^n = \begin{bmatrix} A_1^n & 1 \\ 0 & A_2^n \end{bmatrix}$. La matriz A_1^n se calculó en el ejercicio anterior:

$$A_1^n = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Usamos la fórmula del binomio de Newton para hallar A_2^n. Denotando

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{aligned}
A_2^n &= (-I+N)^n = \binom{n}{0}(-I)^n + \binom{n}{1}(-I)^{n-1}N + \binom{n}{2}(-I)^{n-2}N^2 + \cdots \\
&= (-1)^n I + n(-1)^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & (-1)^{n-2}n(n-1)/2 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Queda por tanto

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n & (-1)^{n-2}n(n-1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

12.2. Polinomio mínimo

1. Hallar el polinomio mínimo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

2. Hallar el polinomio mínimo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

3. Hallar el polinomio mínimo del endomorfismo derivación D en $\mathbb{R}_4[x]$.

4. Sea $p(x) = x^3 - 1$ el polinomio mínimo de un endomorfismo f en $\mathbb{R}^4$. Demostrar que f es invertible y que $f^{-1} = f^2$.

5. Hallar el polinomio mínimo del endomorfismo $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dado por

$$f[p(x)] = \frac{p(2x) - p(x)}{x}.$$

Solución. 1. Polinomio característico de A :

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)^2(\lambda^2-5\lambda+6)=(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

Como el polinomio mínimo de A divide al característico y tiene los mismos factores irreducibles, los posibles polinomios mínimos de A son

$$\mu_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3),$$

$$\mu_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3),$$

$$\mu_3(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

Sustituyendo λ por A :

$$\mu_1(A)=(A-2I)(A-3I)=\ldots\neq 0,$$

$$\mu_2(A)=(A-2I)^2(A-3I)=\ldots=0.$$

En consecuencia, el polinomio mínimo de A es $\mu(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

2. Polinomio característico de A :

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -9 & -4\\ 6 & -11-\lambda & -5\\ -7 & 13 & 6-\lambda\end{vmatrix}.$$

Efectuando la transformación $C_1\to C_1+C_2-C_3$:

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & -9 & -4\\ -\lambda & -11-\lambda & -5\\ \lambda & 13 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}-1 & -9 & -4\\ -1 & -11-\lambda & -5\\ 1 & 13 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(-\lambda)^2=-\lambda^3.$$

Los posibles polinomios mínimos de A son:

$$\mu_1(\lambda)=\lambda,\ \ \mu_2(\lambda)=\lambda^2,\ \ \mu_3(\lambda)=\lambda^3.$$

Sustituyendo λ por A :

$$\mu_1(A)=A\neq 0,\ \ \mu_2(A)=A^2=\ldots\neq 0.$$

En consecuencia, el polinomio mínimo de A es $\mu(\lambda) = \lambda^3$.

3. Hallemos la matriz A de D con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_4[x]$. Tenemos

$$D(1) = 0,\ D(x) = 1,\ D(x^2) = 2x,\ D(x^3) = 3x^2,\ D(x^4) = 4x^3.$$

Trasponiendo coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $\chi(\lambda) = \lambda^5$, por tanto los posibles polinomios mínimos de A son

$$\mu_1(\lambda) = \lambda,\ \mu_2(\lambda) = \lambda^2,\ \mu_3(\lambda) = \lambda^3,\ \mu_4(\lambda) = \lambda^4,\ \mu_5(\lambda) = \lambda^5.$$

Sustituyendo λ por A obtenemos

$$\begin{aligned} &\mu_1(A) = A \neq 0,\ \mu_2(A) = A^2 = \ldots \neq 0, \\ &\mu_3(A) = A^3 = \ldots \neq 0,\ \mu_4(A) = A^4 = \ldots \neq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, el polinomio mínimo de D es $\mu(\lambda) = \lambda^5$.

4. Se verifica $p(f) = f^3 - I = 0$ es decir, $f^3 = I$ o equivalentemente $f\left(f^2\right) = I$, lo cual implica que f es invertible y que $f^{-1} = f^2$.

5. Hallemos la matriz A de f con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$f(1) = \frac{1-1}{x} = 0, \quad f(x) = \frac{2x - x}{x} = 1,$$

$$f(x^2) = \frac{4x^2 - x^2}{x} = 3x, \quad f(x^3) = \frac{8x^3 - x^3}{x} = 7x^2.$$

Transponiendo coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de f es $\chi(\lambda) = \lambda^4$, con lo cual los posibles polinomios mínimos de f son $\mu_1(\lambda) = \lambda$, $\mu_2(\lambda) = \lambda^2$, $\mu_3(\lambda) = \lambda^3$ o $\mu_4(\lambda) = \lambda^4$. Fácilmente verificamos que

$$\mu_1(A) = A \neq 0, \quad \mu_2(A) = A^2 \neq 0, \quad \mu_3(A) = A^3 \neq 0,$$

es decir, el polinomio mínimo de f es λ^4.

12.3. Forma canónica de Jordan

1. Hallar las posibles formas de Jordan para un endomorfismo cuyos polinomio característico y mínimo son respectivamente:

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda - 3)^3, \quad \mu(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^3.$$

2. Hallar las posibles formas de Jordan para un endomorfismo cuyos polinomio característico y mínimo son respectivamente:

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 7)^5, \quad \mu(\lambda) = (\lambda - 7)^2.$$

3. Hallar las posibles formas de Jordan para un endomorfismo cuyos polinomio característico y mínimo son respectivamente:

$$\chi(\lambda) = (\lambda - a)^3(\lambda - b)^2, \quad \mu(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b), \quad (a \neq b).$$

4. Hallar el polinomio mínimo y la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Sea $M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Determinar su forma canónica de Jordan según los valores del parámetro b.

Solución. 1. Recordemos el siguiente teorema:

TEOREMA. Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita n y $f : E \to E$ un endomorfismo. Supongamos que los polinomios característico y mínimo de f son respectivamente:

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{n_p},$$
$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

en donde los λ_i son escalares distintos dos a dos. Entonces, existe una base B_J de E respecto de la cual la matriz J de f es diagonal por bloques, siendo cada uno de los bloques de J de la forma:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Para cada valor propio λ_i se verifica:

(i) Existe al menos un J_{ij} de dimensión m_i, los demas J_{ij} son de órdenes $\leq m_i$.
(ii) La suma de los órdenes de los J_{ij} es n_i.
(iii) El número de bloques J_{ij} coincide con la multiplicidad geométrica de λ_i $\square$

Usando el teorema anterior, las posibles formas canónicas de Jordan de f son:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (si } \dim V_2 = 2).$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (si } \dim V_2 = 3).$$

2. Tenemos:

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ 0 & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & 0 & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix} \text{ (si } \dim V_7 = 3).$$

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ 0 & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix} \text{ (si } \dim V_7 = 4).$$

3. Necesariamente ha de ser

$$J = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & b & \\ & & & & b \end{bmatrix},$$

por tanto el endomorfismo es diagonalizable.
4. Polinomio característico de A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^4 = \lambda^4.$$

El polinomio mínimo sabemos que divide al característico y tiene los mismos factores irreducibles, por tanto los posibles polinomios mínimos de A son:

$$\mu_1(\lambda) = \lambda, \;\; \mu_2(\lambda) = \lambda^2, \;\; \mu_3(\lambda) = \lambda^3, \;\; \mu_4(\lambda) = \lambda^4.$$

Tenemos

$$\mu_1(A) = A \neq 0, \;\; \mu_2(A) = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \;\; \mu_3(A) = A^3 = 0.$$

En consecuencia, el polinomio mínimo de es $\mu_3(\lambda) = \lambda^3$, y la forma canónica de Jordan de A :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Valores propios de M :

$$\begin{vmatrix} b-\lambda & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & -\lambda & 0 & b \\ b & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)^2(\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = b \vee \lambda = 0,$$

valores propios que son al menos dobles.
Primer caso. Si $b = 0$ el único valor propio es $\lambda = 0$ (cuádruple) y

$$\dim V_0 = 4 - \text{rg}\ (M - 0I) = 4 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

El número de cajas es tres, por tanto la forma de Jordan de M es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo caso. Si $b \neq 0$ los valores propios son $\lambda = b$ y $\lambda = 0$ (dobles) y

$$\dim V_b = 4 - \text{rg}\ (M - bI) = 4 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & -b & 0 & b \\ b & 0 & -b & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 4 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} b & 0 & -b & -2 \\ 0 & -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{bmatrix} \underbrace{=}_{b \neq 0} \begin{cases} 4 - 3 = 1 & \text{si} \quad b \neq -3 \\ 4 - 2 = 2 & \text{si} \quad b = -3, \end{cases}$$

$$\dim V_0 = 4 - \text{rg}\ (M - 0I) = 4 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= 4 - \text{rg}\ \begin{bmatrix} b & b+3 \\ 0 & b \\ b & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix} \underbrace{=}_{b \neq 0} 4 - 2 = 2.$$

Como la dimensión proporciona el número de cajas asociadas al correspondiente valor propio, queda

$$J = \begin{bmatrix} b & 1 & & \\ 0 & b & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ si } b \neq -3, \quad J = \begin{bmatrix} -3 & & & \\ & -3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ si } b \neq 3.$$

12.4. Cálculo de una base de Jordan (1)

Hallar la forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

y una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = J$.

Solución. Exponemos previamente un método bastante autocontenido para hallar la forma canónica de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y la correspondiente matriz de cambio.

MÉTODO
1. Hallamos los valores propios de A. 2. Para cada valor propio λ tenemos que obtener tantos vectores como indica su multiplicidad.

(i) Si la dimensión del subespacio propio asociado a λ coincide con la multiplicidad de λ elegimos sencillamente una base de dicho subespacio propio.
(ii) Si la dimensión del subespacio propio asociado a λ es menor que la multiplicidad de λ elegimos vectores $e_1, e_2, e_3, \ldots$ satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases} (A-\lambda I)e_1 = 0 \\ (A-\lambda I)e_2 = e_1 \\ (A-\lambda I)e_3 = e_2 \\ (A-\lambda I)e_4 = e_3 \\ \ldots \end{cases}$$

El hallar estos vectores equivale a resolver varios sistemas. Si llegado a un sistema, este resulta ser incompatible, contamos el número de vectores obtenido. Si es igual a la multiplicidad de λ hemos terminado con este valor propio. Si no es así empezamos a construir una nueva cadena de vectores $e'_1, e'_2, e'_3, \ldots$ satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases} (A-\lambda I)e'_1 = 0 \\ (A-\lambda I)e'_2 = e'_1 \\ (A-\lambda I)e'_3 = e'_2 \\ \ldots \end{cases}$$

El proceso se termina cuando el número de vectores obtenido coincide con la multiplicidad de λ. Hay que tener la precaución de elegir el conjunto cuyos vectores son el primero de cada cadena de tal manera que formen sistema libre. Se demuestra que repitiendo el proceso anterior para cada valor propio, la unión de todos los vectores elegidos es una base de $\mathbb{K}^n$. Esta base $B_J = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ es además de Jordan pues:

$$\begin{cases} (A-\lambda I)e_1 = 0 \Leftrightarrow Ae_1 = \lambda e_1 \\ (A-\lambda I)e_2 = e_1 \Leftrightarrow Ae_2 = e_1 + \lambda e_2 \\ (A-\lambda I)e_3 = e_2 \Leftrightarrow Ae_3 = e_2 + \lambda e_3 \\ \ldots \end{cases}$$

(hemos supuesto para evitar escribir de manera repetitiva el símbolo de transposición que los vectores e_i que escribamos, son vectores columna). En consecuencia la matriz del endomorfismo dado por A en la base canónica de $\mathbb{K}^n$ sería en la base B_J :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu \end{bmatrix} \quad \square$$

1. Hallamos los valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-2)^4 = 0.$$

El único valor propio es $\lambda = 2$ (cuádruple).

2. Tenemos que hallar cuatro vectores asociados al valor propio 2. La dimensión del subespacio propio asociado V_2 es:

$$\dim V_2 = 4 - \operatorname{rg}(A-2I) = 4 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \ldots = 4 - 2 = 2.$$

Buscamos pues vectores $e_1, e_2, e_3, \ldots$ cumpliendo

$$\begin{cases} (A-\lambda I)e_1 = 0 \\ (A-\lambda I)e_2 = e_1 \\ (A-\lambda I)e_3 = e_2 \\ \qquad \ldots \end{cases}$$

Como los sistemas a resolver son todos del mismo tipo, en vez de resolverlos uno a uno, resolvemos el sistema general:

$$(A-2I)x = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos que el sistema (1) es compatible si y sólo si se verifica $h_2 - h_3 = 0$ y $h_1 - h_2 + h_4 = 0$ (condiciones de compatibilidad) y la solución general es

$$x_1 = -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}h_1 + h_2, \;\; x_2 = \alpha - h_1 - h_2, \;\; x_3 = \alpha, \;\; x_4 = \beta$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Procedamos a hallar los vectores $e_1, e_2, e_3, \ldots$

Vector e_1. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$ y la solución general de (1) es $e_1 = (-\beta/2, \alpha, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir $\alpha - \alpha = 0$ y $-\beta/2 - \alpha + \beta = 0$. En consecuencia podemos elegir $\alpha = 1,\ \beta = 2$ y obtenemos el vector $e_1 = (-1, 1, 1, 2)^t$.

Vector e_2. En este caso, $h_1 = -1, h_2 = h_3 = 1, h_4 = 2$ y la solución general de (1) es $e_2 = (-\beta/2 + 1/2, \alpha, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir $\alpha - \alpha = 0$ y $-\beta/2 + 1/2 - \alpha + \beta = 0$. En consecuencia podemos elegir $\alpha = 0,\ \beta = -1$ y obtenemos el vector $e_2 = (1, 0, 0, -1)^t$.

Vector e_3. En este caso, $h_1 = 1, h_2 = h_3 = 0, h_4 = -1$ y la solución general de (1) es $e_3 = (-\beta/2 + 1/2, \alpha - 1, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad. Pero la primera condición es $\alpha - 1 - \alpha = 0$ que no se cumple para ningún valor de α y β. Por tanto el siguiente sistema no es compatible. Elegimos por ejemplo $\alpha = 0,\ \beta = -1$ y obtenemos el vector $e_3 = (0, -1, 0, 1)^t$.

Hemos encontrado tres vectores asociados al valor propio 2 y necesitamos cuatro. Construimos una nueva cadena de vectores $e'_1, e'_2, e'_3, \ldots$ satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases} (A-\lambda I)e'_1 = 0 \\ (A-\lambda I)e'_2 = e'_1 \\ \ldots \end{cases}$$

(en realidad sólo necesitamos uno: e'_1)

Vector e'_1. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$ y la solución general de (1) es $e_1 = (-\beta/2, \alpha, \alpha, \beta)$. No imponemos condiciones de compatibilidad pues no hay ningún vector más que hallar. Elegimos por ejemplo $\alpha = 1,\ \beta = 0$ y obtenemos el vector $e'_1 = (-0, 1, 1, 0)^t$ que es linealmente independiente con e_1. Una base de Jordan es por tanto

$$B_J = \left\{ e_1 = (-1,1,1,2)^t, e_2 = (1,0,0,-1)^t, e_3 = (0,-1,0,1)^t, e'_1 = (0,1,1,0)^t \right\}.$$

Se verifican las relaciones

$$\begin{cases} (A-2I)e_1 = 0 \Leftrightarrow Ae_1 = 2e_1 \\ (A-2I)e_2 = e_1 \Leftrightarrow Ae_2 = e_1 + 2e_2 \\ (A-2I)e_3 = e_2 \Leftrightarrow Ae_3 = e_2 + 2e_3 \\ (A-2I)e'_1 = 0 \Leftrightarrow Ae'_1 = 2e'_1 \end{cases}$$

La forma canónica de Jordan de A es por tanto

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz de cambio P sabemos que es aquella cuyas columnas son los vectores de la nueva base B_J, es decir

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.5. Cálculo de una base de Jordan (2)

Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Determinar la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = J$.

Solución. Hallemos los valores propios de A. Para ello efectuamos la transformación $F_3 - F_2$ y a continuación $C_2 + C_3$:

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}2-\lambda & 6 & -15\\ 1 & 1-\lambda & -5\\ 1 & 2 & -6-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-\lambda & 6 & -15\\ 1 & 1+\lambda & -5\\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}2-\lambda & -9 & -15\\ 1 & -4+\lambda & -5\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -9\\ 1 & -4-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^3.\end{aligned}$$

El único valor propio de A es por tanto $\lambda = -1$ (triple). La dimensión del subespacio propio V_{-1} asociado es:

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \operatorname{rg}(A+I) = 3 - \operatorname{rg}\begin{bmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, y por tanto A no es diagonalizable. Los posibles polinomios mínimos son $\mu_1(\lambda) = \lambda+1, \mu_2(\lambda) = (\lambda+1)^2$ o $\mu_3(\lambda) = (\lambda+1)^3$. Se verifica $\mu_1(A) = A + I \neq 0$ y $\mu_2(A) = (A+I)^2 = 0$, es decir el polinomio mínimo de A es $\mu_2(\lambda) = (\lambda+1)^2$. Como consecuencia la forma canónica de Jordan de A es:

$$J = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Una base de Jordan $B_J = \{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ para la matriz A será pues una base satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases}Ae_1 = -e_1\\ Ae_2 = e_1 - e_2\\ Ae_3 = -e_3\end{cases} \text{ o bien } \begin{cases}(A+I)e_1 = 0\\ (A+I)e_2 = e_1\\ (A+I)e_3 = 0.\end{cases}$$

Tenemos que resolver sistemas del tipo $(A+I)x = h$ con $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ y $h = (h_1, h_2, h_3)$, es decir sistemas del tipo

$$(A+I)x = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}. \quad (1)$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos que el sistema (1) es compatible si y sólo si se verifica $h_1 = 3h_2$ y $h_2 = h_3$ (condiciones de compatibilidad) y la solución general es

$$\begin{cases} x_1 = h_2 - 2\alpha + 5\beta \\ \quad x_2 = \alpha \\ \quad x_3 = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vector e_1. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ y la solución general de (1) es $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir $-2\alpha + 5\beta = 3\alpha$ y $\alpha = \beta$. En consecuencia podemos elegir $\alpha = \beta = 1$ y obtenemos el vector $e_1 = (3, 1, 1)^t$.

Vector e_2. En este caso, $h_1 = 3, h_2 = h_3 = 1$ y la solución general de (1) es $e_2 = (1 - 2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Eligiendo $\alpha = \beta = 0$ obtenemos el vector $e_2 = (1, 0, 0)^t$.

Vector e_3. Como en el caso de e_1 la solución general de (1) es $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Elegimos α y β de tal manera que e_1 y e_3 sean linealmente independientes, por ejemplo $\alpha = 1, \beta = 0$ con lo cual obtenemos el vector $e_3 = (-2, 1, 0)^t$. En consecuencia, una matriz P que satisface $P^{-1}AP = J$ es

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.6. Potencia enésima por forma de Jordan

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$.

(a) Determinar la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = J$.
(b) Como aplicación del apartado anterior, hallar A^n $(n \in \mathbb{N})$.

Solución. Si J es la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{K}^{p\times p}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y $P \in \mathbb{K}^{p\times p}$ es una matriz invertible tal que $P^{-1}AP$, despejando A obtenemos $A = PJP^{-1}$ y por tanto

$$A^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1})\ldots(PJP^{-1}) = PJ^nP^{-1},$$

lo cual proporciona un método para calcular la potencia enésima A^n.

(a) Hallemos los valores propios de A. Para ello efectuamos la transformación $F_3 - F_2$ y a continuación $C_2 + C_3$:

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1+\lambda & -5 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 & -15 \\ 1 & -4+\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^3.\end{aligned}$$

El único valor propio de A es por tanto $\lambda = -1$ (triple). La dimensión del subespacio propio V_{-1} asociado es:

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \text{rg } (A+I) = 3 - \text{rg } \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, y por tanto A no es diagonalizable. Los posibles polinomios mínimos son $\mu_1(\lambda) = \lambda+1, \mu_2(\lambda) = (\lambda+1)^2$ o $\mu_3(\lambda) = (\lambda+1)^3$. Se verifica $\mu_1(A) = A + I \neq 0$ y $\mu_2(A) = (A+I)^2 = 0$, es decir el polinomio mínimo de A es $\mu_2(\lambda) = (\lambda+1)^2$. Como consecuencia la forma canónica de Jordan de A es:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Una base de Jordan $B_J = \{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ para la matriz A será pues una base satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_1 - e_2 \\ Ae_3 = -e_3, \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} (A+I)e_1 = 0 \\ (A+I)e_2 = e_1 \\ (A+I)e_3 = 0. \end{cases}$$

Tenemos que resolver sistemas del tipo $(A+I)x = h$ con $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ y $h = (h_1, h_2, h_3)$, es decir sistemas del tipo

$$(A+I)x = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos que el sistema (1) es compatible si y sólo si se verifica $h_1 = 3h_2$ y $h_2 = h_3$ (condiciones de compatibilidad) y la solución general es

$$\begin{cases} x_1 = h_2 - 2\alpha + 5\beta \\ \quad x_2 = \alpha \\ \quad x_3 = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vector e_1. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ y la solución general de (1) es $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir $-2\alpha + 5\beta = 3\alpha$ y $\alpha = \beta$. En consecuencia podemos elegir $\alpha = \beta = 1$ y obtenemos el vector $e_1 = (3, 1, 1)^t$.

Vector e_2. En este caso, $h_1 = 3, h_2 = h_3 = 1$ y la solución general de (1) es $e_2 = (1 - 2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Eligiendo $\alpha = \beta = 0$ obtenemos el vector $e_2 = (1, 0, 0)^t$.

Vector e_3. Como en el caso de e_1 la solución general de (1) es $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$. Elegimos α y β de tal manera que e_1 y e_3 sean linealmente independientes, por ejemplo $\alpha = 1, \beta = 0$ con lo cual obtenemos el vector $e_3 = (-2, 1, 0)^t$. En consecuencia, una matriz P que satisface $P^{-1}AP = J$ es

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Despejando A de la relación $P^{-1}AP = J$ obtenemos $A = PJP^{-1}$ y por tanto

$$A^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \ldots (PJP^{-1}) = PJ^nP^{-1}.$$

La matriz J es diagonal por cajas:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \wedge J_2 = [-1] \Rightarrow J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \Rightarrow J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 \\ 0 & J_2^n \end{bmatrix}.$$

Tenemos $J_2^n = [(-1)^n]$, y para hallar J_1^n expresamos:

$$J_1 = -I + N \text{ con } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que $-I$ conmuta con N y que $N^2 = 0$, obtenemos aplicando la fórmula del binomio de Newton:

$$J_1^n = (-I + N)^n = (-I)^n + n(-I)^{n-1}N = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando que $A^n = PJ^nP^{-1}$ obtenemos

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= (-1)^n \begin{bmatrix} 1-3n & -6n & 15n \\ -n & 1-2n & 5n \\ -n & -2n & 1+5n \end{bmatrix}.$$

12.7. Formas de Jordan de AB y BA

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. En general AB y BA son matrices distintas, y sin embargo tienen atributos iguales. Por ejemplo, se verifica $\det(AB) = \det(BA)$. El objetivo de este ejercicio es, además de evaluar a los alumnos, estudiar algunas otras características comunes.

a) Demostrar que AB y BA tienen el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.
Indicación: Efectuar los productos por cajas CD y DC, y comparar $\det(CD)$ con $\det(DC)$.

$$C = \begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ B & -\lambda I \end{bmatrix}.$$

b) A la vista del resultado anterior es natural preguntar ¿AB y BA tienen la misma forma de Jordan?, y en particular, ¿si una de ellas es diagonalizable, lo es también la otra?. Las respuestas son afirmativas al menos en el caso particular de suponer A o B invertibles. En efecto, en este caso demostrar que si J es la forma canónica de Jordan de AB con matriz de paso P ($J = P^{-1}(AB)P$), entonces J es también la forma normal de Jordan de BA. Determinar una matriz invertible Q tal que $J = Q^{-1}(BA)Q$.
Indicación: Utilizar la igualdad $AB = A(BA)A^{-1}$ cuando se supone A inverible y otra igualdad análoga cuando se supone B invertible.

c) Construir un contraejemplo para mostrar que las respuestas a las preguntas de b) no siempre son afirmativas. Estudiar si la condición A o B invertible es necesaria para que AB y BA tengan la misma forma normal de Jordan.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. a) Hallemos los productos CD y DC:

$$CD = \begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ B & -\lambda I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda I + AB & -\lambda A \\ 0 & -\lambda I \end{bmatrix},$$

$$DC = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ B & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda I & -A \\ 0 & BA - \lambda I \end{bmatrix}.$$

Usando que $\det(CD) = \det(DC)$ obtenemos:

$$\det(AB - \lambda I)(-\lambda)^n = (-\lambda)^n \det(BA - \lambda I)$$

Queda $\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda I)$, es decir, AB y BA tienen el mismo polinomio característico y como consecuencia los mismos valores propios.

b) Por hipótesis $J = P^{-1}(AB)P$. Entonces:

$$J = P^{-1}(AB)P = P^{-1}[A(BA)A^{-1}]$$
$$= P^{-1}A(BA)A^{-1}P = (A^{-1}P)^{-1}(BA)(A^{-1}P).$$

Es decir, para $Q = A^{-1}P$ tenemos $J = Q^{-1}(BA)Q$ lo cual implica que la forma de Jordan de BA es J (la misma que la de AB). El razonamiento es totalmente análogo si se considera B invertible.

c) Consideremos las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices AB y BA no tienen la misma forma de Jordan, lo cual implica que la respuesta a la primera pregunta del apartado b) no siempre es afirmativa. Por otra parte, eligiendo $A = 0$ y $B = 0$ tenemos $AB = BA = 0$, es decir AB y BA tienen la misma forma de Jordan sin ser necesario que A o B sean invertibles.

12.8. Forma canónica del operador derivación

Sea V el espacio vectorial real formado por los polinomios $q(x)$ de grado menor o igual que n, respecto de las operaciones usuales. Se considera la aplicación lineal

$$D : V \to V, \quad q(x) \to D(q(x)) = q'(x).$$

Hallar la matriz A de D respecto de la base de $V : \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Encontrar su forma canónica de Jordan A^* (o en particular, su forma diagonal) y una matriz P regular y diagonal tal que $A^* = P^{-1}AP$. Especificar la nueva base.

(Propuesto en examen, Álgebra , ETS Ing. Montes, UPM).

Solución. Hallemos los transformados por D de los elementos de la base $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de V

$$D(1) = 0,\ D(x) = 1,\ D(x^2) = 2x, \ldots,\ D(x^n) = nx^{n-1}.$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz cuadrada de orden $n+1$ pedida

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de D es $\chi(\lambda) = \lambda^{n+1}$, por tanto $\lambda = 0$ es el único valor propio y su multiplicidad algebraica es $n+1$. Obviamente $\det(A) = 0$ y eliminando la primera columna y última fila de A obtenemos una submatriz con determinante $n!$, lo cual implica que $\operatorname{rg} A = n$. En consecuencia la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es $(n+1) - n = 1$ (una caja) y la forma canónica de Jordan de D es

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Una base $B^* = \{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n+1}(x)\}$ de V tal que la matriz de D respecto de B^* es A^* ha de cumplir

$$\begin{aligned} D[p_1(x)] &= 0 \\ D[p_2(x)] &= p_1(x) \\ D[p_3(x)] &= p_2(x) \\ &\ldots \\ D[p_{n+1}(x)] &= p_n(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que D es el operador derivación, una base B^* cumpliendo las condiciones anteriores es

$$B^* = \{1,\ x\ ,\ x^2/2\ ,\ x^3/(2\cdot 3)\ ,\ x^4/(2\cdot 3\cdot 4)\ ,\ \ldots\ ,\ x^n/(n!)\}.$$

La matriz P pedida es por tanto la matriz de paso de B a B^* :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/n! \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$P = \operatorname{diag}\,(1/0!\ ,\ 1/1!\ ,\ 1/2!\ ,\ \dots\ ,\ 1/n!).$$

12.9. Número e y exponencial de una matriz

En la Enseñanza Media se define el número e como el límite:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

y de manera más general resulta ser

$$e^a = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}a\right)^m,$$

donde a es un número real cualquiera. Se puede intentar definir formalmente la exponencial de la matriz A mediante

$$(*) \qquad e^A = \lim_{m\to\infty}\left(I+\frac{1}{m}A\right)^m$$

donde A es una matriz real $n\times n$, I la identidad de orden $n\times n$, y $n = 1, 2, 3, \dots$ Se pide:

a) Comprobar que la definición $(*)$ tiene sentido cuando A es una matriz 2×2 diagonal. Aplicar esta demostración para calcular e^A cuando:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Comprobar que la definición $(*)$ tiene sentido también cuando A es una matriz 2×2 diagonalizable. Aplicar esta demostración para calcular e^A cuando:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}.$$

c) Comprobar que la definición $(*)$ tiene aún sentido también cuando A es una matriz 2×2 no diagonalizable que admite forma de Jordan. Aplicar esta demostración para calcular e^A cuando:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. a) Sea $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Entonces

$$I + \frac{1}{m}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\lambda_1}{m} & 0 \\ 0 & 1+\frac{\lambda_2}{m} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(I + \frac{1}{m}A\right)^m = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\lambda_1}{m}\right)^m & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{\lambda_2}{m}\right) \end{bmatrix}.$$

Usando la definición $(*)$:

$$e^A = \lim_{m\to\infty} \left(I + \frac{1}{m}A\right)^m = \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{\lambda_1}{m}\right)^m & 0 \\ 0 & \left(1+\dfrac{\lambda_2}{m}\right)^m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{\lambda_1}{m}\right)^m & 0 \\ 0 & \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{\lambda_2}{m}\right)^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

En concreto, para la matriz A dada es

$$e^A = \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$

b) Si A es diagonalizable entonces existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$. Entonces:

$$I + \frac{1}{m}A = PIP^{-1} + \frac{1}{m}PDP^{-1} = P\left(I + \frac{1}{m}A\right)P^{-1}.$$

Elevando a m :

$$\left(I + \frac{1}{m}A\right)^m = P\left(I + \frac{1}{m}D\right)P^{-1}P\left(I + \frac{1}{m}D\right)P^{-1}\ldots P\left(I + \frac{1}{m}D\right)P^{-1}$$
$$= P\left(I + \frac{1}{m}D\right)^m P^{-1}.$$

Por el apartado anterior, existe e^D al ser D diagonal y P es constante (no depende de m). Tomando límites:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(I+\frac{1}{m}A\right)^m &= \lim_{m\to\infty} P\left(I+\frac{1}{m}D\right)^m P^{-1}\\ &= P\left[\lim_{m\to\infty}\left(I+\frac{1}{m}D\right)^m\right]P^{-1}\\ &= Pe^DP^{-1}.\end{aligned}$$

Es decir, existe e^A y es igual a Pe^DP^{-1}. Calculemos ahora la exponencial de la matriz dada. Valores propios:

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & 4\\ -8 & -5-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=3 \ \vee \ \lambda=-1 \text{ (simples)}.$$

Al ser todos los valores propios simples, la matriz es diagonalizable. Subespacios propios:

$$V_3 \equiv \begin{cases} 4x_1+4x_2=0\\ -8x_1-8x_2=0,\end{cases} \qquad V_{-1} \equiv \begin{cases} 8x_1+4x_2=0\\ -8x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

Unas bases respectivas de estos subespacios propios son $e_1=(1,-1)^t$ y $e_2=(1,-2)^t$. Por tanto, una matriz que cumple $A=PDP^{-1}$ es $P=\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}$. Entonces:

$$e^A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^3&0\\0&e^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2e^3-e^{-1} & e^3-e^{-1}\\ -2e^3+2e^{-1} & -e^3+2e^{-1}\end{bmatrix}.$$

c) Si $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable pero tiene forma canónica de Jordan J, ha de ser necesariamente del tipo $J=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}$. Entonces:

$$I+\frac{1}{m}J=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{m}\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{\lambda}{m} & \frac{1}{m}\\ 0 & 1+\frac{\lambda}{m}\end{bmatrix}=\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)I+\begin{bmatrix}0&\frac{1}{m}\\0&0\end{bmatrix}.$$

Como los dos últimos sumandos conmutan, podemos aplicar la fórmula del binomio de Newton. Además, el último sumando es una matriz nilpotente de orden 2, por tanto:

$$\begin{aligned}\left(I+\frac{1}{m}J\right)^m &= \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^m I^m + m\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{m-1} I^{m-1}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{m}\\0&0\end{bmatrix}\\ &= \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^m I + \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{m-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Usando la definición $(*)$:

$$e^J = \lim_{m\to\infty}\left(I + \frac{1}{m}J\right)^m = e^\lambda I + e^\lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, existe e^J. Si P es una matriz cumpliendo $A = PJP^{-1}$ entonces, razonando de manera análoga a la del apartado anterior deducimos que $e^A = Pe^JP^{-1}$. Apliquemos ahora esta demostración al cálculo de la exponencial de la matriz dada. Valores propios:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (doble)}.$$

La dimensión del subespacio propio asociado al valor propio 2 es:

$$\dim V_2 = \operatorname{rg}(A - 2I) = 2 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

En consecuencia la forma de Jordan de A es $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Fácilmente encontramos que una matriz satisfaciendo $A = PJP^{-1}$ es $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces:

$$e^A = Pe^JP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.10. Formas de Jordan de rango 1

Se trata de estudiar las posibles formas canónicas de Jordan (o en su caso, forma diagonal) de las matrices cuadradas de rango 1.

1. Estudiamos en primer lugar un caso particular para matrices 3×3. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix},$$

determinar, según los valores del parámetro real a su forma canónica de Jordan A^* (o en particular su forma diagonal) y una matriz P no singular tal que $A = PA^*P^{-1}$

2. Sea ahora A una matriz real cuadrada $n \times n$ de rango 1. Justificar que en general dicha matriz será de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_1 & \dots & \lambda_n v_1 \\ \lambda_1 v_2 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 v_n & \lambda_2 v_n & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix},$$

con algún $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ y con $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \neq (0, 0, \dots, 0)^t$. Hallar las soluciones del sistema $AX = 0$ con $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ y $0 = (0, 0, \dots, 0)^t$

3. Calcular AX con $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$. Calcular Av. Hallar los autovalores y los autovectores de la matriz A.

4. Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente que que deben satisfacer los coeficientes de la matriz A para que esta sea diagonalizable. Comprobar el resultado que se obtenga, en el caso particular de la matriz que figura en el apartado 1.

5. Las mismas cuestiones para el caso no diagonalizable (naturalmente A^* será su forma canónica de Jordan en este caso).

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Efectuando las transformaciones $F_3 - F_2$ y posteriormente $C_2 + C_3$ al determinante de $A - \lambda I$, obtenemos los valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & a & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a-1 & -1 \\ 1 & a-1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 - a\lambda) = -\lambda^2(\lambda - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (al menos doble)} \vee \lambda = a \text{ (al menos simple)}.$$

Primer caso: $a = 0$. En este caso tenemos $\lambda = 0$ (triple). La dimensión del subespacio propio V_0 asociado es:

$$\dim V_0 = 3 - \operatorname{rg}(A - 0I) = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

En consecuencia su forma de Jordan A^* tiene dos cajas, con lo cual:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base de Jordan $B_J = \{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ para la matriz A será pues una base satisfaciendo las condiciones $Ae_1 = 0, Ae_2 = e_1, Ae_3 = 0$. Tenemos que resolver sistemas del tipo $Ax = h$ con $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ y $h = (h_1, h_2, h_3)$, es decir sistemas del tipo

$$Ax = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos que el sistema (1) es compatible si y sólo si se verifica $h_1 = h_2 = h_3$ (condiciones de compatibilidad) y la solución general es

$$\begin{cases} x_1 = h_1 + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vector e_1. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ y la solución general de (1) es $e_1 = (\beta, \alpha, \beta)$. Este vector x estará de h en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir $\beta = \alpha$. En consecuencia podemos elegir $\alpha = \beta = 1$ y obtenemos el vector $e_1 = (1, 1, 1)^t$.

Vector e_2. En este caso, $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ y la solución general de (1) es $e_2 = (1 + \beta, \alpha, \beta)$. Eligiendo $\alpha = \beta = 0$ obtenemos el vector $e_2 = (1, 0, 0)^t$.

Vector e_3. Como en el caso de e_1 la solución general de (1) es $e_1 = (\beta, \alpha, \beta)$. Elegimos α y β de tal manera que e_1 y e_3 sean linealmente independientes, por ejemplo $\alpha = 1, \beta = 0$ con lo cual obtenemos el vector $e_3 = (0, 1, 0)^t$.
En consecuencia, una matriz Q que satisface $Q^{-1}AQ = A^*$ es

$$Q = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, una matriz P que cumple $A = PA^*P^{-1}$ es $P = Q^{-1}$.

Segundo caso: $a \neq 0$. En este caso los valores propios $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = 0$ (simple). La dimensión de V_a es uno por ser a valor propio simple. Por otra parte tenemos que $\dim V_0 = 3 - \text{rg}(A - 0I) = 3 - 1 = 2$, de lo cual concluimos que A es diagonalizable y su forma canónica de Jordan (diagonal en este caso) es $A^* = \text{diag}(0, 0, a)$.
Una matriz Q cumpliendo $Q^{-1}AQ = A^*$ es una matriz cuyas columnas están formadas por los respectivos vectores vectores propios. Fácilmente

encontramos:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, una matriz P que cumple $A = PA^*P^{-1}$ es $P = Q^{-1}$.

2. Si la matriz $A = \begin{bmatrix} C_1, C_2, \ldots, C_n \end{bmatrix}$ tiene rango 1, alguna de sus columnas ha de ser necesariamente no nula, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que es la C_n, es decir será de la forma $C_n = v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t \neq (0, 0, \ldots, 0)^t$. También sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v_n \neq 0$. Las demás columnas C_j han de ser combinación lineal de C_n, por tanto de la forma $C_j = \lambda_j v$.

Concluimos que $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 v, \lambda_2 v, \ldots, \lambda_{n-1} v, v \end{bmatrix}$, y en consecuencia es de la forma requerida. Como el rango por columnas de una matriz es igual al rango por filas, el sistema $AX = 0$ es equivalente al sistema

$$\lambda_1 v_n x_1 + \lambda_2 v_n x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} v_n x_{n-1} + v_n x_n = 0 \quad (v_n \neq 0),$$

cuya solución general es:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} \\ x_n = -\lambda_1 \alpha_1 - \lambda_2 \alpha_2 - \ldots - \lambda_{n-1} \alpha_{n-1} \end{cases} \quad (\alpha_j \in \mathbb{R}).$$

Podemos expresarla en forma vectorial de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

3. Teniendo en cuenta la forma de la matriz A :

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v, \lambda_2 v, \ldots, \lambda_{n-1} v, v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n) v. \end{aligned}$$

En el caso particular $X = v$ obtenemos

$$Av = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + v_n)v.$$

Llamemos $a = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + v_n$. El vector no nulo v satisface $Av = av$ y por tanto es vector propio asociado al valor propio a. Por otra parte, las soluciones no nulas del sistema $AX = 0$ satisfacen $AX = 0X$, luego son vectores propios asociados al valor propio 0. Los $n - 1$ vectores columnas $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ que aparecen en la igualdad $(*)$ son no nulos y claramente linealmente independientes, son por tanto $n-1$ vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio 0. Los vectores propios de A son por tanto:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix}, \ w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ w_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix},$$

los $n - 1$ primeros asociados al valor propio 0 y el último asociado al a.

4. Del apartado anterior deducimos que $\dim V_0 = n - 1$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si tiene un valor propio no nulo y simple. Necesariamente este valor propio ha de ser $a = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + v_n$. Obsérvese que si ocurre $a \neq 0$ entonces $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, v\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios. Esta base satisface:

$$\begin{cases} Aw_1 = 0 \\ Aw_2 = 0 \\ \ldots \\ Aw_{n-1} = 0 \\ Av = av. \end{cases}$$

lo cual implica que $A^* = \operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, a)$. La matriz del primer apartado es $A = \begin{bmatrix} -v, -av, v \end{bmatrix}$ con $v = (-1, -1, -1)^t$ y por tanto $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -a$. Según lo que acabamos de demostrar, $A = \begin{bmatrix} -v, -av, v \end{bmatrix}$ es diagonalizable si y sólo si se verifica $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + v_3 \neq 0$ o equivalentemente si y sólo si $a \neq 0$ que fue lo que obtuvimos en 1.

5. Como hemos visto, la matriz A no es diagonalizable si y sólo si $a = 0$. En este caso el único valor propio de A es 0 y al ser $\dim V_0 = n - 1$, su forma

canónica A^* tiene $n-1$ cajas, es decir es la matriz diagonal por cajas

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{n-1} \end{bmatrix} \text{ con } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_i = [0], \ (2 \le i \le n-1),$$

que es la forma de Jordan que obtuvimos en el caso particular del primer apartado.

12.11. Espacio de funciones y forma de Jordan

Consideremos el espacio vectorial V generado por el sistema de funciones

$$\{1, x, x^2, x^3, \text{sh } x, \text{ch } x\}.$$

(a) Sea $D : V \to V$ la aplicación derivada, es decir $D(f) = f'$. Calcular unas bases de $\ker D$ e $\text{Im } D$.
(b) Calcular la forma canónica de Jordan J de D y encontrar una base de V de forma que la matriz asociada a D en esa base sea precisamente J.
(c) Sea $T : V \to V$ la aplicación que hace corresponder a cada función $f \in V$ su polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$. Probar que T es lineal y calcular su matriz respecto de la base de V

$$B = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \text{sh } x,\ \text{sh } x\}.$$

(d) Calcular $\ker T$ y como aplicación resolver la ecuación

$$T(f) = 1 + x + x^2 \text{ para } f \in V.$$

(e) Calcular las matrices asociadas a las composiciones $T \circ D$ y $D \circ T$ respecto a la base B y como aplicación resolver la ecuación

$$(T \circ D)(f) = (D \circ T)(f) \text{ para } f \in V.$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Demostremos que $B = \{1, x, x^2, x^3, \text{sh } x, \text{ch } x\}$ es base de V. Es sistema generador por hipótesis. Sea la combinación lineal

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 \text{sh } x + \lambda_6 \text{ch } x = 0.$$

Derivando sucesivamente obtenemos

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 x + 3\lambda_4 x^2 + \lambda_5 \text{ch } x + \lambda_6 \text{sh } x = 0,$$

$$2\lambda_3 + 6\lambda_4 x + \lambda_5 \text{sh } x + \lambda_6 \text{ch } x = 0, \quad 6\lambda_4 + \lambda_5 \text{ch } x + \lambda_6 \text{sh } x = 0,$$

$$\lambda_5 \text{sh } x + \lambda_6 \text{ch } x = 0, \quad \lambda_5 \text{ch } x + \lambda_6 \text{sh } x = 0.$$

Sustituyendo $x = 0$ en las seis igualdades anteriores,

$$\lambda_1 + \lambda_6 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_5 = 0, \quad 2\lambda_3 + \lambda_6 = 0,$$

$$6\lambda_4 + \lambda_5 = 0, \quad \lambda_6 = 0, \quad \lambda_5 = 0.$$

Se deduce inmediatamente que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_6 = 0$, luego B es base de V. La aplicación D está bien definida, pues claramente cualquier combinación lineal de elementos de B al derivarla, es también una combinación lineal de elementos de B. Hallemos la matriz A de D en la base B. Derivando obtenemos

$$\begin{array}{ll} D(1) = 0 & D\left(x^3\right) = 3x^2 \\ D(x) = 1 & D(\text{sh } x) = \text{ch } x \\ D\left(x^2\right) = 2x & D(\text{ch } x) = \text{sh } x. \end{array}$$

Trnasponiendo coeficientes,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En coordenadas en la base B :

$$\ker D : \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Una base de $\ker D$ es $\left\{(1,0,0,0,0,0)^T\right\}$ (en coordenadas en B), por tanto una base de $\ker D$ es $B_{\ker D} = \{1\}$. Las columnas de A desde la segunda a la última, son linealmente independientes y generan a la imagen de D (en coordenadas en B). Simplificando, obtenemos una base de Im D : $B_{\text{Im } D} = \{1, x, x^2, x^3, \text{ch } x, \text{sh } x\}$.

(b) Valores propios de D

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^4(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Los valores propios son $\lambda = 0$ (cuádruple) y $\lambda = \pm 1$ (simples). Las dimensiones de los subespacios propios son $\dim V_0 = 6 - \text{rg }(A - 0I) = 6 - 5 = 1$, $\dim V_1 = 1$, $\dim_{-1} = 1$. Tenemos por tanto una caja de orden 4 para el valor propio 0, y una de orden 1 para cada uno de los valores propios 1 y -1. Es decir

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Para hallar una base de V cuya matriz es J podríamos usar el método general, ahora bien teniendo en cuenta que la aplicación D es la aplicación derivada, podemos razonar de ora manera. Si $B_J = \{e_1, \ldots, e_6\}$ es base cuya matriz es J se ha de verificar

$$De_1 = 0 \text{ (basta elegir } e_1 = 1), \quad De_2 = e_1 \text{ (basta elegir } e_2 = x),$$

$$De_3 = e_2 \text{ (basta elegir } e_3 = x^2/2), \quad De_4 = e_3 \text{ (basta elegir } e_4 = x^3/6),$$

$$De_5 = e_5 \text{ (basta elegir } e_5 = e^x), \quad De_6 = -e_6 \text{ (basta elegir } e_5 = e^{-x}).$$

Obsérvese que e^x y e^{-x} son vectores de V pues $e^x = \text{sh } x + \text{ch } x$ y $e^{-x} = \text{ch } x - \text{sh } x$. La base pedida es

$$B_J = \left\{1,\ x,\ x^2/2,\ x^3/6,\ e^x,\ e^{-x}\right\}$$

(c) La aplicación es $T(f) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$

Esta aplicación está bien definida, pues las funciones de V son derivables hasta cualquier orden, y $T(f)$ claramente pertenece a V. Veamos que T es lineal. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y para todo $f, g \in V$

$$T(\lambda f + \mu g) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda f + \mu g)^{(k)}(0)}{k!}x^k = \lambda \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$+\mu \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lambda T(f) + \mu T(g).$$

Los transformados de los elementos de la base B son

$$T(1) = 1,\ \ T(x) = x,\ \ T\left(x^2\right) = x^2,$$

$$T\left(x^3\right) = 0,\ \ T(\text{sh } x) = x,\ \ T(\text{ch } x) = 1 + x^2/2.$$

Transponiendo coeficientes obtenemos la matriz de T en B

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) En coordenadas en la base B :

$$\ker T : \begin{cases} x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_6/2 = 0, \end{cases} \qquad \dim \ker T = 6 - \text{rg } A_1 = 6 - 3 = 3.$$

Una base de $\ker T$ en coordenadas en B es

$$\{(0,0,0,1,0,0)^T, (0,-1,0,0,1,0)^T\ (-2,0,-1,0,2)^T\},$$

y pasando a los auténticos vectores de V

$$B_{\ker T} = \{x^3,\ -x + \text{sh } x,\ -2 - x^2 + \text{ch } x\}.$$

La ecuación $T(f) = 1 + x + x^2$ es equivalente en coordenadas en B a la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 + x_6 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_6/2 = 1. \end{cases}$$

Las soluciones del sistema anterior son

$$x_1 = 1 - \gamma,\ x_2 = 1 - \beta,\ x_3 = 1 - \gamma/2,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = \beta,\ x_6 = \gamma.$$

La ecuación $T(f)=1+x+x^2$ es equivalente en coordenadas en B a

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1/2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_6=1\\x_2+x_5=1\\x_3+x_6/2=1,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4,x_4)=(1-\gamma,1-\beta,1-\gamma/2,\alpha,\beta,\gamma)\ \ (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}).$$

Las soluciones de la ecuación son por tanto

$$f(x)=1-\gamma+(1-\beta)x+\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right)x^2+\alpha x^3+\beta\text{ sh x}+\gamma\text{ ch x},$$

con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

(e) Sabemos que la composición de endomorfismos corresponde al producto de matrices. La matrices de $T\circ D$ y $D\circ T$ son respectivamente

$$A_1A=\ldots=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\\0&0&0&3&1/2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad AA_1=\ldots=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

En coordenadas en B, la ecuación dada equivale a

$$A_1A\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_6\end{bmatrix}=AA_1\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left\{6x_4+x_5=0\right.\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\alpha_1\\x_2=\alpha_2\\x_3=\alpha_3\\x_4=\alpha_4\\x_5=6\alpha_4\\x_6=\alpha_5\end{cases}\quad(\alpha_i\in\mathbb{R}).$$

Las soluciones de la ecuación son por tanto

$$f(x)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3-6\alpha_4\text{sh x}+\alpha_5\text{ch x}\quad(\alpha_i\in\mathbb{R}).$$

12.12. Matrices con cuadrado nulo

(a) Caracterizar las matrices complejas X de orden 2×2 que satisfacen $X^2 = 0$.
(b) Idem para las de orden 3×3 que satisfacen $X^2 = 0$.

Solución. (a) Dado que $X^2 = 0$, los posibles polinomios mínimos de X son λ o λ^2. Es decir, las formas canónicas de Jordan de X son

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vee J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, si $X^2 = 0$, X es necesariamente de la forma $X = PJ_kP^{-1}$ con $k = 1$ o $k = 2$ y P invertible. Pero para toda P invertible con $X = PJ_kP^{-1}$:

$$X^2 = \left(PJ_kP^{-1}\right)\left(PJ_kP^{-1}\right) = PJ_k^2P`-1 = P0P^{-1} = 0.$$

En consecuencia, las matrices de orden 2×2 que satisfacen $X^2 = 0$ son las matrices semejantes a J_1 o a J_2.

(b) El razonamiento es totalmente análogo. Ahora las posibles formas de Jordan de X son

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, las matrices de orden 3×3 que satisfacen $X^2 = 0$ son las matrices semejantes a K_1 o a K_2.

Capítulo 13

Formas bilineales y cuadráticas

13.1. Concepto de forma bilineal

1. Sea $E = \mathcal{C}[a,b]$ el espacio vectorial real de las funciones reales continuas $x(t)$ en el intervalo $[a,b]$. Se considera la aplicación

$$f : E \times E \to \mathbb{R}, \quad f[x(t), y(t)] = \int_a^b x(t)y(t)\ dt.$$

Demostrar que f es una forma bilineal.

2. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $f_1 : E \to \mathbb{K}$, $f_2 : F \to \mathbb{K}$ aplicaciones lineales. Demostrar que la aplicación:

$$f : E \times F \to \mathbb{K}, \quad f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)$$

es una forma bilineal.

3. Sea $E = \mathbb{K}^{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de ordenes n y $M \in E$ matriz fija dada. Se define la aplicación:

$$f : E \times E \to \mathbb{K}, \quad f(X,Y) = \operatorname{tr}\left(X^T M Y\right),$$

en donde tr denota la traza. Demostrar que f es forma bilineal.

4. Demostrar que la aplicación

$$f : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad f(p,q) = p(0) \cdot q(0)$$

es una forma bilineal.

Solución. 1. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $x(t), y(t), z(t) \in E$, y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad de la integral definida:

$$(i) \quad f\left(\lambda x(t)+\mu y(t), z(t)\right)=\int_a^b \left(\lambda x(t)+\mu y(t)\right) z(t)\ dt$$
$$=\int_a^b \left(\lambda x(t)z(t)+\mu y(t)z(t)\right) dt=\lambda\int_a^b x(t)z(t)\ dt+\mu\int_a^b y(t)z(t)\ dt$$
$$=\lambda f\left((x(t), z(t)\right)+\mu f\left(y(t), z(t)\right).$$
$$(ii) \quad f\left(x(t), \lambda y(t)+\mu z(t)\right)=\int_a^b x(t)\left(\lambda y(t)+\mu z(t)\right) dt$$
$$=\int_a^b \left(\lambda x(t)y(t)+\mu x(t)z(t)\right) dt=\lambda\int_a^b x(t)y(t)\ dt+\mu\int_a^b x(t)z(t)\ dt$$
$$=\lambda f\left((x(t), y(t)\right)+\mu f\left(x(t), z(t)\right).$$

Concluimos que f es forma bilineal.

2. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x, y \in E$, para todo $z \in F$ y usando la linealidad de f_1:

$$f(\lambda x+\mu y, z)=f_1(\lambda x+\mu y)\ f_2(z)=\left(\lambda f_1(x)+\mu f_1(y)\right) f_2(z)$$
$$=\lambda f_1(x)\ f_2(z)+\mu f_1(y)\ f_2(z)=\lambda f(x,z)+\mu f(y,z).$$

Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x \in E$ y para todo $y, z \in F$ y usando la linealidad de f_2:

$$f(x, \lambda y+\mu z)=f_1(x)\ f_2(\lambda y+\mu z)=f_1(x)\left(\lambda f_2(y)+\mu f_2(z)\right)$$
$$=\lambda f_1(x)\ f_2(y)+\mu f_1(x)\ f_2(z)=\lambda f(x,y)+\mu f(x,z).$$

Concluimos que f es forma bilineal.

3. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $X, Y, Z \in E$ y teniendo en cuenta conocidas propiedades de la traza y la transposición:

$$f\left(\lambda X+\mu Y, Z\right)=\operatorname{tr}\left(\left(\lambda X+\mu Y\right)^T MZ\right)=\operatorname{tr}\left(\left(\lambda X^T+\mu Y^T\right)MZ\right)$$
$$=\operatorname{tr}\left(\lambda X^T MZ+\mu Y^T MZ\right)=\lambda\operatorname{tr}\left(X^T MZ\right)+\mu\operatorname{tr}\left(Y^T MZ\right)$$
$$=\lambda\ f\left(X,Z\right)+\mu\ f\left(Y,Z\right).$$

$$f\left(X, \lambda Y+\mu Z\right)=\operatorname{tr}\left(X^T M\left(\lambda Y+\mu Z\right)\right)=\operatorname{tr}\left(\lambda X^T MY+\mu X^T MZ\right)$$
$$=\lambda\operatorname{tr}\left(X^T MY\right)+\mu\operatorname{tr}\left(X^T MZ\right)=\lambda\ f\left(X,Y\right)+\mu\ f\left(X,Z\right).$$

Concluimos que f es forma bilineal.

4. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $p, q, r \in \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned}&f(\lambda p+\mu q, r)=(\lambda p+\mu q)(0)\cdot r(0)=(\lambda p(0)+\mu q(0))\cdot r(0)\\&=\lambda p(0)\cdot r(0)+\mu q(0)\cdot r(0)=\lambda f(p,r)+\mu f(q,r).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f(p, \lambda q+\mu r)=p(0)\cdot(\lambda q+\mu r)(0)=p(0)\cdot(\lambda q(0)+\mu r(0))\\&=\lambda p(0)\cdot q(0)+\mu p(0)\cdot r(0)=\lambda f(p,q)+\mu f(p,r).\end{aligned}$$

Concluimos que f es forma bilineal.

13.2. Espacio vectorial de las formas bilineales

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea:

$$\mathcal{B}(E,F)=\{f: E\times F\to\mathbb{K} : f \text{ es forma bilineal}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{B}(E,F)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones:
Suma: $\forall f, g \in \mathcal{B}(E,F), \quad (f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$.
Ley externa: $\forall \alpha\in\mathbb{K}\ \forall f\in\mathcal{B}(E,F), \quad (\alpha f)(x,y)=\alpha f(x,y)$.

Solución. Sabemos que $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ conjunto de las aplicaciones de un conjunto $X\neq\emptyset$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial con las operaciones:
Suma. Para todo f, g elementos de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad \forall x\in X.$$

Ley externa. Para todo $f\in\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, y para todo $\alpha\in\mathbb{K}$:

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \qquad \forall x\in X.$$

En consecuencia, basta demostrar que $\mathcal{B}(E,F)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E\times F,\mathbb{K})$.
(i) La aplicación nula de $\mathcal{F}(E\times F,\mathbb{K})$ es claramente bilineal.
(ii) Sean $f, g\in\mathcal{B}(E,F)$. Entonces, para todo $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, para todo $x, y\in E$, para todo $z\in F$ y usando que f y g son formas bilineales:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x+\mu y, z)&=f(\lambda x+\mu y, z)+g(\lambda x+\mu y, z)\\&=\lambda f(x,z)+\mu f(y,z)+\lambda g(x,z)+\mu g(y,z)\\&=\lambda(f(x,z)+g(x,z))+\mu(f(y,z)+g(y,z))\\&=\lambda(f+g)(x,z)+\mu(f+g)(y,z).\end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra la segunda condición de forma bilineal. Por tanto, $f+g\in\mathcal{B}(E,F)$.

(iii) Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathcal{B}(E, F)$. Entonces, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para todo $x, y \in E$, para todo $z \in F$ y usando que f es forma bilineal:

$$(\alpha f)(\lambda x + \mu y, z) = \alpha\left(f(\lambda x + \mu y, z)\right) = \alpha\left(\lambda f(x, z) + \mu f(y, z)\right)$$

$$= \lambda\left(\alpha f(x, z)\right) + \mu\left(\alpha f(y, z)\right) = \lambda(\alpha f)(x, z) + \mu(\alpha f)(y, z).$$

De manera análoga se demuestra la segunda condición de forma bilineal. Por tanto, $\alpha f \in \mathcal{B}(E, F)$.
Hemos demostrado que $\mathcal{B}(E, F)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, en consecuencia es espacio vectorial.

13.3. Matriz de una forma bilineal

1. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y

$$B_E = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_F = \{v_1, v_2\}$$

bases de E y F respectivamente. Sea $f : E \times F \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que satisface:

$$\begin{array}{lll} f(u_1, v_1) = 2 & f(u_2, v_1) = -6 & f(u_3, 2v_1) = 4 \\ f(u_1, v_2) = -3 & f(4u_2, v_2) = 0 & f(2u_3, v_2) = 6. \end{array}$$

Se pide
(a) Hallar la matriz A de f en las bases B_E y B_F
(b) Hallar la ecuación matricial de f en las mismas bases.
(c) Hallar $f(x, y)$, siendo $x = u_1 + 2u_3$, $y = 2v_1$.
(d) Hallar la expresión desarrollada de $f(x, y)$.

2. Se considera la forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}, \quad f(p, q) = p(0) \cdot q(0).$$

Hallar la matriz de f respecto de la base

$$B = \{2 + x - x^2, 1 + 2x, 3\}.$$

3. Se considera la forma bilineal

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad f(X, Y) = \operatorname{tr}\left(X^T Y\right).$$

Hallar su matriz respecto de la base canónica.

4. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y

$$B_E = \{u_1, \ldots, u_m\}, \quad B_F = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

bases de E y F respectivamente. Sea $f : E \times F \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Denotemos

$$a_{ij} = f(u_i v_j) \quad (i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots n).$$

Demostrar que para todo $(x, y) \in E \times F$ se verifica:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

en donde $(x_1, \dots, x_m)^T$ son las coordenadas de x en B_E e $(y_1, \dots, y_n)^T$ son las de y en B_F.

Solución. 1. (a) Usando la blinealidad de f, podemos escribir las igualdades dadas en la forma:

$$\begin{matrix} f(u_1, v_1) = 2 & f(u_2, v_1) = -6 & 2f(u_3, v_1) = 2 \\ f(u_1, v_2) = -3 & 4f(u_2, v_2) = 0 & -6f(u_3, v_2) = 6. \end{matrix}$$

En consecuencia,

$$A = \begin{bmatrix} f(u_1, v_1) & f(u_1, v_2) \\ f(u_2, v_1) & f(u_2, v_2) \\ f(u_3, v_1) & f(u_3, v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) La ecuación matricial es

$$f(x,y) = X^T A Y = \begin{bmatrix} x_1, \ x_2, \ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Sustituyendo las coordenadas de x e y en la ecuación matricial

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1, \ 0, \ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \ldots = 8.$$

(d) Multiplicando matrices en la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{bmatrix} x_1, \ x_2, \ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 6x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2. \end{aligned}$$

Observación. Nótese que al desarrollar la ecuación matricial, el coeficiente $x_i y_j$ es a_{ij}.

2. En este caso $E = F = \mathbb{R}[x]$. Como sólo se menciona una base, se supone que $B_E = B_F = B$. Llamemos $u_1 = 2 + x - x^2$, $u_2 = 1 + 2x$, $u_3 = 3$ y hallemos los correspondientes transformados:

$$\begin{array}{lll} f(u_1, u_1) = 2 \cdot 2 = 4 & f(u_1, u_2) = 2 \cdot 1 = 2 & f(u_1, u_3) = 2 \cdot 3 = 6, \\ f(u_2, u_1) = 1 \cdot 2 = 2 & f(u_2, u_2) = 1 \cdot 1 = 1 & f(u_2, u_3) = 1 \cdot 3 = 3, \\ f(u_3, u_1) = 3 \cdot 2 = 6 & f(u_3, u_2) = 3 \cdot 1 = 3 & f(u_3, u_3) = 3 \cdot 3 = 9. \end{array}$$

La matriz pedida es por tanto

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

3. En este caso es más directo hallar la expresión desarrollada de f que los transformado de los pares de la base canónica. Sean los elementos de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$f(X, Y) = \operatorname{tr}\left(X^T Y\right) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tr} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_3 y_3 & x_1 y_2 + x_3 y_4 \\ x_2 y_1 + x_4 y_3 & x_2 y_2 + x_4 y_4 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Las coordenadas de X e Y con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ son respectivamente

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad (y_1, y_2, y_3, y_4)^T,$$

por tanto $(*)$ es la ecuación matricial de f en la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. En consecuencia la matriz pedida es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4.$$

4. Usando la bilinealidad de f :

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \; f\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \; f(u_i, v_j)\right) = \begin{bmatrix} x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_j \; f(u_1, v_j) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \; f(u_2, v_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \; f(u_m, v_j) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_j \; a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \; a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \; a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

13.4. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

1. Se consideran las formas bilineales en un espacio vectorial real de dimención 2, cuyas expresiones en coordenadas en una determinada base son:
(a) $f(x,y) = 2x_1y_1 - 5x_2y_1 - 5x_1y_2 + 4x_2y_2$.
(b) $g(x,y) = -3x_2y_1 + 3x_1y_2$.
(c) $h(x,y) = x_1y_1 + 7x_2y_1 - 2x_1y_2 + 6x_2y_2$.
Estudiar en cada caso si la forma es simétrica o antisimétrica.

2. Estudiar si es simétrica la forma bilineal

$$f : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad f(p,q) = p(0) \cdot q(0).$$

3. Se considera la formas bilineal en un espacio vectorial real de dimención 2, cuya expresión en coordenadas en una determinada base es:

$$f(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 6x_2y_1 - x_2y_2.$$

Descomponerla en suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

4. Sea $f : E \times E \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Se dice que es alternada si, y sólo si $f(u,u) = 0$ para todo $u \in E$.

(a) Demostrar que si f es alternada, entonces es antisimétrica.
(b) Demostrar que si f es antisimétrica y carac $\mathbb{K} \neq 2$, entonces f es alternada.

Solución. 1. (a) La matriz de f en la base dada es $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (simétrica), por tanto f es simétrica.
(b) La matriz de g en la base dada es $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ (antisimétrica), por tanto g es antisimétrica.
(c) La matriz de h en la base dada es $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ (ni simétrica ni antisimétrica), por tanto h no es simétrica ni antisimétrica.

2. Como la dimensión de $\mathbb{R}[x]$ no es finita, no tiene sentido el concepto de matriz de f, por tanto usaremos la definición. Para todo $p, q \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(p,q) = p(0) \cdot q(0) = q(0) \cdot p(0) = f(q,p)$$

es decir, f es simétrica.

3. Descomponiendo la matriz A de f en la base dada, en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 13 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 13 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Las correspondientes formas bilineales simétrica y antisimétrica son respectivamente:

$$\begin{aligned} f_s(x,y) &= \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 13 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + \frac{13}{2}x_2y_1 + \frac{13}{2}x_1y_2 - x_2y_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a(x,y) &= \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2. \end{aligned}$$

4. (a) Si f es alternada, para todo $x, y \in E$ se verifica $f(x+y, x+y) = 0$. Pero por la bilinealidad de f :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+y, x+y) = f(x, x+y) + f(y, x+y) \\ &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = 0 + f(x,y) + f(y,x) + 0. \end{aligned}$$

Es decir, $f(y,x) = -f(x,y)$, por tanto f es antisimétrica.
(b) Si f es antisimétrica, $f(x,y) + f(y,x) = 0$ para todo $x, y \in E$. Haciendo $x = y$:

$$0 = f(x,x) + f(x,x) = (1+1)f(x,x).$$

Como $1 + 1 \neq 0$, queda $f(x,x) = 0$ para todo $x \in E$, luego f es alternada.

13.5. Suma directa de las formas bilineales simétricas y antisimétricas

Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B}(E)$ el espacio vectorial de las formas bilineales de $E \times E$ en $\mathbb{K}$. Demostrar que
1) $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{B}(E) : f \text{ es simétrica}\}$ es subespacio de $\mathcal{B}(E)$.
2) $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{B}(E) : f \text{ es antisimétrica}\}$ es subespacio de $\mathcal{B}(E)$.
3) carac $\mathbb{K} \neq 2 \Rightarrow \mathcal{B}(E) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Solución. 1) (i) la forma bilineal nula 0 satisface $0(y,x) = 0(x,y) = 0$ para todo $x, y \in E$, por tanto $0 \in \mathcal{S}$. (ii) Sean $f, g \in \mathcal{S}$. Para todo $x, y \in E$:

$$(f+g)(y,x) = f(y,x) + g(y,x) = f(x,y) + g(x,y) = (f+g)(x,y),$$

lo cual implica que $f + g \in \mathcal{S}$. (iii) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathcal{S}$. Para todo $x, y \in E$:

$$(\lambda f)(y,x) = \lambda f(y,x) = \lambda f(x,y) = (\lambda f)(x,y),$$

lo cual implica que $\lambda f \in \mathcal{S}$. Concluimos que $\mathcal{S}$ es subespacio de $\mathcal{B}(E)$.

2) (i) la forma bilineal nula 0 satisface $0(y,x) = -0(x,y) = 0$ para todo $x, y \in E$, por tanto $0 \in \mathcal{A}$. (ii) Sean $f, g \in \mathcal{A}$. Para todo $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} &(f+g)(y,x) = f(y,x) + g(y,x) = -f(x,y) - g(x,y) \\ &= -\left(f(x,y) + g(x,y)\right) = -(f+g)(x,y), \end{aligned}$$

lo cual implica que $f + g \in \mathcal{A}$. (iii) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathcal{S}$. Para todo $x, y \in E$:

$$(\lambda f)(y,x) = \lambda f(y,x) = \lambda\left(-f(x,y)\right) = -\lambda f(x,y) = -(\lambda f)(x,y),$$

lo cual implica que $\lambda f \in \mathcal{A}$. Concluimos que $\mathcal{A}$ es subespacio de $\mathcal{B}(E)$.

3) Sen $f \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$. Entonces para todo $x, y \in E$ se verifica:

$$f(y,x) = f(x,y), \qquad (1)$$
$$f(y,x) = -f(x,y), \qquad (2)$$

Restando a la igualdad (1) la (2),

$$f(x,y) + f(x,y) = (1+1)f(x,y) = 0.$$

Como carac $\mathbb{K} \neq 2$, $1+1 \neq 0$ luego $f(x,y) = 0$ todo $x, y \in E$, es decir f es la forma bilineal nula. Hemos demostrado que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
Sea $f \in \mathcal{B}(E)$ y denotemos a 1+1 por 2. Como $2 \neq 0$, existen las aplicaciones de $E \times E$ en $\mathbb{K}$:

$$f_s(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right),$$
$$f_a(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) - f(y,x)\right).$$

Dado que $\mathcal{B}(E)$ es un espacio vectorial, las aplicaciones anteriores pertenecen a $\mathcal{B}(E)$. Además, es inmediato comprobar que f_s es simétrica, que f_a es antisimétrica y que $f = f_s + f_a$. Hemos demostrado que $E = \mathcal{S} + \mathcal{A}$.
Concluimos que $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

13.6. Formas bilineales: cambio de base

1. La matriz de una forma bilineal $f = E \times F \to \mathbb{K}$ en las bases $B_E = \{u_1, u_2\}$ y $B_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz de f en las nuevas bases

$$B'_E = \{u_1 - u_2, u_1 + u_2\}, \quad B'_F = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}.$$

2. La matriz de la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en la base $B = \{(1,2),(3,-7)\}$ es $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ambos de dimensión finita y $f : E \times F \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Sean B_E y B_F bases de E y F respectivamente y A la matriz de f en las bases B_E y B_F
Sea B'_E una nueva base de E y B'_F una nueva base de F. Sea P la matriz de cambio de B_E a B'_E y Q la matriz de cambio de B_F a B'_F.

Demostrar que la matriz de la forma bilineal f en la nuevas bases B'_E y B'_F es P^TAQ.

4. Demostrar que la relación en $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ es congruente con } B$$

es una relación de equivalencia.

Solución. 1. La matrices de cambio de B_E a B'_E y de B_F a B'_F son respectivamente

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz pedida es por tanto

$$\begin{aligned} P^TAQ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -6 & -6 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Estamos en el caso particular del cambio de base. La matriz de cambio de la base canónica $B' = \{(1,0),(0,1)\}$ a la base B es

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix},$$

por tanto la matriz de cambio de B a B' es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz pedida es por tanto:

$$B = P^TAP = \frac{1}{169} \begin{bmatrix} 150 & 55 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}.$$

3. La expresión de f en las bases B_E y B_F es

$$f(x,y) = X^TAY, \qquad (1)$$

siendo X las coordenadas de x en B_E e Y las de y en B_F. Las ecuaciones del cambio de base en E y F son respectivamente

$$X = PX', \quad Y = QY', \qquad (2)$$

siendo X' las coordennadas de x en B'_E e Y' las de y en B'_F. Sustituyendo las igualdades (2) en (1) :

$$f(x,y) = \left(PX'\right)^T AQY' = X'^{\,T}\left(P^TAQ\right)Y'.$$

La matriz de f en la nuevas bases B'_E y B'_F es por tanto P^TAQ.

4. Reflexiva. Para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se verifica $A = I^TAI$ siendo I invertible, por tanto $A \sim A$.
Simétrica. Para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : B = P^TAP \Rightarrow A = \left(P^T\right)^{-1} BP^{-1}$$
$$\Rightarrow A = \left(P^{-1}\right)^T BP^{-1} \text{ con } P^{-1} \text{ invertible } \Rightarrow B \sim A.$$

Transitiva. Para todo $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : B = P^TAP \\ \exists Q \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ invertible } : C = Q^TBQ \end{cases} \Rightarrow$$

$$C = Q^T\left(P^TAP\right)Q = (PQ)^T A(PQ) \text{ con } PQ \text{ invertible} \Rightarrow A \sim C.$$

13.7. Diagonalización de formas bilineales simétricas

1. Se considera la forma bilineal simétrica en un espacio vectorial real de dimensión 3 cuya expresión en coordenadas en una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$f(x,y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 8x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2.$$

Hallar una matriz diagonal que la represente y la correspondiente base de vectores conjugados.

2. Se considera la forma bilineal simétrica:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

Hallar una matriz diagonal que la represente y la correspondiente base de vectores conjugados.

Solución. 1. La matriz de f en la base B es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el método de las transformaciones elementales por filas y columnas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} C_2-2C_1 \\ C_3+3C_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] F_3-2F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] C_3-2C_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Es decir, una matriz diagonal D que representa a la forma bilineal y la traspuesta de la matriz P del cambio de la base B a la de vectores conjugados B' son:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La correspondiente base de vectores conjugados es por tanto

$$B' = \{u_1, -2u_1+u_2, 7u_1-2u_2+u_3\}.$$

2. La matriz de f con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el método de las transformaciones elementales por filas y columnas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_1+F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_1+C_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{2F_2-F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{2C_2-C_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Es decir, una matriz diagonal D que representa a la forma bilineal y la traspuesta de la matriz P del cambio de la base canónica B a la de vectores conjugados B' son:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La correspondiente base de vectores conjugados es por tanto

$$B' = \{(1,1), (-1,1)\}.$$

13.8. Concepto de forma cuadrática

1. Determinar las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales:

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$f_2(x,y) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$f_3(x,y) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Se considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 5x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Expresarla mediante una matriz simétrica y mediante un par de ellas que no lo sean.

3. ea q la forma cuadrática asociada a una forma bilineal f en un espacio vectorial E. Demostrar que para toda terna de vectores $x, y, z \in E$ se verifica:

$$q(x+y+z) = q(x+y) + q(x+z) + q(y+z) - q(x) - q(y) - q(z).$$

4. Sea $q : E \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática. Demostrar la identidad

$$q(x+y) + q(x-y) = 2\left(q(x) + q(y)\right) \quad \forall x, y \in E.$$

5. Sea $q : E \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática. Demostrar que:
(a) $q(0) = 0$.
(b) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E.$

Solución. 1. Desarrollando las formas bilineales dadas:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - x_2y_1 + 7x_2y_2,\\
f_2(x,y) &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 6x_2y_1 + 7x_2y_2,\\
f_3(x,y) &= 2x_1y_1 + (3/2)x_1y_2 + (3/2)x_2y_1 + 7x_2y_2.
\end{aligned}$$

Igualando $x = y$, es decir $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ y simplificando términos semejantes, determinamos las correspondientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned}
q_1(x) &= f_1(x,x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2,\\
q_2(x) &= f_2(x,x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2,\\
q_3(x) &= f_3(x,x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2.
\end{aligned}$$

Observación. Nótese que en los tres casos hemos obtenido la misma forma cuadrática q. Es decir, una forma cuadrática procede de más de una forma bilneal f. Las dos primeras no son simétricas y la tercera, sí lo es.

2. Mediante una matriz simétrica, la expresión de q es necesariamente:

$$q(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5/2\\ 4 & 7 & -2\\ 5/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos infinitas opciones de expresar q mediante una matriz no simétrica. Dos de ellas son por ejemplo:

$$q(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1\\ 0 & 7 & -1\\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$q(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0\\ 2 & 7 & -4\\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Desarrollando el primer miembro y aplicando la bilinealidad de f :

$$q(x+y+z) = f(x+y+z, x+y+z) = f(x,x) + f(y,x) + f(z,x)$$

$$+f(x,y) + f(y,y) + f(z,y) + f(x,z) + f(y,z) + f(z,z). \quad (1)$$

Desarrollando el segundo miembro y aplicando la bilinealidad de f :

$$q(x+y) + q(x+z) + q(y+z) - q(x) - q(y) - q(z)$$

$$= f(x,+y,x+y) + f(x+z,x+z) + f(y+z,y+z) - f(x,x)$$

$$-f(y,y)-f(z,z)=f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)+f(x,x)$$
$$+f(z,x)+f(x,z)+f(z,z)+f(y,y)+f(z,y)+f(y,z)+f(z,z)$$
$$-f(x,x)-f(y,y)-f(z,z). \quad (2)$$

La expresión (1) es idéntica a la (2).

4. Sea f una forma bilineal tal que $q(v)=f(v,v)$ para todo $v\in E$. Entonces,

$$q(x+y)+q(x-y)=f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)$$
$$=f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)$$
$$+f(x,x)-f(y,x)-f(x,y)+f(y,y)$$
$$=2f(x,x)+2f(y,y)=2q(x)+2q(y).$$

5. Sea f una forma bilineal tal que $q(v)=f(v,v)$ para todo $v\in E$. Entonces,
(a) $q(0)=f(0,0)=f(0,x-x)=f(0,x)-f(0,x)=0.$
(b) $q(\lambda x)=f(\lambda x,\lambda x)=\lambda f(x,\lambda x)=\lambda^2 f(x,x)=\lambda^2 q(x).$

13.9. Forma polar de una forma cuadrática

1. Sea $q:E\to\mathbb{K}$ una forma cuadrática con carac $\mathbb{K}\neq 2$. Demostrar que la forma polar de q es

$$\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right).$$

2. Se considera la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$:

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+7x_2^2-x_3^2+8x_1x_2+5x_1x_3-4x_2x_3.$$

Determinar la forma polar de q.

Solución. 1. Si f es forma polar de q, entonces f es una forma bilineal simétrica que satisface $q(u)=f(u,u)$ para todo $u\in E$. Tenemos,

$$\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(f(x+y,x+y)-f(x,x)-f(y,y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)-f(x,x)-f(y,y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(f(y,x)+f(x,y)\right)=\frac{1}{2}\left(2\,f(x,y)\right)=f(x,y).$$

2. Por supuesto que podríamos aplicar la fórmula

$$\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$$

para hallar la forma polar de q, ahora bien, podemos escribir

$$q(x)=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1,x_2,x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5/2\\ 4 & 7 & -2\\ 5/2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

siendo A matriz simétrica. En consecuencia la forma polar de q es:

$$f(x,y)=X^TAY=\begin{pmatrix}x_1,x_2,x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5/2\\ 4 & 7 & -2\\ 5/2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

13.10. Diagonalización de formas cuadráticas por transformaciones elementales

1. Se considera la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ cuya expresión en una determinada base B es:

$$q(x)=x_1^2+5x_2^2+8x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3-8x_2x_3.$$

Diagonalizarla y como aplicación descomponerla en suma de cuadrados independientes.

2. Se considera la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cuya expresión en una determinada base B es $q(x)=2x_1x_2$. Diagonalizarla y como aplicación descomponerla en suma de cuadrados independientes.

Solución. 1. La expresión matricial de q por medio de una matriz simétrica es:

$$q(x)=\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 5 & -4\\ -3 & -4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Aplicando el método de las transformaciones elementales por filas y columnas:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3+3F_1\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ C_3 + 3C_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] F_3 - 2F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] C_3 - 2C_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Es decir, una matriz diagonal D que representa a la forma cuadrática y la traspuesta de la matriz P del cambio de la base B a la de vectores conjugados B' son:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La expresión de q en coordenadas en la base B' es por tanto:

$$q(x) = \left(x'_1,\ x'_2,\ x'_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = x'^2_1 + x'^2_2 - 5x'^2_3.$$

Expresemos ahora $q(x)$ como suma de cuadrados independientes en función de las coordenadas originales. Tenemos

$$X = PX' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x'_1 - 2x'_2 + 7x'_3 &= x_1 \\ x'_2 - 2x'_3 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 &= x_2 + 2x_3 \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \right.$$

Por tanto,

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

2. La expresión matricial de q por medio de una matriz simétrica es:

$$q(x) = \left(x_1,\ x_2\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el método de las transformaciones elementales por filas y columnas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_1 + F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_1 + C_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{2F_2 - F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{2C_2 - C_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Es decir, una matriz diagonal D que representa a la forma cuadrática y la traspuesta de la matriz P del cambio de la base B a la de vectores conjugados B' son:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La expresión de q en coordenadas en la base B' es por tanto:

$$q(x) = \left(x_1',\ x_2'\right) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 2x_1'^2 - 2x_2'^2.$$

Expresemos ahora $q(x)$ como suma de cuadrados independientes en función de las coordenadas originales. Tenemos

$$X = PX' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' - x_2' = x_1 \\ x_1' + x_2' = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) \\ x_2' = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right). \end{cases}$$

Por tanto,

$$q(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

13.11. Diagonalización de formas cuadráticas: método de Gauss

1. Usando el método de Gauss, diagonalizar la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

2. Usando el método de Gauss, diagonalizar la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(x, y, z, t) = xy + xz + xt + yz + yt + zt.$$

Solución. Recordemos que el método de Gauss permite diagonalizar cualquier forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O de forma equivalente, permite descomponer la forma cuadrática en suma de cuadrados de formas lineales linealmente independientes. Además, este método trabaja directamente sobre

q. Supondremos que la forma cuadrática q es no nula (trivialmente estaría diagonalizada) y analizamos dos casos:

Caso 1. La forma cuadrática contiene algún cuadrado. Supondremos sin pérdida de generalidad que el término que contiene un cuadrado es ax_1^2 ($a \neq 0$). Entonces podemos expresar $q(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^2 + \varphi_1 x_1 + q_1$ en donde q_1 es una forma cuadrática que solamente contiene las $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$ y φ_1 es una forma lineal que solamente contiene las $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$. Entonces

$$q(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^2 + \varphi_1 x_1 + q_1 = a\left(x_1 + \frac{\varphi_1}{2a}\right)^2 - \frac{\varphi_1^2}{4a} + q_1.$$

Por tanto tenemos expresada q como suma del cuadrado de una forma lineal más la forma cuadrática $-\varphi_1^2/4a + q_1$ que solamente contiene $n-1$ variables.

Caso 2. La forma cuadrática no contiene cuadrados. Ordenando con respecto a dos variables (por ejemplo x_1 y x_2):

$$q(x_1, \ldots, x_n) = ax_1x_2 + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + q_1(x_3 \ldots, x_n)$$

$$a\left(x_1 + \frac{\varphi_2}{a}\right)\left(x_2 + \frac{\varphi_1}{a}\right) + q_1 - \frac{\varphi_1\varphi_2}{a} \quad (a \neq 0).$$

Podemos introducir dos cuadrados aplicando

$$AB = (1/4)[(A+B)^2 - (A-B)^2]$$

al sumando $a(x_1 + \varphi_2/a)(x_2 + \varphi_1/a)$ y la forma cuadrática $q_1 - \varphi_1\varphi_2/a$ depende de las $n-2$ variables $x_3, \ldots, x_n$

Dado que para $n = 1$ la forma cuadrática es evidentemente diagonalizable, los casos anteriores demuestran que podemos descomponer q en suma de cuadrados de n formas lineales. La independencia de estas formas lineales es fácilmente demostrable por recurrencia. $\square$

1. Estamos en el caso 1. Siguiendo el método general expuesto:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1(2x_2 + 4x_3) - x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{(2x_2 + 4x_3)^2}{4} - x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

Ahora descomponemos $-2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$:

$$\begin{aligned}-2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2&=-2x_2^2+x_2(4x_3)+3x_3^2\\&=-2(x_2-x_3)^2-\frac{(4x_3)^2}{-8}+3x_3^2\\&=-2(x_2-x_3)^2+5x_3^2.\end{aligned}$$

La expresión de q en suma de cuadrados de formas lineales independientes es:

$$q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+5x_3^2.$$

Denotando $x_1'=x_1+x_2+2x_3$, $x_2'=x_2-x_3$, $x_3'=x_3$ también podemos expresar q en la forma :

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1'^2-2x_2'^2+5x_3'^2=\begin{pmatrix}x_1' & x_2' & x_3'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}.$$

2. Estamos en el caso 2. Siguiendo el método general expuesto:

$$\begin{aligned}q(x,y,z,t)&=xy+x(z+t)+y(2z+t)+4zt\\&=(x+2z+t)(y+z+t)+4zt-(z+t)(2z+t)\\&=(x+2z+t)(y+z+t)-2z^2-t^2+zt\end{aligned}$$

Usando la fórmula $AB=(1/4)[(A+B)^2-(A-B)^2]$ obtenemos

$$(x+2z+t)(y+z+t)=\frac{1}{4}(x+y+3z+2t)^2-\frac{1}{4}(x-y+z)^2$$

Ahora descomponemos $-2z^2-t^2+zt$:

$$\begin{aligned}-2z^2-t^2+zt&=-t^2+t(z)-2z^2\\&=-\left(t-\frac{z}{2}\right)^2-\frac{z^2}{4}-2z^2=\\&=-\left(t-\frac{z}{2}\right)^2-\frac{9}{4}z^2\end{aligned}$$

La expresión de q en suma de cuadrados de formas lineales independientes es:

$$q(x,y,z,t)=\frac{1}{4}(x+y+3z+2t)^2-\frac{1}{4}(x-y+z)^2-\left(t-\frac{z}{2}\right)^2-\frac{9}{4}z^2$$

Denotando $x'=x+y+3z+2t$, $y'=x-y+z$, $z'=t-z/2$, $t'=z$ también podemos expresar q en la forma :

$$q(x,y,z,t)=\frac{1}{4}x'^{\,2}-\frac{1}{4}y'^{\,2}-z'^{\,2}-\frac{9}{4}t'^{\,2}$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' & z' & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

13.12. Ley de inercia de Sylvester

1. Se considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$ es:

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz de q sea diagonal con a lo sumo unos, menos unos y ceros en la diagonal principal.

2. Determinar la signatura de la forma cuadrática del apartado anterior.

Solución. 1. La expresión matricial de q por medio de una matriz simétrica es:

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el método de las transformaciones elementales por filas y columnas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 + 3C_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] F_3 - 2F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] C_3 - 2C_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{\sqrt{5}}F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/\sqrt{5} & 7/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{array}\right] \frac{1}{\sqrt{5}}C_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{array}\right].$$

Es decir, una matriz diagonal D que representa a la forma cuadrática y la traspuesta de la matriz P del cambio de la base B a la de vectores conjugados B' son:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

La expresión de q en coordenadas en la base

$$B' = \left\{(1,0,0), (-2,1,0), (7/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\right\}$$

es por tanto:

$$q(x) = \left(x_1',\ x_2',\ x_3'\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2.$$

2. Una matriz diagonal que representa a q es $D = \operatorname{diag}\,(1,1,-1)$ en consecuencia la signatura de q es $(2,1)$.

13.13. Clasificación de formas cuadráticas

1. Clasificar la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \ \ (a \in \mathbb{R}).$$

2. Determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ es definida positiva la forma cuadrática

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad q(x) = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} X.$$

Solución. 1. Busquemos una matriz diagonal que represente a q.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_2 - aF_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 2+a \\ 0 & 2+a & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ C_2 - aC_1 \\ C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 2+a \\ 0 & 2+a & 4 \end{bmatrix}.$$

Para $a^2-1\neq 0$, es decir para $a\neq \pm 1$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1-a^2&2+a\\0&2+a&4\end{bmatrix}\underset{(1-a^2)F_3-(2+a)F_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1-a^2&2+a\\0&0&-5a^2-4a\end{bmatrix}\underset{(1-a^2)C_3-(2+a)C_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1-a^2&0\\0&0&(-5a^2-4a)(1-a^2)\end{bmatrix}.$$

Una matriz diagonal que representa a q es por tanto:

$$D=\operatorname{diag}\,\big(1,\ 1-a^2,\ (5a^2+4a)(a^2-1)\big)\quad (a\neq\pm 1).$$

Las raíces de los polinomios que aparecen en D son $a=\pm 1$, $a=0$ y $a=-4/5$. Según los valores de a obtenemos:
$a\in(-\infty,-1)\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ -,\ +)\Rightarrow q$ es indefinida.
$a\in(-1,-4/5)\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ +,\ -)\Rightarrow q$ es indefinida.
$a=-4/5\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ +,\ 0)\Rightarrow q$ es semidefinida positiva.
$a\in(-4/5,0)\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ +,\ +)\Rightarrow q$ es definida positiva.
$a=0\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ +,\ 0)\Rightarrow q$ es semidefinida positiva.
$a\in(0,1)\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ +,\ -)\Rightarrow q$ es indefinida.
$a\in(1,+\infty)\Rightarrow D=\operatorname{diag}\ (+,\ -,\ +)\Rightarrow q$ es indefinida.
Diagonalizamos ahora para $a=1$:

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}\underset{\substack{F_2-F_1\\F_3+F_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&3\\0&3&4\end{bmatrix}\underset{\substack{C_2-C_1\\C_3+C_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&3&4\end{bmatrix}$$

$$\underset{F_2+F_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&7\\0&3&4\end{bmatrix}\underset{C_2+C_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&10&7\\0&7&4\end{bmatrix}\underset{10F_3-7F_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&10&7\\0&0&-9\end{bmatrix}\underset{10C_3-7C_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&10&0\\0&0&-90\end{bmatrix}.$$

En este caso, q es indefinida.
Para $a=-1$:

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}\underset{\substack{F_2+F_1\\F_3+F_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&4\end{bmatrix}\underset{\substack{C_2+C_1\\C_3+C_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&4\end{bmatrix}$$

$$\underset{F_2+F_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&5\\0&1&4\end{bmatrix}\underset{C_2+C_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&5&4\end{bmatrix}\underset{6F_3-5F_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&0&-1\end{bmatrix}\underset{6C_3-5C_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&-6\end{bmatrix},$$

luego q es indefinida. Podemos pues concluir que

$$\begin{aligned}&q \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow a \in (-4/5, 0),\\&q \text{ es semidefinida positiva} \Leftrightarrow a \in \{-4/5, 0\},\\&q \text{ es indefinida} \Leftrightarrow a \notin [-4/5, 0].\end{aligned}$$

2. Usamos el criterio de Sylvester. Los menores principales son:

$$A_1 = \begin{vmatrix}1\end{vmatrix} = 1 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix}1&2\\2&6\end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix}1&2&1\\2&6&2\\1&2&a\end{vmatrix} = 2a-2.$$

Los tres menores principales son positivos si, y sólo si $2a-2>0$. Por tanto, q es definida positiva si, y sólo si $a>1$.[

13.14. Forma cuadrática mediante una integral

La siguiente función es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{\pi/2} (x_1 \cos t + x_2 \sin t + x_3)^2 \, dt.$$

Hallar su rango y signatura (índice de positividad, índice de negatividad e índice de nulidad).

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. Aunque no se pide de manera explícita en el enunciado, es fácil probar que la función dada es una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. En efecto, desarrollando el trinomio del integrando, usando la linealidad de la integral y la existencia de la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado, fácilmente verificamos que q se puede expresar en la forma $q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x^i x^j$, es decir como un polinomio homogéneo de grado dos. Concluimos que q es forma cuadrática.

Calculando los coeficientes a_{ij} por medio de las integrales inmediatas que aparecen, podemos diagonalizar la forma cuadrática por alguno de los métodos conocidos y ya tendríamos su rango y su signatura. Ahora bien, en este caso y dado que la función integrando es ≥ 0 deducimos que $q(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ para todo vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$. Si demostramos además que

$$q(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \quad (1)$$

la forma cuadrática será definida positiva y cualquier matriz diagonal que la representa ha de ser de la forma $D = \text{diag}\,(+, +, +)$. Veamos que se cumple (1). Por un conocido resultado de Análisis, si f es continua y positiva en un intervalo $[a, b]$ se verifica $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$ en $[a, b]$. La función $f(t) = (x_1 \cos t + x_2 \sin t + x_3)^2$ es continua y además ≥ 0 en $[0, \pi/2]$ por tanto:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1 \cos t + x_2 \sin t + x_3)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cos t + x_2 \sin t + x_3 = 0\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dando a t los valores $0, \pi/4, \pi/2$ obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ (\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{matrix}\right.$$

Resolviendo obtenemos $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. La forma cuadrática dada es definida positiva, en consecuencia su rango es 3 y su signatura, $s = (3, 0, 0)$.

13.15. Mínimo de una función cuadrática

1) La condición de mínimo para la función polinómica de segundo grado

$$p(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$$

es $ax = b$ y $a > 0$. Demostrar el siguiente resultado análogo para matrices:

Si A es una matriz simétrica definida positiva (es decir, $X^tAX > 0$ cuando $X \neq 0$) y B es un vector columna, entonces $p(X) = \dfrac{1}{2}X^tAX - X^tB$ tiene mínimo para X tal que $AX = B$.

Sugerencia: Si X verifica $AX = B$ e Y es un vector columna, estudiar el signo de $p(Y) - p(X)$ verificando que $p(Y) - p(X) = \dfrac{1}{2}[(Y - X)^tA(Y - X)]$.

2) Sea la función cuadrática $p(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2$. Aplicar el resultado anterior para hallar el punto (α, β) donde tiene mínimo. Verificar que en ese punto se anulan las derivadas parciales $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1) Veamos que si $AX = B$ entonces, $p(Y) - p(X) = \dfrac{1}{2}[(Y - X)^t A(Y - X)]$. Por una parte tenemos

$$p(Y) - p(X) = \frac{1}{2}Y^tAY - Y^tB - \frac{1}{2}X^tAX + X^tB = \frac{1}{2}Y^tAY - Y^tB + \frac{1}{2}X^tB.$$

La matriz X^tAY es simétrica (orden 1×1), y la matriz A es simétrica por hipótesis. Entonces:

$$X^tAY = (X^tAY)^t = Y^tA^tX = Y^tAX = Y^tB.$$

Desarrollando el segundo miembro de la sugerencia:

$$\frac{1}{2}[(Y - X)^tA(Y - X)] = \frac{1}{2}[(Y^t - X^t)A(Y - X)] = \frac{1}{2}[(Y^tA - X^tA)(Y - X)]$$

$$= \frac{1}{2}[Y^tAY - Y^tB - Y^tB + X^tB] = p(Y) - p(X).$$

Para todo $Y \neq X$ y teniendo en cuenta que A es definida positiva, se verifica:

$$p(Y) - p(X) = \frac{1}{2}[(Y - X)^tA(Y - X)] > 0.$$

Esto implica $p(Y) > p(X)$ para todo $Y \neq X$. Como consecuencia, la función p tiene un mínimo (además estricto) en X.

2) Podemos escribir

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) - 3x_2$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}X^tAX - X^tB.$$

La matriz A es simétrica y tiene sus menores principales mayores que cero, por tanto es definida positiva. Según el apartado anterior el mínimo de p se obtiene para la solución de $AX = B$:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (-3, 3).$$

Las parciales $\dfrac{\partial p}{\partial x_1} = x_1 + x_2$ y $\dfrac{\partial p}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 3$ se anulan en $(\alpha, \beta) = (-3, 3)$. Esto era de esperar por un conocido resultado de Análisis.

13.16. Funciones convexas y formas cuadráticas

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Se dice que una función real $f : V \to \mathbb{R}$ es convexa cuando $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall x, y \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$.

(a) Desde luego las formas lineales o funcionales $f : V \to \mathbb{R}$ son funciones convexas como fácilmente se puede comprobar, pero existen funciones convexas que no son lineales. Demostrar que la función $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es convexa y no lineal.
(b) Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Demostrar que si f es positiva (es decir $f(x) \geq 0$ para todo x de V) entonces f es convexa.
(c) Enunciar la propiedad recíproca de la anterior y estudiar su validez (en caso afirmativo dar una demostración y en caso contrario construir un contraejemplo). En todo caso dar una caracterización de las formas cuadráticas que son funciones convexas.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Elijamos el escalar $\lambda = 2$ y el vector $x = 1$. Entonces $f(\lambda x) = f(2) = 4$ y $\lambda f(1) = 2 \cdot 1 = 2$, es decir $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$ para algún λ y x y por tanto la función $f(x) = x^2$ no es lineal. Veamos que es convexa. Claramente una función f es convexa sí y sólo si:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \forall x, y \in V,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Para $f(x) = x^2$ tenemos:

$$(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 \leq \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 x^2 + 2\alpha(1-\alpha)xy + (1-\alpha)^2 y^2 - \alpha x^2 - (1-\alpha)y^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \alpha)x^2 + (\alpha^2 - \alpha)y^2 + 2(\alpha^2 - \alpha)xy \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \alpha)(x+y)^2 \leq 0.$$

La última desigualdad se verifica pues $\alpha^2 - \alpha \leq 0$ para todo α en $[0,1]$. Hemos demostrado por tanto que la función $f(x) = x^2$ es convexa pero no lineal.

(b) Por hipótesis $\dim V = n$ finita y $f(x) \geq 0$ para todo x de V. Por un conocido teorema, existe una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V respecto de la cual la expresión de f es:

$$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2\ , \quad (r \leq n\ ,\ x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n).$$

Sean $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n,\ y = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$ elementos cualesquiera de V y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$. Usando el apartado anterior:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^{r} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{r} (\alpha x_i^2 + \beta y_i^2) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{r} y_i^2 = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Es decir, toda forma cuadrática positiva es una función convexa.

(c) La proposición recíproca de la anterior es:

Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadráticca. Si f es convexa, entonces es positiva.

Veamos que es cierta. En efecto, supongamos que la forma cuadrática f no fuera positiva. Existiría entonces una base en V respecto de la cual la expresión de f es $f(x) = d_1x_1^2 + \ldots + d_rx_r^2$ $(r \leq n)$ en donde algún $d_i < 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d_1 < 0$. Elijamos los escalares $\alpha = 2/3$ $\beta = 1/3$ y los vectores $x, y \in V$ cuyas coordenadas en la base elegida son $(1, 0, \ldots, 0)$ y $(-1, 0, \ldots, 0)$ respectivamente. Entonces:

$$f(\alpha x + \beta y) = d_1/9 > d_1 = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

siendo $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$. Es decir, f no sería convexa. Podemos pues concluir que una forma cuadrática $f : V \to \mathbb{R}$ con V de dimensión finita es convexa sí, y sólo si es positiva.

13.17. Núcleo de una forma cuadrática

Sea E un espacio vectorial real, y $Q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Llamaremos núcleo de Q, y lo designaremos con $\ker Q$, al conjunto formado por los elementos x de E tales que $Q(x) = 0$.

1. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$ ($x = (x_1, x_2)$). Dibujar en el plano cartesiano (x_1, x_2) el conjunto $\ker Q$. Estudiar si $\ker Q$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $Q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática positiva, es decir $Q(x) \geq 0$ para todo x de E. Demostrar que $\ker Q$ es subespacio de E. Indicación: Se puede utilizar la identidad $Q(x + y) + Q(x - y) = 2(Q(x) + Q(y))$.

3. Sea A una matriz con coeficientes reales $m \times n$, y de rango r. La matriz $A^t \cdot A$ es simétrica y puede ser considerada como la matriz de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $Q(x) = X^t(A^tA)X$. Demostrar que Q es positiva y expresar $\ker Q$ en términos del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $AX = 0$. Indicación: Nótese que $Q(x) = (AX)^t(AX)$.

4. Clasificar la forma cuadrática del apartado anterior. Es decir, determinar los índices de positividad, de negatividad, y de nulidad, en términos de $m,\ n$ y r.

5. Como aplicación del apartado anterior, enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente que ha de cumplir la matriz A para que $A^t \cdot A$ sea una matriz invertible.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

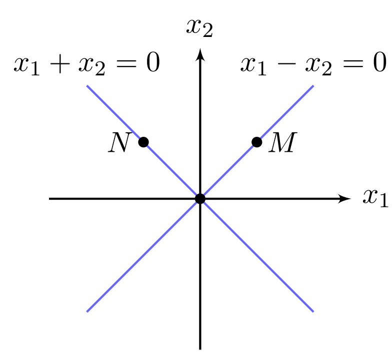
Solución. 1. Tenemos:

$$(x_1, x_2) \in \ker Q \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 = 0) \ \vee \ (x_1 - x_2 = 0).$$

Los vectores de $\ker Q$ son por tanto los vectores de la forma $\overrightarrow{OM}$ o bien $\overrightarrow{ON}$ siendo O el origen de coordenadas y $M,\ N$ puntos de las rectas $x_1 - x_2 = 0$ y $x_1 + x_2 = 0$ respectivamente.

Elijamos los vectores $(1, 1),\ (1, -1)$. Claramente pertenecen a $\ker Q$, sin embargo su suma $(2, 0)$ no pertenece, en consecuencia $\ker Q$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.



2. Aún no siendo obligatorio, demostremos la indicación. Si $Q : E \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, entonces existe una forma bilineal $f : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = f(x, x)$ para todo $x \in E$. Entonces:

$$\begin{aligned}Q(x+y)+Q(x-y) &= f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y) = \\ &f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)+ \\ &f(x,x)-f(y,x)-f(x,y)+f(y,y) = \\ &2f(x,x)+2f(y,y)=2Q(x)+2Q(y).\end{aligned}$$

Veamos que $\ker Q$ es subespacio de E:

(i) $Q(0)=f(0,0)=f(0,x-x)=f(0,x)-f(0,x)=0 \Rightarrow 0\in\ker Q$.

(ii) Sean $x,y\in\ker Q$. Entonces $Q(x)=0$ y $Q(y)=0$, en consecuencia se verifica $Q(x+y)+Q(x-y)=2(Q(x)+Q(y))=0$. Como Q es forma cuadrática positiva, tenemos $Q(x+y)\geq 0$ y $Q(x-y)\geq 0$. Esto implica $Q(x+y)=0$ o de manera equivalente que $x+y\in\ker Q$.

(iii) Sean $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x\in\ker Q$. Entonces:

$$Q(\lambda x)=f(\lambda x,\lambda x)=\lambda^2 f(x,x)=\lambda^2 Q(x)=\lambda^2 0=0\Rightarrow \lambda x\in\ker Q.$$

Hemos demostrado pues que si Q es una forma cuadrática positiva, entonces $\ker Q$ es un subespacio de E.

3. La matriz A tiene orden $m\times n$ por tanto A^t tiene orden $n\times m$, en consecuencia $A^t\cdot A$ tiene orden $n\times n$, es decir $s=n$. Por otra parte, aplicando propiedades bien conocidas de la trasposición: $(A^tA)^t=(A^t)(A^t)^t=A^tA$. Es decir, A^tA es matriz simétrica.

Veamos que la forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ Q(x)=X^t(A^tA)X$ es efectivamente positiva. LLamando $Y=(y_1,\ldots,y_m)^t=AX$:

$$Q(x)=X^t(A^tA)X=(AX)^t(AX)=Y^tY=y_1^2+\ldots+y_m^2\geq 0\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^n).$$

Caractericemos $\ker Q$:

$$x\in\ker Q\Leftrightarrow y_1^2+\ldots+y_m^2=0\Leftrightarrow Y=0\Leftrightarrow AX=0.$$

Es decir, los vectores de $\ker Q$ son las soluciones del sistema $AX=0$.

4. Dado que $\ker Q$ está determinado por las soluciones del sistema lineal homogéneo $AX=0$ tenemos $\dim(\ker Q)=n-r$. Si $\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-r}\}$ es una base de $\ker Q$, podemos ampliarla hasta obtener una base de vectores conjugados dos a dos de $\mathbb{R}^n$: $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-r},e_{n-r+1},\ldots,e_n\}$. En esta base la matriz de Q es:

$$D=\operatorname{diag}\left(Q(e_1,\ldots,Q(e_{n-r}),Q(e_{n-r+1}),\ldots,Q(e_n)\right).$$

con $Q(e_j) = 0$ si $0 \leq j \leq n - r$ y $Q(e_j) > 0$ si $n - r + 1 \leq j \leq n$. Por tanto los índices pedidos son $(r, 0, n - r)$.

5. La matriz $A^t A$ es congruente con D y como consecuencia tienen el mismo rango. Entonces, $A^t A$ es invertible sí y sólo si D lo es, y esto ocurre exactamente cuando el índice de nulidad $n - r$ es cero. Por tanto, $A^t A$ es invertible sí y sólo si $\text{rg}(A) = n$.

13.18. Forma cuadrática multiplicativa

Sean $E = \mathbb{R}^{(2\times 2)},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y

$B = (\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ ).$

Sea Φ una forma cuadrática sobre E no nula tal que para todo $A, B \in E$ verifica $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ y ϕ la forma bilineal simétrica asociada.

1. Hallar $\Phi(I),\ \Phi(B_2),\ \Phi(B_3)$ y $\Phi(B_1)\Phi(B_4)$.
2. Si A es invertible, probar que $\Phi(A) \neq 0$.
3. Si A es singular demostrar que $A^2 = 0$ o bien existen $\exists P, Q \in E$ regulares tales que

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \text{ y } A = Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} Q.$$

Sugerencia. Estudiar posibles polinomios mínimos de A.
4. Demostrar que si A es singular, entonces $\Phi(A) = 0$.
5. Calcular $\phi(I, J)$ y $\Phi(J)$.
6. Calcular la matriz H de ϕ respecto de B.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Como $\Phi \neq 0$, existe $A \in E$ tal que $\Phi(A) \neq 0$. Entonces $\Phi(A) = \Phi(AI) = \Phi(A)\Phi(I)$ lo cual implica $\Phi(I) = 1$. Dado que $B_2^2 = 0$, y Φ es forma cuadrática, se verifica $0 = \Phi(0) = \Phi(B_2^2) = (\Phi(B_2))^2$ de lo que se deduce que $\Phi(B_2) = 0$. Razonando de manera análoga, $\Phi(B_3) = 0$. Por otra parte, $\Phi(B_1)\Phi(B_4) = \Phi(B_1 B_4) = \Phi(0) = 0$.

2. Si A es invertible, entonces $1 = \Phi(I) = \Phi(AA^{-1}) = \Phi(A)\Phi(A^{-1})$. Es decir, $\Phi(A) \neq 0$.

3. Si A es singular, entonces 0 es valor propio de A. Si $A^2 \neq 0$ entonces ni $\mu(\lambda) = \lambda$ ni $\mu(\lambda) = \lambda^2$ pueden ser polinomios mínimos de A (en ambos casos

tendríamos $A^2 = 0$). Por tanto, el polinomio mínimo de A ha de ser de la forma $\mu(\lambda) = \lambda(\lambda - \alpha)$ con $\alpha \neq 0$ real. Esto implica que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y semejante a la matriz diag $(\alpha, 0)$ y a la matriz diag $(0, \alpha)$ con lo cual hemos demostrado el aserto de este apartado.

4. Si $A^2 = 0$ entonces $0 = \Phi(A^2) = (\Phi(A))^2 = 0$ lo cual implica que $\Phi(A) = 0$. Sea ahora $A^2 \neq 0$. Si $R \in E$ es invertible, entonces

$$1 = \Phi(I) = \Phi(RR^{-1}) = \Phi(R)\Phi(R^{-1}) \Rightarrow \Phi(R^{-1}) = (\Phi(R))^{-1}.$$

Usando el apartado anterior

$$\Phi(A) = \Phi(P^{-1}(\alpha B_1)P) = \Phi(P^{-1})(\alpha^2\Phi(B_1))\Phi(P) = \alpha^2\Phi(B_1),$$

$$\Phi(A) = \Phi(Q^{-1}(\alpha B_4)Q) = \Phi(Q^{-1})(\alpha^2\Phi(B_4))\Phi(Q) = \alpha^2\Phi(B_4).$$

Multiplicando y usando el primer apartado, $(\Phi(A))^2 = \alpha^4\Phi(B_1)\Phi(B_4) = 0$. Como $\alpha \neq 0$, deducimos que $\Phi(A) = 0$.

5. Como $I + J$ e $I - J$ son singulares:

$$0 = \Phi(I+J) = \phi(I+J, I+J) = \Phi(I)+\Phi(J)+2\phi(I, J) = 1+\Phi(J)+2\phi(I, J),$$

$$0 = \Phi(I-J) = \phi(I-J, I-J) = \Phi(I)+\Phi(J)-2\phi(I, J) = 1+\Phi(J)-2\phi(I, J).$$

Resolviendo el correspondiente sistema, obtenemos inmediatamente que $\Phi(J) = -1$ y $\Phi(I, J) = 0$.

6. La matriz pedida es la matriz simétrica $H = [\phi(B_i, B_j)]$ $i, j = 1, 2, 3, 4$. Usando la conocida fórmula de la forma polar y que $\Phi(B_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\phi(B_i, B_j) = \frac{1}{2}(\Phi(B_i + B_j) - \Phi(B_i) - \Phi(B_j)) = \frac{1}{2}\Phi(B_i + B_j).$$

Teniendo en cuenta que $\Phi(I) = 1,\ \Phi(J) = -1$ y $\Phi(A) = 0$ si A es singular, obtenemos

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13.19. Semejanza, congruencia y equivalencia de dos matrices

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinar los valores de a para los cuales A y B son matrices semejantes. En estos casos hallar matrices invertibles P tales que $B = P^{-1}AP$.
2. Determinar los valores de a para los cuales A y B son matrices congruentes. En estos casos hallar matrices invertibles P tales que $B = P^tAP$.
3. Determinar los valores de a para los cuales A y B son matrices equivalentes. En estos casos hallar matrices invertibles P y Q tales que $B = PAQ$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Si A y B son semejantes, necesariamente $\text{tr}A = \text{tr}B$ es decir, $2a = 2$ o bien $a = 1$. Pero en este caso $A = B$ y en consecuencia $B = I^{-1}AI$. Podemos concluir: A y B son semejantes sí y sólo si $a = 1$ y en este caso basta elegir $P = I$.

2. Sabemos que dos matrices A y B reales simétricas y del mismo orden son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura (índice de positividad, de negatividad y nulidad). Al ser ambas matrices simétricas podemos aplicar el teorema espectral para encontrar matrices diagonales congruentes con las dadas. Valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & a \\ 1 & -\lambda & 1 \\ a & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = a + \sqrt{a^2+2},\ \lambda_3 = a - \sqrt{a^2+2}.$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$ es decir, $\text{sig}A = (1,1,1)$. De manera análoga obtenemos los valores propios de B: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1 + \sqrt{1+2a^2}$ y $\mu_3 = 1 - \sqrt{1+2a^2}$. Claramente obtenemos $\text{sig}B = (1,1,1)$ si $a \neq 0$ y $\text{sig}B = (1,0,2)$ si $a \neq 0$. Podemos concluir que A y B son congruentes si y sólo si $a \neq 0$.
Para $a \neq 0$ sabemos que existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertible tal que $Q^tAQ = D$ y una $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertible tal que $S^tAS = D$ siendo $D = \text{diag}\,(1,-1,0)$. Igualando:

$$S^tBS = Q^tAQ \Rightarrow B = (S^t)^{-1}Q^tAQS^{-1}$$

$$\Rightarrow B = (QS^{-1})^t A (QS^{-1}) \Rightarrow B = (QS^{-1})^t A (QS^{-1}).$$

Basta elegir pues $P = QS^{-1}$. Aplicando (por ejemplo) el método de las transformaciones elementales por filas y columnas podemos fácilmente hallar Q y S. Omitimos los cálculos por lo rutinario de los mismos. Una solución sería

$$P = QS^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{a}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{a}} - 1 \\ 0 & a\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Las matrices A y B son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Fácilmente verificamos que $\operatorname{rg}A = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{rg}B = 2$ para $a \neq 0$ real y $\operatorname{rg}B = 1$ para $a = 0$. Por tanto A y B son equivalentes si y sólo si $a \neq 0$. Del apartado anterior tenemos una igualdad $B = P^t AP$, es decir basta elegir como nuevas matrices P y Q la matriz del apartado anterior y su traspuesta.

13.20. Forma bilineal y sistema diferencial

Sea E el espacio vectorial de las matrices reales y cuadradas de orden 2. Se define la aplicación:

$$f : E \times E \to \mathbb{R}\ , \quad (A, B) \to \det(A + B) - \det(A - B).$$

1. Probar que f es una forma bilineal simétrica. 2. Encontrar una base $B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ de E de vectores conjugados dos a dos respecto de f tal que

$$f(B_1, B_1) = f(B_2, B_2) = -f(B_3, B_3) = -f(B_4, B_4) = 1.$$

3. Sea M la matriz de f respecto de B. Encontrar una matriz real N tal que $N^2 = M$. Sea $x \geq 0$ y la función $g(x) = x^{1/2}$. ¿Existe $g(M)$?
4. Determinar la solución ϕ del sistema de ecuaciones diferenciales $X' = NX$ sabiendo que $\phi(0, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Consideremos la matrices genéricas de E :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\ , \quad B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos

$$f(A, B) = \det \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 & x_4 - y_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_4 + 2x_4y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que toda función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ de la forma X^tMY con $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $Y = (y_1, \ldots y_n)^t$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y M simétrica, representa una forma bilineal simétrica. En consecuencia lo es f, pues basta tener en cuenta que en nuestro caso A y B están representadas por sus coordenadas una base de E (en concreto la canónica).

2. Tenemos que encontrar una matriz P de cambio de base tal que $P^tMP = D$, siendo $D = \text{diag }(1, 1, -1, -1)$. Para ello aplicaremos el teorema espectral. Valores propios de M :

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda + 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda & 0 \\ 2 - \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda + 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda + 2)(-\lambda - 2)(\lambda^2 - 4) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2.$$

Es decir, 2 (doble) y -2 (doble). Los subespacios propios son:

$$V_2 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases}, \quad V_{-2} \equiv \begin{cases} 2x_1 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Unas bases ortogomales de V_2 y V_{-2} con respecto del producto escalar usual son

$$B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}, \quad B_{-2} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}.$$

Como la matriz M es simétrica, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales dos a dos. Esto implica que los cuatro vectores anteriores forman una base ortogonal y de vectores propios asociados a M.

Dividiendo entre la norma de cada uno de los vectores, obtenemos una base ortonormal y de vectores propios de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0) \right\}.$$

La matriz P de cambio de la base canónica a la $\mathcal{C}$ es por tanto ortogonal y satisface

$$P^{-1}MP = P^tMP = D = \text{diag }(2,2,-2,-2).$$

Es decir, $(\frac{1}{\sqrt{2}}P)^tM(\frac{1}{\sqrt{2}}P) = \text{diag }(1,1,-1,-1)$. Teniendo en cuenta que estamos trabajando en coordenadas respecto de la base canónica de E, deducimos que los vectores de la base B pedida son:

$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Para hallar una matriz N tal que $N^2 = M$ tengamos en cuenta que M se puede expresar en cajas de la siguiente manera

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \text{ con } M_1 = I_2,\ M_2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}.$$

Dado que M_2 representa un giro de ángulo π, es el cuadrado de un giro de ángulo $\pi/2$. Teniendo en cuenta esto, hallamos N :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Los valores propios de N son 1 (doble) y $\pm i$ (simples). Los subespacios propios asociados a 1 e i son

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases},\quad V_i \equiv \begin{cases} (1-i)x_1 = 0 \\ (1-i)x_2 = 0 \\ -ix_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - ix_4 = 0. \end{cases}$$

Unas bases de estos subespacios propios son

$$B_1 = \{e_1 = (1,0,0,0)^t,\ e_2 = (0,1,0,0)^t\} \quad B_i = \{e_3 = (0,0,i,1)^t\}.$$

Dado que N es real, una base el subespacio propio asociado al valor propio $-i$ se obtiene conjugando e_3. Por tanto, la matriz $P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \overline{e_3} \end{bmatrix}$ cumple

$$P^{-1}NP = \mathcal{D} = \text{diag } (1, 1, i, -i).$$

La función ϕ pedida es por tanto

$$\phi(t) = e^{tN} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Pe^{t\mathcal{D}}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que P es diagonal por cajas, fácilmente obtenemos:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

13.21. Cociente de Rayleigh

Propuesto en examen de Álgebra de Ingenieros de Montes de la UPM. Trata sobre el cociente de Rayleigh X^tAX/X^tBX, si bien no se menciona en el enunciado este nombre.

Sean $q_1(x) = X^tAX$ y $q_2(x) = X^tBX$ dos formas cuadráticas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, siendo A y B matrices cuadradas de orden n, reales y simétricas. Se supone que q_2 es definida positiva. Entonces se sabe (y lo admitiremos) que existe un cambio de base de ecuación $X = PY$ que permite diagonalizar simultaneamente las dos formas cuadráticas, expresándolas en la forma:

$$q_1(x) = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \ldots + a_ny_n^2$$
$$q_2(x) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

Se pide:

1. Encontrar y justificar una relación entre los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y las raíces de la ecuación $\det(A - \lambda B) = 0$.
2. Clasificar las formas cuadráticas q_1 y q_2 en el caso particular:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como aplicación, diagonalizar simultaneamente en este caso las formas cuadráticas q_1 y q_2 (no se pide la matriz de paso P).
3. Ordenar de menor a mayor:

$$\text{máx}\,\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\,,\ \text{mín}\,\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\,,\ \frac{X^t AX}{X^t BX}\ (X \neq 0)$$

Como aplicación, encontrar los valores máximo y mínimo de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = X^t AX$, con la condición $X^t BX = 1$.
4. Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores columna de la matriz P de paso, comprobar que se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} (i)\ & Av_1 = a_1 Bv_1,\ Av_2 = a_2 Bv_2, \ldots, Av_n = a_n Bv_n \\ (ii)\ & v_i^t Bv_j = 0 \text{ si } i \neq j, \quad v_i^t Bv_i = 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

5. Las condiciones del apartado 4. permiten hallar una matriz de paso P. Escribir detalladamente dichas condiciones para las matrices A y B del apartado 2., en particular, determinar el cambio de base $X = PY$ que diagonalice de manera simultánea las formas cuadráticas q_1 y q_2 del apartado 2.

Solución. 1. Por hipótesis existe una matriz P real invertible y de orden n tal que $P^t AP = D$ con $D = \text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ y $P^t BP = I$. Despejando las matrices A y B obtenemos $A = (P^t)^{-1} DP^{-1}$ y $B = (P^t)^{-1} IP^{-1}$. Entonces:

$$\det(A - \lambda B) = \det\left((P^t)^{-1}(D - \lambda I)P^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\det(P^t)} \cdot \det(D - \lambda I) \cdot \frac{1}{\det P} = \frac{1}{(\det P)^2} \cdot \det(D - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(D - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (a_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_n - \lambda) = 0.$$

Es decir, $a_1, \ldots, a_n$ son exactamente las raíces de $\det(A - \lambda B) = 0$.

2. La matriz A tiene determinante -1 que es igual al producto de sus valores propios. Uno ha de ser positivo y otro negativo, por tanto q_1 es indefinida. La matriz B tiene todos sus menores principales mayores que 0, por tanto q_2 es definida positiva. Ahora:

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Las soluciones de la anterior ecuación son $1/3$ y -1 . De acuerdo con el apartado 1. existe un cambio de base de ecuación $X = PY$ de tal manera que:

$$q_1(x) = \frac{1}{3}y_1^2 - y_2^2\ , \quad q_2(x) = y_1^2 + y_2^2.$$

3. Llamemos $M = \text{máx}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Usando el cambio $X = PY$ tenemos:

$$\frac{X^tAX}{X^tBX} = \frac{(PY)^tA(PY)}{(PY)^tB(PY)} = \frac{Y^tP^tAPY}{Y^tP^tAPY} = \frac{Y^tDY}{Y^tIY} =$$
$$\frac{a_1y_1^2 + \ldots + a_ny_n^2}{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \leq \frac{My_1^2 + \ldots + My_n^2}{y_1^2 + \ldots + y_n^2} = \frac{M(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}{y_1^2 + \ldots + y_n^2} = M.$$

El razonamiento para $m = \text{mín}\{a_1, \ldots, a_n\}$ es totalmente simétrico. Podemos pues concluir que:

$$m = \text{mín}\,\{a_1, \ldots, a_n\} \leq \frac{X^tAX}{X^tBX} \leq M = \text{máx}\,\{a_1, \ldots, a_n\}\ \ (\forall X \neq 0).$$

Nótese que al ser q_2 definida positiva, si $X \neq 0$ entonces $X^tBX \neq 0$ es decir, el cociente anterior está bien definido.

Por lo demostrado anteriormente, $m \leq F \leq M$. Veamos que F alcanza los valores m y M. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m = a_1$ y que $M = a_n$. Obsérvese que la condición $X^tBX = 1$ equivale a $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$. Si elegimos $X_1 = PY_1$ y $X_n = PY_n$ con $Y_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$, $Y_n = (0, 0, \ldots, 1)^t$ tenemos $X_1^tAX_1 = a_1 = m$ y $X_n^tAX_n = a_n = M$. Es decir, el máximo para F es M y el mínimo m.

4. De $P^tAP = D$ se deduce $AP = (P^t)^{-1}D$ y de $P^tBP = I$ que $BP = (P^t)^{-1}$. Por tanto $AP = BPD$. Tenemos:

$$AP = BPD \Rightarrow A\left[v_1, \ldots, v_n\right] = B\left[a_1v_1, \ldots, a_nv_n\right] \Rightarrow$$
$$\left[Av_1, \ldots, Av_n\right] = \left[a_1Bv_1, \ldots, a_nBv_n\right] \Rightarrow Av_i = a_iBv_i\ (i = 1, \ldots, n).$$

Por otra parte:

$$P^tBP = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} B\left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right] = \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} \left[Bv_1, Bv_2, \ldots, Bv_n\right]$$
$$\begin{bmatrix} v_1^tBv_1 & v_1^tBv_2 & \ldots & v_1^tBv_n \\ v_2^tBv_1 & v_2^tBv_2 & \ldots & v_2^tBv_n \\ \vdots & & & \vdots \\ v_n^tBv_1 & v_n^tBv_2 & \ldots & v_n^tBv_n \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow v_i^tBv_j = \delta_{ij}\ (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

en donde δ_{ij} son las deltas de Kronecker. Quedan pues demostradas las condiciones pedidas.

5. Llamando $v_1 = (x, y)^t,\ v_2 = (z, u)^t$ obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x, y) = (\alpha, \alpha) \ (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (z, u) = (-\beta, \beta) \ (\beta \in \mathbb{R}).$$

Obligando a que $v_i^t B v_i = 1$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} &= 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{6}/6, \\ (-\beta, \beta) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} &= 1 \Leftrightarrow \beta = \pm\sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

Por otra parte, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$(\alpha, \alpha) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

por tanto, eligiendo $\alpha = \sqrt{6}/6$ y $\beta = \sqrt{2}/2$ obtenemos la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 14

Producto escalar

14.1. Concepto de producto escalar real

1. Demostrar que

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ vectores de $\mathbb{R}^n$ es un producto escalar (se le denomina producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$).

2. Sea $E = \mathcal{C}[a, b]$ el espacio vectorial real de las funciones reales continuas $x(t)$ definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que la siguiente aplicación es un producto escalar en E

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\ dt.$$

3. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = \left(x_1, x_2, x_3\right) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

4. Demostrar que $\langle X, Y\rangle = \text{traza}\left(X^TY\right)$ es un producto escalar en el espacio vectorial E de las matrices reales cuadradas de órdenes n.

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\ dx.$$

$a)$ Determinar la matriz de Gram respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. $b)$ Calcular $\displaystyle\int_0^1 (1+x)(3-x^2)\,dx$ usando la matriz de Gram.

Solución. 1. La expresión matricial de $\langle\ ,\ \rangle$ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots, x_n \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

luego $\langle\ ,\ \rangle$ es una forma bilineal. Además, es simétrica pues la matriz identidad I lo es. Claramente todos los menores principales de I son mayores que cero (en concreto iguales a 1), por tanto, la forma cuadrática asociada a $\langle\ ,\ \rangle$ es definida positiva, lo cual implica que $\langle\ ,\ \rangle$ es producto escalar.

2. La aplicación está bien definida pues la integral de una función continua en un intervalo cerrado siempre existe y es además un número real.
(i) Para todo $x(t), y(t)$ elementos de E se verifica

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,dt = \int_a^b y(t)x(t)\,dt = \langle y(t), x(t)\rangle .$$

(ii) Para todo α, β números reales y para todo $x(t), y(t), z(t)$ elementos de E se verifica:

$$\langle \alpha x(t) + \beta y(t), z(t)\rangle = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))\, z(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (\alpha x(t)z(t) + \beta y(t)z(t))\,dt = \alpha \int_a^b x(t)z(t)\,dt$$

$$+\beta \int_a^b y(t)z(t)\,dt = \alpha \langle x(t), z(t)\rangle + \beta \langle y(t), z(t)\rangle .$$

(iii) Si $x(t)$ es una función no nula de E :

$$\langle x(t), x(t)\rangle = \int_a^b x(t)x(t)\,dt = \int_a^b x(t)^2 dt.$$

La función $x(t)^2$ es no nula y no negativa en $[a, b]$. Por un conocido resultado de Cálculo, su integral es positiva, es decir $\langle x(t), x(t)\rangle > 0$. Concluimos que la aplicación dada es un producto escalar.

3. La expresión dada es una forma bilineal. Además es simétrica pues la matriz que la representa lo es. Para que la forma cuadrática asociada sea definida positiva, todos los menores prricipales

$$A_1 = |1| = 1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_3 = |A| = a - 10,$$

han de ser positivos. Esto ocurre si, y sólo si $a > 10$.

4. (i) Para todo X, Y elementos de E, y usando conocidas propiedades de la traza:

$$\langle X, Y \rangle = \text{traza}\left(X^T Y\right) = \text{traza}\left(\left(X^T Y\right)^T\right) = \text{traza}\left(Y^T X\right) = \langle Y, X \rangle .$$

(ii) Para todo α, β números reales, para todo X, Y, Z elementos de E, y usando conocidas propiedades de la traza:

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \text{traza}\left((\alpha X + \beta Y)^T Z\right) = \text{traza}\left(\left(\alpha X^T + \beta Y^T\right) Z\right)$$

$$= \text{traza}\left(\alpha X^T Z + \beta Y^T Z\right) = \alpha \text{ traza}\left(X^T Z\right) + \beta \text{ traza}\left(Y^T Z\right)$$

$$= \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle .$$

(iii) Si $X = [x_{ij}]$ es una matriz no nula de E,

$$\langle X, X \rangle = \text{traza}\left(X^T X\right)$$

$$= \text{traza} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{traza} \begin{bmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{n1}^2 & \dots & \\ & \dots & \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & x_{1n}^2 + x_{2n}^2 + \dots + x_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(x_{11}^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{n1}^2\right) + \dots + \left(x_{1n}^2 + x_{2n}^2 + \dots + x_{nn}^2\right) .$$

La suma anterior es la suma de los cuadrados de todos los elementos de la matriz X. Como $X \neq 0$, algún x_{ij} es no nulo y por tanto $\langle X, X \rangle > 0$. Concluimos que la aplicación dada es un producto escalar.

5. *a*) Tenemos

$$\langle 1,1\rangle=\int_0^1 1\;dx=1,\;\langle 1,x\rangle=\langle x,1\rangle=\int_0^1 x\;dx=1/2,$$

$$\left\langle 1,x^2\right\rangle=\left\langle x^2,1\right\rangle=\int_0^1 x^2\;dx=1/3,\;\langle x,x\rangle=\int_0^1 x^2\;dx=1/3,$$

$$\left\langle x,x^2\right\rangle=\left\langle x^2,x\right\rangle=\int_0^1 x^3\;dx=1/4,\;\left\langle x^2,x^2\right\rangle=\int_0^1 x^4\;dx=1/5.$$

La matriz de Gram respecto de la base canónica $B=\{1,x,x^2\}$ es por tanto

$$G=\begin{pmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \left\langle 1,x^2\right\rangle\\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \left\langle x,x^2\right\rangle\\ \left\langle x^2,1\right\rangle & \left\langle x^2,x\right\rangle & \left\langle x^2,x^2\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}.$$

b) Podemos expresar

$$\int_0^1 (1+x)(3-x^2)\;dx=\left\langle 1+x,3-x^2\right\rangle$$

$$=\big(1,1,0\big)\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\big(3/2,5/6,7/12\big)\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{9}{2}-\frac{7}{12}=\frac{47}{12}.$$

14.2. Espacio euclideo, norma

1. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}_2[x]$ dotado del producto escalar

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\;dx,$$

determinar la norma del vector $p(x)=-1+2x+3x^2$.

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}_2[x]$ dotado del producto escalar

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{i=0}^{2}p(i)q(i),$$

determinar la norma del vector $p(x)=-1+2x+3x^2$.

3. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

determinar la norma del vector $x = (1, -1, 2)$.

Solución. 1. Aplicando la definición de norma,

$$\|p(x)\| = \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (-1 + 2x + 3x^2)^2 \, dx}.$$

Calculando la integral del radicando obtenemos el valor $47/15$, por tanto

$$\|p(x)\| = \sqrt{\frac{47}{15}}.$$

2. Aplicando la definición de norma,

$$\begin{aligned} \|p(x)\| &= \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} = \sqrt{p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 15^2} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. El producto escalar $\langle x, x\rangle$ es

$$\langle x, x\rangle = \begin{pmatrix} 1, -1, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, -3, 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 14,$$

luego $\|x\| = \sqrt{14}$.

14.3. Desigualdad de Schwartz, ángulos

1. En el espacio vectorial de las funciones reales de clase 2 en el intervalo $[-1, 1]$ se considera el producto escalar

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^1 \big(f(t)g(t) + f''(t)g''(t)\big) \, dt.$$

Hallar el ángulo formado por las funciones $f(t) = 1 + 4t + t^2$ y $g(t) = 1 - t$.

2. En el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor que 3 se considera el producto escalar

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{3} p(i)q(i).$$

Calcular el ángulo formado por los polinomios x^2+1 y x^2-3x+1.

3. Sea E un espacio euclídeo. Demostrar que se verifica la desigualdad de Schwartz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y\in E.$$

4. Sea E un espacio euclídeo. Demostrar las propiedades
1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}\ \forall x\in E$.
3) $\|x+y\|\leq \|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in E$

Solución. 1. El producto escalar de los vectores dados es

$$\langle f(t),g(t)\rangle = \int_{-1}^{1}\big((1+4t+t^2)(1-t)+0\big)\,dt = \ldots = 0.$$

Dado que $f(t)$ y $g(t)$ son no nulos, $\|f(t)\|\,\|g(t)\|\neq 0$. Por tanto

$$\cos\alpha = \frac{\langle f(t),g(t)\rangle}{\|f(t)\|\,\|g(t)\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

2. Llamemos $p(x)=x^2+1$ y $q(x)=x^2-3x+1$. Tenemos

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2) = 1\cdot 1+2\cdot(-1)+5\cdot(-1) = -6,$$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} = \sqrt{p(0)^2+p(1)^2+p(2)^2} = \sqrt{1^2+2^2+5^2} = \sqrt{30},$$

$$\|q\| = \sqrt{\langle q,q\rangle} = \sqrt{q(0)^2+q(1)^2+q(2)^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Si $\alpha\in[0,\pi]$ es el ángulo que forman p y $q:$

$$\cos\alpha = \frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\,\|q\|} = \frac{-6}{\sqrt{30}\sqrt{3}} = \frac{-6}{3\sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

En consecuencia:

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right), \quad (\alpha\in[0,\pi]).$$

3. Sea $t\in\mathbb{R}$ y consideremos la función $p(t)=\langle x+ty,x+ty\rangle$. Por la propiedad $\langle a,a\rangle\geq 0$ para todo $a\in E$, se verifica $p(t)\geq 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Desarrollando $p(t):$

$$p(t) = \langle x+ty,x+ty\rangle = \|x\|^2+2t\,\langle x,y\rangle+t^2\,\|y\|^2 \geq 0\ (\forall t\in\mathbb{R}).$$

El polinomio $p(t)$ es de segundo grado y no toma valores negativos, lo cual implica que no puede tener dos raíces reales distintas. En consecuencia, su discriminante ha de ser ≤ 0 :

$$4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Equivalentemente, $\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, o bien

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y \in E.$$

4. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $x,y \in E$:
1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2) $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\|x\|^2 \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
3) Desarrollemos $\|x+y\|^2$:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 .$$

Por la desigualdad de Schwartz, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ por tanto,

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Tomando raíces cuadradas queda $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

14.4. Ortogonalidad en el espacio euclídeo

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1}\big(p(x)q(x) + p''(x)q''(x)\big)\,dx.$$

Comprobar que los vectores $p(x) = 1+4x+x^2$ y $q(x) = 1-x$ son ortogonales.

2. Sea E un espacio euclídeo. Demostrar que
1) El vector 0 es ortogonal a todos los vectores de E
2) El vector 0 es el único que satisface la propiedad anterior.
3) Un vector es ortogonal a todos los vectores de un subespacio F de E si, y sólo si es ortogonal a los de una base de F.
4) Todo subconjunto S de E formado por vectores ostogonales dos a dos y no nulos es linealmente independiente.

3. Demostrar el teorema de Pitágoras:
Si x e y son vectores de un espacio euclídeo, $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Solución. 1. El producto escalar de los vectores dados es

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} \big((1+4x+x^2)(1-x)+0\big)\,dx = \ldots = 0,$$

luego $p(x)$ y $q(x)$ son ortogonales.

2. 1) Para todo $x \in E$, $\langle 0, x\rangle = \langle x-x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle = 0$.
2) Si $x \in E$ es ortogonal a todos los vectores de E, en particular es ortogonal a sí mismo por tanto $\langle x, x\rangle = 0$ lo cual implica $x = 0$.
3) Sea B una base del subespacio F y supongamos que x es ortogonal a B. Sea $y \in E$. Como B es base de E existe un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de B tal que

$$y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Entonces, y teniendo en cuenta que x es ortogonal a B :

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m\rangle = \lambda_1 \langle x, v_1\rangle + \cdots + \lambda_m \langle x, v_m\rangle$$

$$= \lambda_1 \cdot 0 + \cdots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow x \text{ es ortogonal a } y.$$

Es decir, x es ortogonal a F.
Recíprocamente, si x es ortogonal a F, es trivialmente ortogonal a $B \subset F$.
4) Sea $S_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ un subconjuto finito de S. Veamos que es linealmente independiente. En efecto, sea $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ con los $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Multiplicando escalarmente la igualdad anterior por u_i, teniendo en cuenta que u_i es ortogonal a los demás vectores de S_1 y que $\|u_i\| \neq 0$:

$$\langle u_i, \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p\rangle = \langle u_i, 0\rangle \Rightarrow \alpha_1 \langle u_i, u_1\rangle + \cdots + \alpha_p \langle u_i, u_p\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i \langle u_i, u_i\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i \|u_i\| = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

El razonamiento es válido para todo $i = 1, \ldots, p$ luego S_1 es linealmente independiente, lo cual implica que S también lo es.

14.5. Bases ortonormales, método de Schmidt

1. Demostrar que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal con el producto escalar usual.

2. Ortonormalizar la base $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ por el método de Schmidt, con el producto escalar

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Ortonormalizar por el método de Schmidt la base

$$B = \{(2,-1,0),(3,0-4),(2,1,3)\}.$$

4. Sea E espacio euclídeo de dimensión finita n. Demostrar que si la base B de E es ortonormal, entonces para todo $x, y \in E$ se verifica

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

en donde $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ son los respectivos vectores de coordenadas de x e y en la base B.

5. Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ un sistema libre de un espacio euclídeo. Demostrar que existe un sistema ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ con el mismo número de elementos tal que

$$L[u_1, \ldots, u_k] = L[e_1, \ldots, e_k] \quad (\forall k,\ 1 \leq k \leq m).$$

6. Sea E un espacio euclídeo de dimensión finita n y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de E. Demostrar que $B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es base ortonormal de E, siendo

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|},$$

$$e_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, e_2\rangle e_2 - \langle u_3, e_1\rangle e_1}{\|u_3 - \langle u_3, e_2\rangle e_2 - \langle u_3, e_1\rangle e_1\|},$$

$$\ldots$$

$$e_n = \frac{u_n - \langle u_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - \cdots - \langle u_n, e_1\rangle e_1}{\|u_n - \langle u_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} - \cdots - \langle u_n, e_1\rangle e_1\|}.$$

Solución. 1. Si $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ es el i-ésimo vector de la base canónica e $i \neq j$, claramente $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. Por otra parte, $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i\rangle} = \sqrt{1} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. Dada una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de un espacio euclídeo E sabemos que la ortonormalizada por el método de Gram-Schmidt viene dada por

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|},$$

$$e_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1}{\|u_3 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1\|}.$$

Procedemos a efectuar los cálculos para $u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2$

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx} = 1 \Rightarrow e_1 = 1,$$

$$u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = x - \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx\right) \cdot 1 = x$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow e_2 = \sqrt{3}x,$$

$$u_3 - < u_3, e_2 > e_2 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 = x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx\right) \cdot \sqrt{3}x -$$

$$\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5}} \Rightarrow e_3 = (3\sqrt{5}/2)(x^2 - 1/3).$$

La base pedida es por tanto $B' = \{1,\ \sqrt{3}x,\ (3\sqrt{5}/2)(x^2 - 1/3)\}$.

3. Para facilitar los cálculos expresamos

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

Llamamos $u_1 = (2, -1, 0),\ u_2 = (3, 0 - 4),\ u_3 = (2, 1, 3)\}$. Sea $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base pedida. Vector e_1 :

$$\|u_1\| = \sqrt{\langle (2, -1, 0), (2, -1, 0) \rangle} = 1 \Rightarrow e_1 = (2, -1, 0).$$

Vector e_2 :

$$u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = (3, 0 - 4) - \langle (3, 0 - 4), (2, -1, 0) \rangle \cdot (2, -1, 0)$$

$$(3, 0 - 4) - 0 \cdot (2, -1, 0) = (3, 0, -4)$$

$$\Rightarrow \|(3, 0, -4)\| = \sqrt{\langle (3, 0, -4), (3, 0, -4) \rangle} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{5}(3, 0, -4).$$

Vector e_3 :

$$u_3 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 = (2, 1, 3) - \frac{1}{5}\langle (2, 1, 3), (3, 0, -4) \rangle \cdot \frac{1}{5}(3, 0, -4)$$

$$-\langle(2,1,3),(2,-1,0)\rangle\cdot(2,-1,0)=(2,1,3)-0\cdot\frac{1}{5}(3,0,-4)$$
$$-(-1)\cdot(2,-1,0)=(4,0,3)\Rightarrow\|(4,0,3)\|$$
$$=\sqrt{\langle(4,0,3),(4,0,3)\rangle}=\sqrt{25}=5\Rightarrow e_3=\frac{1}{5}(4,0,3).$$

La base pedida es por tanto

$$B'=\left\{(2,-1,0),\ \frac{1}{5}(3,0,-4),\ \frac{1}{5}(4,0,3)\right\}.$$

4. Si la base $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ es ortonormal, se verifica $\langle e_i,e_j\rangle=0$ si $i\neq j$ y $\langle e_i,e_i\rangle=1$ para todo $i=1,\dots,n$. Por tanto, para todo $x,y\in E:$

$$\langle x,y\rangle=\big(x_1,x_2,\dots,x_n\big)\begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle\\ \vdots & & & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=\big(x_1,x_2,\dots,x_n\big)\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

5. Para $m=1$ es inmediato pues $u_1\neq 0$ y basta normalizar u_1, es decir formar el vector de norma 1:

$$e_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Supongamos que la propiedad es cierta para $m-1$ y que $\{u_1,\dots,u_m\}$ es un sistema libre. Por la hipótesis de inducción existe un sistema ortonormal $\{e_1,\dots,e_{m-1}\}$ de vectores tal que

$$L[u_1,\dots,u_k]=L[e_1,\dots,e_k]\quad(\forall k,\ 1\leq k\leq m-1).$$

Queremos hallar un vector w_m no nulo que sea ortogonal a $\{e_1,\dots,e_{m-1}\}$ y que pertenezca a $L[u_1,\dots,u_{m-1},u_m]=L[e_1,\dots,e_{m-1},u_m]$. Elijamos w_m de la forma $w_m=\lambda_1e_1+\ldots\lambda_{m-1}e_{m-1}+u_m$. Obligando a que el producto escalar de w_m con e_j $(j=1,\dots,m-1)$ sea nulo:

$$\langle w_m,e_j\rangle=\lambda_j+\langle u_m,e_j\rangle=0,$$

en consecuencia $w_m=-\langle u_m,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle u_m,e_{m-1}\rangle e_{m-1}+u_m$. El vector w_m es por tanto ortogonal a $\{e_1,\dots,e_{m-1}\}$ y es además no nulo pues si lo fuera, $u_m \in L[e_1, \ldots, e_{m-1}] = L[u_1, \ldots, u_{m-1}]$ y el sistema $\{u_1, \ldots, u_m\}$ no sería libre. Normalizando w_n, es decir tomando

$$e_m = \frac{w_m}{\|w_m\|},$$

obtenemos un sistema ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ que cumple las condiciones

$$L[u_1, \ldots, u_k] = L[e_1, \ldots, e_k] \quad (\forall k,\ 1 \leq k \leq m-1),$$

$$L[u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m] = L[e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m],$$

lo cual completa la demostración.

6. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de E, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es sistema libre para todo $1 \leq m \leq n$. Basta aplicar recurrentemente las fórmulas

$$w_m = u_m - \langle u_m, e_1\rangle\, e_1 - \cdots - \langle u_m, e_{m-1}\rangle\, e_{m-1},\ e_m = \frac{w_m}{\|w_m\|}$$

del apartado anterior.

14.6. Subespacio ortogonal

1. Sea E un espacio euclídeo y S un subconjunto de E. Demostrar que $S^\perp$ es subespacio de E.

2. Sea el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$ con

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3.$$

Determinar una base de $F^\perp$ siendo F el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

3. En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$ determinar el subespacio ortogonal al $F = L[1, x]$.

4. Sea E espacio euclídeo. Demostrar que
(i) $M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$ para M, N subconjuntos de E.
(ii) $F \cap F^\perp = \{0\}$ para F subespacio de E.
(iii) $M \subset \left(M^\perp\right)^\perp$ para M subconjunto de E.

5. Si E es espacio euclídeo de dimensión finita y F es subespacio de E, demostrar que $E = F \oplus F^\perp$.

Solución. 1. (i) El vector nulo 0 de E es ortogonal a todos los de E, en particular a todos los de S, luego $0 \in S^{\perp}$.
(ii) Sean $x, x' \in S^{\perp}$. Entonces, para todo $y \in S$ se verifica

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = 0 + 0 = 0,$$

en consecuencia $x + x' \in S^{\perp}$.
(iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in S^{\perp}$. Para todo $y \in S$ se verifica

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda \cdot 0 = 0,$$

en consecuencia $\lambda x \in S^{\perp}$. Concluimos que $S^{\perp}$ es subespacio de E.

2. Para que un vector (x_1, x_2, x_3) sea ortogonal a todos los de F, basta que sea ortogonal a los de una base de F. Una base de F es $B_F = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1)\}$, por tanto

$$F^{\perp} \equiv \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3), (1, -1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3), (-2, 0, 1) \rangle = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \ \ x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

y una base de $F^{\perp}$ es $B_{F^{\perp}} = \{(6, 3, 4)\}$.

3. Una base de F es $B_F = \{1, x\}$. Un vector $a + bx + cx^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ pertenece a $F^{\perp}$ sí, y sólo si,

$$\begin{cases} \ \langle a + bx + cx^2, 1 \rangle = \int_0^1 (a + bx + cx^2)\, dx = 0 \\ \langle a + bx + cx^2, x \rangle = \int_0^1 (ax + bx^2 + cx^3)\, dx = 0. \end{cases}$$

Integrando obtenemos

$$F^{\perp} \equiv \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

Y una base de $F^{\perp}$ (en coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$) es $\{(1, -6, 6)\}$ por tanto $F^{\perp} = L[1 - 6x + 6x^2]$.

4. (i) Si $x \in N^{\perp}$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in N$. Como $M \subset N$, $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M$, luego $x \in M^{\perp}$.
(ii) Si $x \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$, entonces $x \in F$ y $x \in M^{\perp}$ por tanto $\langle x, x \rangle = 0$, luego necesariamente $x = 0$. Por otra parte, al ser F y $F^{\perp}$ subespacios de E, ambos contienen al vector nulo, en consecuencia $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
(iii) Si $x \in M$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M^{\perp}$ por tanto $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

5. Sea $B_F = \{e_1, \dots, e_r\}$ una base ortonormal de F. Ampliando, obtenemos una base de E,

$$B = \{e_1, \dots, e_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}.$$

Aplicando el método de Schmidt a B, obtenemos la base ortonormal de E

$$B' = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}.$$

Veamos que $F^\perp = L[e_{r+1}, \dots, e_n]$, lo cual demostrará que $E = F \oplus F^\perp$. Efectivamente sea $x \in E$ con $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, entonces

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, e_1 \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle x, e_r \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \\ x_r = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = x_{r+1} e_{r+1} + \cdots + x_n e_n \Leftrightarrow x \in L[e_{r+1}, \dots, e_n].$$

Nota. Los casos $F = \{0\}$ y $F = E$ son triviales.

14.7. Proyección ortogonal

1. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3,$$

hallar la proyección ortogonal del vector $x = (1, 1, 1)$ sobre el subespacio

$$F \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

2. En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$ determinar la proyección ortogonal del vector x^2 sobre el subespacio $F = L[1, x]$.

3. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 se define el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx.$$

Hallar una base ortonormal del subespacio $F = L[1, x]$ y como aplicación, la proyección ortogonal del vector x^2 sobre F.

4. Sea E espacio euclídeo de dimensión finita, F subespacio de E y $p_F : E \to E$ la aplicación que a cada vector x de E le hace corresponder su proyección ortogonal sobre F, $p_F(x)$. Demostrar que

(i) p_F es lineal.
(ii) p_F es idempotente, es decir $p_F \circ p_F = p_F$.

5. Sea E espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, y $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base ortonormal de F. Demostrar que para todo $x \in E$ la proyección ortogonal de x a F es

$$p_F(x) = \langle x, e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x, e_r\rangle\, e_r.$$

Solución. 1. Hallemos $F^\perp$. Para que un vector (x_1, x_2, x_3) sea ortogonal a todos los de F, basta que sea ortogonal a los de una base de F. Una base de F es $B_F = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1)\}$, por tanto

$$F^\perp \equiv \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3), (1, -1, 0)\rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3), (-2, 0, 1)\rangle = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \quad x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

y una base de $F^\perp$ es $B_{F^\perp} = \{(6, 3, 4)\}$. Como $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, una base de $\mathbb{R}^3$ es $B = B_F \cup B_{F^\perp}$. Expresemos $x = (1, 1, 1)$ como combinación lineal de los vectores de B :

$$(1, 1, 1) = [\alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(-2, 0, 1)] + \alpha_3(6, 3, 4). \quad (1)$$

Resolviendo obtenemos $\alpha_1 = -5/17$, $\alpha_2 = 1/17$ y $\alpha_3 = 4/17$. La proyección ortogonal de x sobre F es por tanto el sumando de (1) que pertenece a F, es decir

$$p_F(x) = -\frac{5}{17}(1, -1, 0) + \frac{1}{17}(-2, 0, 1) = \frac{1}{17}(-7, 5, 1).$$

2. Hallemos $F^\perp$. Una base de F es $B_F = \{1, x\}$. Un vector $a + bx + cx^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ pertenece a $F^\perp$ sí, y sólo si,

$$\begin{cases} \quad \left\langle a + bx + cx^2, 1\right\rangle = \int_0^1 (a + bx + cx^2)\, dx = 0 \\ \left\langle a + bx + cx^2, x\right\rangle = \int_0^1 (ax + bx^2 + cx^3)\, dx = 0. \end{cases}$$

Integrando obtenemos

$$F^\perp \equiv \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

Y una base de $F^\perp$ (en coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$) es $\{(1, -6, 6)\}$ por tanto $F^\perp = L[1 - 6x + 6x^2]$. Como $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, una base de $\mathbb{R}_2[x]$ es $B = B_F \cup B_{F^\perp}$. Expresemos x^2 como combinación lineal de los vectores de B :

$$x^2 = [\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x] + \alpha_3(1 - 6x + 6x^2). \quad (1)$$

Resolviendo obtenemos $\alpha_1 = -1/6$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = -1/6$. La proyección ortogonal de x^2 sobre F es por tanto el sumando de (1) que pertenece a F, es decir

$$p_F(x^2) = -\frac{1}{6} + x.$$

3. Una base de F es $\{u_1 = 1, u_2 = x\}$. Según el método de ortonormalización de Schmidt, una base ortonormal de F es $\{e_1, e_2\}$, siendo

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|}.$$

Efectuando los cálculos:

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx} = 1 \Rightarrow e_1 = 1,$$

$$u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1 = x - \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx\right) \cdot 1 = x$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow e_2 = \sqrt{3}x,$$

La proyección pedida es por tanto

$$p_F(x^2) = \langle x^2, 1\rangle 1 + < x^2, \sqrt{3}x > \sqrt{3}x = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \cdot 1$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx\right)\sqrt{3}x = \frac{1}{3}.$$

4. (i) Sean $x, y \in E$. Estos vectores se pueden descomponer de manera única en la forma

$$x = p + u \ \left(p \in F,\ u \in F^{\perp}\right)$$
$$y = p' + u' \ \left(p' \in F,\ u' \in F^{\perp}\right)$$

y por tanto $p_F(x) = p$ y $p_F(y) = p'$. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha x + \beta y = \left(\alpha p + \beta p'\right) + \left(\alpha u + \beta u'\right),$$

con $\alpha p + \beta p' \in F$ y $\alpha u + \beta u' \in F^{\perp}$. En consecuencia,

$$p_F(\alpha x + \beta y) = \alpha p + \beta p' = \alpha p_F(x) + \beta p_F(y),$$

luego p_F es lineal.

(ii) Para todo $x \in E$ se verifica

$$p_F(x) = p_F(x) + 0 \text{ con } p_F(x) \in F \text{ y } 0 \in F^{\perp},$$

por tanto $(p_F \circ p_F)(x) = p_F[p_F(x)] = p_F(x)$, lo cual implica que $p_F \circ p_F = p_F$.

5. Sea $x \in E$. Escribamos

$$x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_r \rangle e_r + u.$$

Dado que $\langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_r \rangle e_r \in F$, bastará demostrar que $u \in F^{\perp}$. Ahora bien para todo $i = 1, \ldots, r$:

$$\langle u, e_i \rangle = \langle x - \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_r \rangle e_r, e_i \rangle$$

$$= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0,$$

lo cual implica que $u \in F^{\perp}$.

14.8. Mínima distancia de un vector a un subespacio

1. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3,$$

hallar la distancia del vector $x = (1,1,1)$ al subespacio $F \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

2. Sea E espacio euclídeo. Demostrar las propiedades de la distancia:
1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$.
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + x(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

3. Sea E espacio euclídeo de dimension finita y F subespacio de E. Entonces, para todo $x \in E$ se verifica $d(x, p_F(x)) \leq d(x, y) \ \ \forall y \in F$.

Solución. 1. En un ejercicio anterior habíamos hallado la proyección ortogonal de x sobre F, obteniéndose $p_F(x) = \dfrac{1}{17}(-7, 5, 1)$. En consecuencia,

$$d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \left\| (1,1,1) - \frac{1}{17}(-7,5,1) \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{17}(24, 12, 16) \right\| = \frac{1}{17} \left\| (24, 12, 16) \right\|$$

$$= \frac{1}{17}\sqrt{24^2 + 2 \cdot 12^2 + 3 \cdot 16^2} = \frac{\sqrt{1632}}{17} = \frac{4\sqrt{102}}{17}.$$

2. Usando conocidas propiedades de la norma,
1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$.
3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$
$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + x(z,y)$.

3. El vector x se puede descomponer en la forma $x = p_F(x) + u$ con $u \in F^{\perp}$. Entonces, para todo $y \in F$ el vector $p_F(x) - y$ pertenece a F. Al ser $u \perp (p_F(x) - y)$, podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Tenemos:

$$d^2(x,y) = \|x-y\|^2 = \|u + (p_F(x) - y)\|^2$$

$$= \|u\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

$$= d^2\left(x, p_F(x)\right) + d^2\left(p_F(x), y\right) \Rightarrow d\left(x, p_F(x)\right) \leq d(x,y).$$

14.9. Matrices ortogonales

1. (a) Demostrar que una matriz A es ortogonal si, y sólo si $A^tA = I$.
(b) Comprobar que las siguientes matrices son ortogonales:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Demostrar las propiedades
(a) El producto de dos matrices ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal.
(b) La matriz identidad de cualquier orden es ortogonal.
(c) La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.
Nota. Estas propiedades garantizan que el conjunto de las matrices ortogonales y del mismo orden tiene estructura de grupo con respecto de la multiplicación.

3. Demostrar las propiedades
(a) La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal.
(b) El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1.
(c) Si λ es valor propio real de una matriz ortogonal, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

4. Demostrar que una matriz A es ortogonal si, y sólo si sus vectores columnas forman un sistema ortonormal con el producto escalar usual.

5. Determinar los valores de s y t para los cuales es ortogonal la matriz

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & t & s \\ 3 & s & 2 \\ s & -2 & t \end{bmatrix}.$$

6. Demostrar que cualquier matriz ortogonal de orden 2 tiene alguna de las dos formas

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

7. Demostrar que en un espacio euclídeo de dimensión finita, la matriz de cambio de una base ortonormal a otra ortonormal es ortogonal.

8. Si A y B son matrices ortogonales y del mismo orden, entonces AB y BA también son matrices ortogonales, pero no siempre la suma lo es. Se trata de encontrar todas las parejas de matrices ortogonales de orden dos y de orden tres tales que $S = A + B$ sea ortogonal.
(a) Supongamos que B es la matriz identidad de orden dos ($B = I$). Determinar todas las matrices ortogonales de orden dos A de manera que la suma $S = A + I$ sea ortogonal.
(b) Supongamos que B es una matriz ortogonal dada de orden dos (no necesariamente la identidad). Determinar todas las matrices ortogonales A tales que $S = A + B$ sea ortogonal.
Indicación. Multiplicar por la izquierda por B^T los dos miembros de la igualdad.
(c) Las mismas cuestiones suponiendo matrices de orden tres.

Solución. 1. (a) Si A es ortogonal, $A^{-1} = A^t$. Multiplicando por A a la derecha queda $I = A^tA$. Recíprocamente, si $A^tA = I$, por la definición y unicidad de la inversa, $A^{-1} = A^t$.
(b) Usando el apartado anterior

$$M^tM = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, M es matriz ortogonal.

$$N^tN = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

luego N es ortogonal.

2. (a) Si A y B son ortogonales y del mismo orden:

$$(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I \Rightarrow AB \text{ es ortogonal.}$$

(b) $I^tI = II = I \Rightarrow A$ es ortogonal.
(c) Si A es ortogonal, $A^{-1} = A^t$, por tanto

$$\left(A^{-1}\right)^t A^{-1} = \left(A^t\right)^t A^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} \text{ es ortogonal.}$$

3. (a) Si A es ortogonal, $A^{-1} = A^t$ y vimos que la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal, por tanto A^t es ortogonal.
(b) Si A es ortogonal, $A^tA = I$. Tomando determinantes, $\left|A^tA\right| = |I| = 1$. Ahora bien

$$\left|A^tA\right| = \left|A^t\right| |A| = |A| \, |A| = |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = 1 \text{ o } |A| = -1.$$

(c) El producto escalar usual de dos vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$u = (u_1, \ldots, u_n)^t, \quad v = (v_1, \ldots, v_n)^t$$

se puede expresar en la forma

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \left(u_1, \ldots, u_n\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u^tv. \quad (*)$$

Sea ahora A matriz ortogonal y $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A. Existe un vector columna $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. Usando el producto escalar usual y $(*)$:

$$\langle Ax, Ax\rangle = (Ax)^t(Ax) = x^tA^tAx = x^tIx = x^tx = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \neq 0.$$

Por otra parte $\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle = \lambda^2 \|x\|^2$. Entonces,

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle \Rightarrow \|x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ o } \lambda = -1.$$

4. Si $C_1, \ldots, C_n$ son las columnas de A,

$$A^tA = \begin{bmatrix} C_1^t \\ C_2^t \\ \vdots \\ C_n^t \end{bmatrix} \left[C_1, C_2, \ldots, C_n\right] = \begin{bmatrix} C_1^tC_1 & C_1^tC_2 & \ldots & C_1^tC_n \\ C_2^tC_1 & C_2^tC_2 & \ldots & C_2^tC_n \\ \vdots & & & \vdots \\ C_n^tC_1 & C_n^tC_2 & \ldots & C_n^tC_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_1, C_2\rangle & \dots & \langle C_1, C_n\rangle \\ \langle C_2, C_1\rangle & \langle C_2, C_2\rangle & \dots & \langle C_2, C_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle C_n, C_1\rangle & \langle C_n, C_2\rangle & \dots & \langle C_n, C_n\rangle \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$A \text{ es ortogonal } \Leftrightarrow A^tA = I \Leftrightarrow \begin{cases} \langle C_i, C_j\rangle = 0 & i \neq j \\ \langle C_i, C_i\rangle = 1 & \forall i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

de lo cual se concluye la propiedad.

5. La norma de cada columna ha de ser 1 :

$$\|C_1\|^2 = \frac{2^2 + 3^2 + s^2}{49} = 1 \Leftrightarrow s^2 = 36 \Leftrightarrow s = \pm 6.$$

$$\|C_2\|^2 = \frac{t^2 + s^2 + (-2)^2}{49} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 45.$$

$$\|C_3\|^2 = \frac{s^2 + 2^2 + t^2}{49} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 45.$$

Necesariamente ha de ser $s = \pm 6$ y $t = \sqrt{45 - 36} = \pm 3$. Es decir, la matriz sólo puede ser ortogonal cuando (s, t) toma los valores $(6, 3)$, $(6, -3)$, $(-6, 3)$, o $(-6, -3)$.
Sustituyendo estos valores en A, observamos que las tres columnas son ortogonales dos a dos sólo en el caso $(s, t) = (6, -3)$, único caso en el que A es ortogonal.

6. Si A es matriz ortogonal de orden 2, su primera columna C_1 ha de tener norma 1 lo cual obliga a ésta a ser de la forma $C_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$.
La segunda columna C_2 de A ha de tener norma 1 y ser ortogonal a la primera. Esto sólo puede suceder si $C_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ o si $C_2 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$.

7. Si B y B' son dos bases ortonormales de un espacio euclideo de dimensión finita, sabemos que la matriz de Gram del producto escalar $\langle\ ,\rangle$ en la base B es la identidad I y en la B', también I

Dado que $\langle\ ,\rangle$ es una forma bilineal, si P es la matriz de cambio de la base B a la B' la matriz de Gram en B' es P^tIP, por tanto $P^tIP = I$. Es decir, $P^tP = I$ lo cual implica que P es ortogonal.

8. (a) Sea $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ ortogonal. Entonces,

$$A + I \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow (A+I)^T(A+I) = I \Leftrightarrow \left(A^T + I\right)(A+I) = I$$

$$\Leftrightarrow A^TA + A + A^T + I = I \Leftrightarrow I + A + A^T + I = I \Leftrightarrow A + A^T = -I$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ y + z = 0 \\ 2t = -1. \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos las matrices A de orden dos tales que $S = A + I$ es ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha \\ \alpha & -1/2 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Como A es ortogonal, sus vectores columna han de formar un sistema ortonormal con el producto escalar usual. Claramente, forman un sistema ortogonal. Obligando a que sea unitario obtenemos $\alpha^2 + 1/4 = 1$, es decir $\alpha = \pm\sqrt{3}/2$. La matrices A pedidas son por tanto

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(b) Sea B matriz ortogonal de orden dos dada. Hallemos todas las matrices ortogonales A tales que la suma $S = A+B$ es ortogonal. Usando la indicación dada,

$$B^TS = B^T(A+B) = B^TA + B^TB = B^TA + I.$$

Según lo demostrado en el apartado anterior, $B^TA = A_1$ o $B^TA = A_2$, es decir $A = BA_1$ o $A = BA_2$.

(c) Los razonamientos hechos anteriormente son independientes del orden de la matriz, sólo difieren los cálculos. Llamemos

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Imponiendo $A + A^T = -I$ y resolviendo el sistema obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & -1/2 & -\gamma \\ \beta & \gamma & -1/2 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

Imponiendo que la matriz sea ortogonal,

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + 1/4 = 1 \\ \alpha^2 + \gamma^2 + 1/4 = 1 \\ \beta^2 + \gamma^2 + 1/4 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta\gamma = 0 \\ \alpha\gamma = 0 \\ \alpha\beta = 0. \end{cases}$$

No existen α, β, γ cumpliendo las relaciones anteriores pues por ejemplo, tomando $\alpha = \beta = 0$ (dos de las variables han de ser nulas para que se verifiquen las tres últimas igualdades), tendríamos $1/4 = 1$ (absurdo).

14.10. Operador traspuesto

1. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ (siendo $x = (x_1, x_2)^t$, $y = (y_1, y_2)^t$), se considera el operador

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 4x_1 + 5x_2).$$

Determinar su operador traspuesto.

2. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\ ,\ \rangle)$ siendo $\langle p, q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$.
(i) Comprobar que $B = \{p_1 = 1,\ p_2 = \sqrt{3}x,\ p_3 = (3\sqrt{5}/2)(x^2 - 1/3)\}$ es base ortonormal.
(ii) Determinar en la base B la matriz del operador traspuesto del operador T en $\mathbb{R}_2[x]$ definido mediante $T(p_1) = 2p_1 - p_3$, $T(p_2) = 2p_2 + 5p_3$, $T(p_3) = p_3$.

3. Sea S y T dos operadores en un espacio euclídeo de dimensión finita E, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$(S + T)^t = S^t + T^t,\ \ (\lambda T)^t = \lambda T^t,\ \ (S \circ T)^t = T^t \circ S^t.$$

4. Sea E un espacio euclídeo de dimensión finita n, y E^* su dual. Demostrar que la aplicación $F : E \to E^*$, $F(a) = f_a$ con $f_a(x) = \langle a, x\rangle$ es un isomorfismo.

5. Sea E espacio euclídeo de dimensión finita y $T : E \to E$ un operador (es decir, un endomorfismo). Demostrar que existe un único operador $T^t : E \to E$ tal que:

$$\langle v, T(w)\rangle = \langle T^t(v), w\rangle \quad \forall v, w \in E.$$

6. Sea T un operador en un espacio euclídeo de dimensión finita y B una base de E. Sea A la matriz de T en la base B y G la matriz de Gram en la base B. Demostrar que la matriz de T^t en la misma base B es $G^{-1}A^tG$.

7. Demostrar las propiedades
(a) $\left(T^t\right)^t = T.$
(b) $\ker T = \left(\text{Im } T^t\right)^{\perp}, \ \ker T^t = (\text{Im } T)^{\perp}.$

8. Demostrar las propiedades
(a) T y T^t tienen el mismo polinomio característico, en consecuencia los mismos valores propios.
(b) Dos subespacios propios, uno de T y otro de T^t que corresponden a dos valores propios distintos son ortogonales.

Solución. 1. La expresiones matriciales de T y del producto escalar en la base canónica son

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de T y del producto escalar en la base canónica son por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia la matriz de T^t en la base canónica es

$$G^{-1}A^tG = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4/3 & 5 \end{pmatrix},$$

y su expresión matricial en dicha base:

$$T^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4/3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente:

$$T^t(x_1, x_2) = (2x_1 + 6x_2, -4x_1/3 + 5x_2).$$

2. (i) Fácilmente verificamos (son integrales inmediatas) que para todo $i, j = 1, 2, 3$, $\langle p_i(x), p_j(x)\rangle = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker) y por tanto la base B es ortonormal.
(ii) Transponiendo coeficientes, obtenemos la matriz A de T en la base $B:$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al ser B ortonormal, la matriz de T^t en B es A^t, es decir

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Para todo $x, y \in E$ se verifica $\langle x, S(y)\rangle = \langle S^t(x), y\rangle$ y $\langle x, T(y)\rangle = \langle T^t(x), y\rangle$. Por tanto, para todo $x, y \in E$:

$$\langle x, (S+T)(y)\rangle = \langle x, S(y) + T(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle + \langle x, T(y)\rangle$$

$$= \langle S^t(x), y\rangle + \langle T^t(x), y\rangle = \langle S^t(x) + T^t(x), y\rangle$$

$$= \langle (S^t + T^t)(x), y\rangle \Rightarrow (S+T)^t = S^t + T^t.$$

$$\langle x, (\lambda T)(y)\rangle = \langle x, \lambda T(y)\rangle = \lambda\langle x, T(y)\rangle = \lambda\langle T^t(x), y\rangle$$

$$= \langle \lambda T^t(x), y\rangle = \langle (\lambda T^t)(x), y\rangle \Rightarrow (\lambda T)^t = \lambda T^t.$$

Para demostrar $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$ vamos a usar un argumento matricial. Elijamos una base ortonormal B de E. Si M y N son respectivamente las matrices de S y T en B, entonces las matrices de S^t y T^t en B son respectivamente M^t y N^t.
La matriz de $S \circ T$ en B es MN y la de $(S \circ T)^t$ en B es $(MN)^t = N^t M^t$. Por otra parte, la matriz de $T^t \circ S^t$ en B es $N^t M^t$. Los operadores $(S \circ T)^t$ y $T^t \circ S^t$ tienen la misma matriz en la base B, lo cual implica que $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$.

4. Primeramente veamos que F está bien definida, es decir que $f_a \in E^*$ o de forma equivalente, que $f_a : E \to \mathbb{R}$ es lineal.
Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $x, y \in E$ y usando las propiedades del producto escalar:

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle a, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda \langle a, x\rangle + \mu \langle a, x\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

luego f_a es lineal.
Veamos ahora que F es lineal. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, para todo $a, b \in E$, para todo $x \in E$ y usando las propiedades del producto escalar:

$$F(\lambda a + \mu b)(x) = f_{\lambda a + \mu b}(x) = \langle \lambda a + \mu b, x\rangle = \lambda \langle a, x\rangle + \mu \langle b, x\rangle$$

$$= \lambda f_a(x) + \mu f_b(x) = (\lambda f_a + \mu f_b)(x) = (\lambda F(a) + \mu F(b))(x).$$

Por definición de igualdad de funciones, $F(\lambda a + \mu b) = \lambda F(a) + \mu F(b)$ luego F es lineal. El núcleo de F es:

$$\ker F = \{a \in E : F(a) = 0\} = \{a \in E : f_a = 0\}$$

$$= \{a \in E : \langle a, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in E\}.$$

Si $x = a$, $\langle a, a\rangle = 0$ lo cual implica $a = 0$ y por tanto $\ker F = \{0\}$, luego F es inyectiva. Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales,

$$n = \dim(\text{Im } F) = \dim E^* \Rightarrow \text{Im } F = E^*$$

es decir, F es sobreyectiva. Concluimos que F es isomorfismo.

5. *Existencia.* Sea $a \in E$. La aplicación $h : E \to \mathbb{R}$ definida mediante $h(x) = \langle a, T(x)\rangle$ es lineal, pues para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in E$:

$$h(\lambda x + \mu y) = \langle a, T(\lambda x + \mu y)\rangle = \langle a, \lambda T(x) + \mu T(y)\rangle$$

$$= \lambda\langle a, T(x)\rangle + \mu\langle a, T(y)\rangle = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Como $h \in E^*$, debido al isomorfismo F construido en el problema anterior, existe un único $a' \in E$ tal que $F(a') = f_{a'} = h$. Definimos $T^t(a) = a'$. Debido a la bilinealidad del producto escalar, la aplicación T^t es lineal. Además,

$$h = f_{a'} \Leftrightarrow h(x) = f_{a'}(x) \ \forall x \in E \Leftrightarrow \langle a, T(x)\rangle = \langle a', x\rangle \ \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow \langle a, T(x)\rangle = \langle T^t(a), x\rangle \ \forall x \in E$$

Pero el razonamiento anterior es válido para cualquier $a \in E$, por tanto, denotando a por v y x por w resulta $\langle v, T(w)\rangle = \langle T^t(v), w\rangle \quad \forall v, w \in E$.

Unicidad. Supongamos que un endomorfismo H en E satisface $\langle v, T(w)\rangle = \langle H(v), w\rangle$ para todo v, w vectores de E. Fijando v :

$$\langle T^t(v), w\rangle = \langle H(v), w\rangle \ \ \forall w \in E$$

$$\Rightarrow \langle (T^t - H)(v), w\rangle = 0 \ \ \forall w \in E \Rightarrow (T^t - H)(v) = 0.$$

El razonamiento anterior es válido para todo $v \in E$, luego $T^t - H = 0$ y por tanto $T^t = H$.

6. Sean x e y vectores genéricos de E y X e Y sus respectivos vectores de coordenadas en la base B. Llamemos C a la matriz de T^t en la base B. Entonces,

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^t(y)\rangle \Leftrightarrow (AX)^t GY = X^t G(CY)$$

$$\Leftrightarrow X^t(A^t G)Y = X^t(GC)Y \Leftrightarrow X^t(A^t G - GC)Y = 0.$$

Es decir, la forma bilineal $X^t(A^t G - GC)Y$ es la forma bilineal nula, por tanto ha de ser $A^t G - GC = 0$ de lo cual deducimos $C = G^{-1}A^t G$.

7. (a) Intercambiando los papeles de x e y en la relación $\langle x, T(y)\rangle = \langle T^t(x), y\rangle$:

$$\langle y, T(x)\rangle = \langle T^t(y), x\rangle, \text{ o bien } \langle x, T^t(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle.$$

Por la unicidad del operador traspuesto, $\left(T^t\right)^t = T$.
(b) Veamos que $\ker T \subset \left(\text{Im } T^t\right)^{\perp}$:

$$y \in \ker T \Rightarrow T(y) = 0 \Rightarrow 0 = \langle x, 0\rangle = \langle T^t(x), y\rangle \ \ \forall x \in E$$

es decir, y es ortogonal a todo vector de la imagen de T^t. Veamos que $\left(\text{Im } T^t\right)^{\perp} \subset \ker T$:

$$y \in \left(\text{Im } T^t\right)^{\perp} \Rightarrow \langle T^t(x), y\rangle = 0 = \langle x, T(y)\rangle \ \forall x \in E$$

$$\Rightarrow T(y) = 0 \Rightarrow y \in \ker T.$$

Concluimos que $\ker T = \left(\text{Im } T^t\right)^{\perp}$. Para demostrar $\ker T^t = (\text{Im } T)^{\perp}$, basta intercambiar los papeles de T y T^t y usar $\left(T^t\right)^t = T$.

8. (a) Sabemos que si A es la matriz de T en una base B y G la matriz de Gram en la base B, la matriz de T^t en la misma base B es $G^{-1}A^tG$. La matriz A tiene el mismo polinomio característico que A^t, y $G^{-1}A^tG$ es semejante a A^t. En consecuencia A y $G^{-1}A^tG$ tienen el mismo polinomio característico.
(b) Sean λ, μ valores propios distintos de T (como consecuencia, también de T^t). Sea y vector propio de T asociado a λ y x vector propio de T^t asociado a μ. Entonces,

$$\langle x, T(y)\rangle = \langle T^t(x), y\rangle \Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \langle \mu x, y\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0.$$

Como $\lambda - \mu \neq 0$, ha de ser $\langle x, y\rangle = 0$.

14.11. Operador ortogonal

1. Comprobar que en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el siguiente operador es ortogonal

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2. Demostrar que si λ es valor propio de un operador ortogonal T en un espacio euclídeo E, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

3. Demostrar que: T es ortogonal $\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$.

4. Demostrar que todo operador ortogonal en un espacio euclídeo es isomorfismo.

5. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un operador en un espacio euclídeo E sea ortogonal, es que transforme una base ortonormal en otra ortonormal.

6. Demostrar que un operador en un espacio euclídeo E es ortogonal si, y sólo si su matriz en una base ortonormal es ortogonal.

Solución. 1. La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal con el producto escalar usual, por tanto T será ortogonal si su matriz A en tal base es ortogonal. Se verifica:

$$A^tA = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

luego A es ortogonal y por tanto lo es T.

2. Si λ es valor propio real de T entonces existe $x \in E$ no nulo tal que $T(x) = \lambda x$. Como T conserva normas,

$$\|x\| = \|T(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1.$$

3. $\Rightarrow$) Si T es ortogonal, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$. Haciendo $x = y$ queda $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2$, luego $\|T(x)\| = \|x\|$.

$\Leftarrow$) Si T conserva la normas, se verifica para todo $x, y \in E$ que $\|T(x+y)\| = \|x+y\|$. Entonces,

$$\|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 \Rightarrow \langle T(x+y), T(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle T(x) + T(y), T(x) + T(y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\Rightarrow \|T(x)\|^2 + 2\langle T(x), T(y)\rangle + \|T(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Como por hipótesis T conserva normas, simplificando la última igualdad queda $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, es decir T es ortogonal.

4. Si T es operador ortogonal en un espacio euclídeo E, se verifica $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. El núcleo de T es

$$\ker T = \{x \in E : T(x) = 0\} = \{x \in E : 0 = \|T(x)\| = \|x\|\} = \{0\},$$

por tanto $T : E \to E$ es inyectiva. Como estamos considerando espacios euclídeos de dimensión finita, T también es sobreyectiva como consecuencia del teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales. Concluimos que T es isomorfismo.

5. Supongamos que T es ortogonal y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es base ortonormal de E. Entonces, T es isomorfismo, por tanto $B' = \{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ también es base de E. Entonces, $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker), con lo cual B' es base ortonormal.
Recíprocamente, sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de E y supongamos que $B' = \{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ también lo es. Para todo $x \in E$ sea $x = \sum_1^n x_i e_i$, con $x_i \in \mathbb{R}$. Por ser B' base ortonormal:

$$\|T(x)\|^2 = \langle T\left(\sum_1^n x_i e_i\right), T\left(\sum_1^n x_j e_j\right)\rangle = \langle \sum_1^n x_i T(e_i), \sum_1^n x_j T(e_j)\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \sum_1^n x_i^2.$$

Y por ser B base ortonormal:

$$\|x\|^2 = \langle \sum_1^n x_i e_i, \sum_1^n x_j e_j\rangle = \langle \sum_1^n x_i e_i, \sum_1^n x_j e_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_1^n x_i^2.$$

Como T conserva normas, es ortogonal.

6. Si T ortogonal y B una base ortonormal de E, la matriz de Gram producto escalar es la identidad. Sean x, y vectores genéricos de E, X e Y sus vectores de coordenadas en B y A la matriz de T en B. Entonces, para todo $x, y \in E$

$$T \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow (AX)^t(AY) = X^tY^t$$

$$\Leftrightarrow X^t(A^tA)Y = X^tY \Leftrightarrow X^t(A^tA - I)Y = 0 \Leftrightarrow A^tA = I \Leftrightarrow A \text{ es ortogonal.}$$

14.12. Operador simétrico, teorema espectral

1. En el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ representa el producto escalar usual, se considera $T \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dado por:

$$T(x, y, z) = (x + 4y + 8z,\ 4x + 16y + 32z,\ 8x + 32y + 64z).$$

Demostrar que T es simétrico.

2. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \left(x_1, x_2\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

analizar si es simétrico el operador $T(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2)$.

3. En $\mathbb{R}^2$ se considera el operador T cuya matriz en una base ortonormal $B = \{u_1, u_2\}$ es $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Demostrar que T es simétrico, hallar una base ortonormal formada por vectores propios y la matriz diagonal correspondiente.

4. Sea la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Hallar los valores propios de A. Comprobar que son reales.
(ii) Hallar unas bases de los subespacios propios. Comprobar que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
(iii) Comprobar que vectores propios de esas bases asociados a valores propios distintos son ortogonales con el producto escalar usual.
(iv) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal y de vectores propios.
(v) Comprobar que la matriz P de cambio de base de la canónica a la del apartado anterior es ortogonal.
(vi) Clasificar la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x) = x^t A x$.

5. Demostrar que todo operador simétrico en un espacio euclídeo de dimensión n tiene n valores propios reales, contando multiplicidades.

6. Demostrar que el subespacio ortogonal a un vector propio de un operador simétrico T en un espacio euclídeo E es invariante por este operador.

7. Demostrar es teorema espectral para operadores simétricos:
Sea T un operador simétrico en un espacio euclídeo E. Entonces, existe al

menos una base ortonormal de E formada por vectores propios de T.

8. Sea W un subespacio de un espacio euclídeo de dimensión finita V. Para cualquier $v \in V$, sea $v = w + w'$ con $w \in W$, $w' \in W^{\perp}$. Se define $T : V \to V$ por $T(v) = w - w'$. Probar T es un operador simétrico de V.

9. Estudiar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son congruentes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución. 1. La expresión matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 16 & 32 \\ 8 & 32 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal con el producto escalar, y su matriz en tal base es simétrica, en consecuencia T es simétrico.

2. Respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ las matrices de Gram y de T son respectivamente

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Tenemos

$$GA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A^t G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dado que $GA \neq A^t G$, el operador T no es simétrico.

3. Como B es ortonormal y A es simétrica, el operador T es simétrico. Valores propios de T :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 3 \text{ (simples)}.$$

Subespacios propios:

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \qquad V_3 \equiv \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Una base de V_{-1} (en coordenadas en B) es $\{(1,1)^t\}$. Por tanto, una base de V_{-1} es $B_{V_{-1}} = \{u_1 + u_2\}$. Análogamente obtenemos $B_{V_3} = \{u_1 - u_2\}$. Una base de V_{-1} (en coordenadas en B) es $\{(1,1)^t\}$. Por tanto, una base de V_{-1} es $B_{V_{-1}} = \{u_1 + u_2\}$. Análogamente obtenemos $B_{V_3} = \{u_1 - u_2\}$.

Como T es simétrico los vectores $u_1 + u_2$ y $u_1 - u_2$ son ortogonales, por tanto una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de T es $\{u_1 + u_2, u_1 - u_2\}$. Dividiendo cada vector entre su norma, obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de T :

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2) \right\},$$

y la matriz de T en B' es

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. (i) Restando a la segunda y tercera filas la primera y posteriormente sumando a la primera columna las demás en $|A - \lambda I|$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ (simple)},\ \lambda = 1 \text{ (doble)}.$$

Los valores propios son reales como era de esperar, pues la matriz dada A representa un operador simétrico respecto de la base canónica, que con el producto escalar usual es ortonormal. Por el teorema espectral, A debe ser diagonalizable en $\mathbb{R}$.

(ii) Subespacios propios

$$\ker(A - 4I) \equiv \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \qquad \ker(A - I) \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Entonces, $\dim \ker(A - 4I) = 1$ ($\lambda = 4$ simple) y $\dim \ker(A - I) = 3 - \operatorname{rg}(A - I) = 2$. Al coincidir las dimensiones con las multiplicidades, A es diagonalizable como era de esperar según el teorema espectral. Unas bases de los subespacios propios son:

$$B_4 = \{(1,1,1)\}\ ,\ \ B_1 = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}\,.$$

(iii) Tenemos

$$\langle (1,1,1), (-1,1,0) \rangle = -1 + 1 = 0,\ \langle (1,1,1), (-1,0,1) \rangle = -1 + 1 = 0.$$

Como era de esperar, pues de acuerdo con el teorema espectral, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales. Por supuesto si están asociados a un mismo valor propio no tienen por qué ser ortogonales. Tomemos por ejemplo

$$\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle = 1 \neq 0.$$

(iv) Bastará elegir en cada subespacio propio de dimensión mayor que 1 una base ortogonal (luego se normalizará). Para ello basta elegir una base cualquiera y aplicar el método de Schmidt. Ahora bien, en nuestro caso, una base de $\ker(A-I)$ ortogonal encontrada por simple observación es $\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$. Dividiendo entre las normas obtenemos la base pedida:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}.$$

(v) La matriz P de cambio es: $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$

Operando obtenemos $P^tP = \ldots = I$ (o equivalentemente $P^t = P^{-1}$) como era de esperar, ya que la matriz de cambio de una base ortonormal a otra ortonormal es siempre ortogonal.

(vi) Dado que $P^{-1}AP = P^tAP = D = \operatorname{diag}(4,1,1)$, la base B no solo diagonaliza el endomorfismo dado por la matriz simétrica A, también la forma cuadrática dada por A. Es decir, una reducida diagonal de q es D y en consecuencia q es definida positiva.

5. Sea $A = [a_{ij}]$ la matriz simétrica que representa a T respecto de una base ortonormal. El polinomio característico de A tiene n valores propios complejos, contando multiplicidades. Sea λ un valor propio de A (a priori complejo). Existe un vector columna $X = [x_i] \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $AX = \lambda X$. Multiplicando por $\bar{X}^t$:

$$\bar{X}^tAX = \lambda \bar{X}^tX.$$

Veamos que $\bar{X}^tX$ y $\bar{X}^tAX =$ son reales. Por una parte,

$$\bar{X}^tX = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \in \mathbb{R}, \text{ y no nulo.}$$

Por otra parte,

$$\bar{X}^t AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j.$$

Siendo la matriz A simétrica y real, el conjugado de $\bar{X}^t AX$ es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x_i\overline{x_j} = \bar{X}^t AX,$$

lo cual implica que $\bar{X}^t AX$ es real. En consecuencia,

$$\lambda = \frac{\bar{X}^t AX}{\bar{X}^t X} \in \mathbb{R}.$$

6. Si $x \in E$ es vector propio de T e $y \in E$ es ortogonal a x, se verifica $T(x) = \lambda x$ (para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$) y $\langle x, y\rangle = 0$. Usando que T es simétrico,

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \Rightarrow \lambda \cdot 0 = \langle x, T(y)\rangle \Rightarrow \langle x, T(y)\rangle = 0 \Rightarrow T(y) \perp x.$$

Es decir, todo vector ortogonal a x se trasnforma en otro también ortogonal a x.

7. Como T simétrico, sabemos que su polinomio característico se descompone por completo en el cuerpo de los reales. Si $\dim E = n$ y las n raíces son distintas dos a dos, T es diagonalizable y si B es base de vectores propios en E, estará formada por vectores ortogonales dos a dos. Normalizando los vectores de B, obtenemos una base ortonormal de E formada por vectores propios de T.
El proceso es generalizable incluso en el caso de raíces múltiples. Sea u_1 un vector propio de T. Llamemos $F_1 = L[u_1]^{\perp}$. Sabemos que F_1 es invariante, por tanto T induce un operador T_1 en F_1 :

$$T_1 : F_1 \to F_1, \quad T_1(x) = T(x),$$

siendo T_1 simétrico de manera obvia y $\dim F_1 = n-1$. Sea $u_2 \in F_1$ un vector propio de T_1. Este vector es vector propio de T y ortogonal a u_2.
Podemos continuar de esta manera. El subespacio F_2 ortogonal a $L[u_1, u_2]$ es invariante por T (¿por qué?), por tanto induce un operador T_2 en F_2 :

$$T_2 : F_2 \to F_2, \quad T_2(x) = T(x),$$

siendo T_2 simétrico de manera obvia y $\dim F_2 = n - 2$. Sea $u_3 \in F_2$ un vector propio de T_2. Este vector es vector propio de T y ortogonal a u_1 y

u_2. Reiterando el proceso, obtenemos una base de $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de E ortogonal y formada por vectores propios de T. Basta ahora dividir cada vector de B entre su norma.

8. Como $V = W \oplus W^\perp$, la descomposición $v = w + w'$ es única, por tanto la aplicación T está bien definida. Para todo $x, y \in V$ podemos expresar

$$x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in W,\ x_2 \in W^\perp,\ \ y = y_1 + y_2 \text{ con } y_1 \in W,\ y_2 \in W^\perp.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle x, T(y)\rangle &= \langle x_1 + x_2, y_1 - y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_1\rangle - \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + 0 - 0 - \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle. \\ \langle T(x), y\rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle - 0 + 0 - \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle.\end{aligned}$$

es decir, $\langle x, T(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$ para todo $x, y \in V$, luego T es simétrico.

9. Sabemos que dos matrices simétricas son congruentes si, y sólo si tienen la misma signatura. Las matrices dadas son simétricas y por tanto para hallar una matriz diagonal de cada una de ellas, podemos aplicar el teorema espectral. Valores propios de A y de B :

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2 - F_1} \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_1 + C_2} \begin{vmatrix} a+b-\lambda & b \\ 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a+b-\lambda)(a-b-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a+b \vee \lambda = a-b.$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \vee \lambda = \frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Los valores propios de B son positivos, en consecuencia

$$A \text{ y } B \text{ son congruentes} \Leftrightarrow (a+b>0) \wedge (a-b>0).$$

14.13. Giros alrededor de una recta

1. Sea r una recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y e_1 un vector unitario en la dirección de r. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que $e_1 \times e_2 = e_3$. Demostrar que la matriz del giro de ángulo α alrededor de r es

$$G = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen }\alpha \\ 0 & \text{sen }\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} E^T, \text{ siendo } E = \left[e_1, e_2, e_3\right].$$

2. Hallar la matriz del giro de ángulo $\pi/2$ alrededor de la recta orientada

$$r : x = 0,\ y = 4\lambda,\ z = 3\lambda \quad (\lambda > 0),$$

y el transformado del punto $P = (1, 1, 1)^T$ por tal giro.

Solución. 1. De manera obvia, $G(e_1) = e_1$. Denotemos también por G a la restricción del giro en el plano determinado por e_2 y e_3. Las coordenadas de e_2 en este plano son $[1, 0]^T$ y las de e_3, $[0, 1]^T$ Dado que $e_3 = e_1 \times e_2$,

$$G \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix},$$

$$G \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Tenemos por tanto,

$$\begin{cases} G(e_1) = e_1 \\ G(e_2) = (\cos\alpha)\ e_2 + (\operatorname{sen}\alpha)\ e_3 \\ G(e_3) = -(\operatorname{sen}\alpha)\ e_2 + (\cos\alpha)\ e_3. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} GE = G\left[e_1, e_2, e_3\right] &= \left[Ge_1, Ge_2, Ge_3\right] \\ = \big[e_1, (\cos\alpha)\ e_2 + (\operatorname{sen}\alpha)\ e_3&, -(\operatorname{sen}\alpha)\ e_2 + (\cos\alpha)\ e_3\big] \\ = \left[e_1, e_2, e_3\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} &= E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pero E es ortogonal (sus columnas forman sistema ortonormal), por tanto $E^{-1} = E^T$. Queda

$$G = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} E^T.$$

2. El vector $e_1 = \frac{1}{5}(0, 4, 3)^T$ es un vector unitario en la dirección y sentido del eje. La base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \frac{1}{5}(0, 4, 3)^T, \frac{1}{5}(0, -3, 4)^T, (1, 0, 0)^T \right\}$$

es ortonormal y verifica $e_1 \times e_2 = e_3$. La matriz del giro es por tanto

$$G = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\operatorname{sen}\pi/2 \\ 0 & \operatorname{sen}\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & -15 & 20 \\ 15 & 16 & 12 \\ -20 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

El transformado del punto P es

$$GP = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & -15 & 20 \\ 15 & 16 & 12 \\ -20 & 12 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 5 \\ 43 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

14.14. Matriz adjunta

1. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 4i \\ 1+i & -2 & 2-3i \end{bmatrix}$, calcular A^*.

2. Demostrar que,
1) $(A^*)^* = A \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
2) $(A+B)^* = A^* + B^* \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
3) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
4. $(AB)^* = B^* A^* \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}\ \forall B \in \mathbb{C}^{n\times p}$.

Solución. 1. Tenemos,

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -4i \\ 1-i & -2 & 2+3i \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -2 \\ -4i & 2+3i \end{bmatrix}.$$

O bien,

$$A^* = \overline{A^t} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -2 \\ 4i & 2-3i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -2 \\ -4i & 2+3i \end{bmatrix}.$$

2. 1) Usando que el conjugado del conjugado de un número complejo es el propio numero y que la traspuesta de la traspuesta de una matrz es la misma matriz,

$$(A^*)^* = \left(\overline{A^t}\right)^* = \left(\overline{\overline{A^t}}\right)^t = \left(A^t\right)^t = A.$$

2) Usando que el conjugado de la suma de complejos es la suma de los conjugados y que la trapuesta de la suma de matrices es la suma de las traspuestas,

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^t = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^t = \left(\overline{A}\right)^t + \left(\overline{B}\right)^t = A^* + B^*.$$

3) Usando que el conjugado del producto de complejos es el producto de los conjugados y que la traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar

por la traspuesta de la matriz,

$$(\lambda A)^* = \left(\overline{\lambda A}\right)^t = \left(\overline{\lambda}\,\overline{A}\right)^t = \overline{\lambda}\left(\overline{A}\right)^t = \overline{\lambda}A^*.$$

4) Dado que el conjugado de la suma (producto) de complejos es la suma (producto) de los conjugados, se verifica $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$. Usando además que la traspuesta del producto de matrices es el producto de las traspuestas cambiado de orden,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^t = \left(\overline{A}\ \overline{B}\right)^t = \left(\overline{B}\right)^t\left(\overline{A}\right)^t = B^*A^*.$$

14.15. Matrices hermíticas

1. Demostrar que la suma de dos matrices hermíticas de $\mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica y que el producto de un número real por una matriz hermítica también lo es.

2. Demostrar que todos los valores propios de una matriz hermítica son reales.

3. Hallar los valores y vectores propios de la matriz hermítica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. 1. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermíticas, entonces

$$(A+B)^* = A^* + B^* = A + B \Rightarrow A + B \text{ es hermítica.}$$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica. Se verifica $\overline{\lambda} = \lambda$, por tanto

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^* = \lambda A \Rightarrow \lambda A \text{ es hermítica.}$$

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica y sea $x \in \mathbb{C}^n$ un vector columna. Vamos a demostrar previamente que x^*Ax es un número real. En efecto,

$$\overline{x^*Ax} = \overline{\overline{x^t}Ax} = x^t\overline{A}\overline{x}.$$

La matriz $x^t\overline{A}\overline{x}$ es de orden 1×1, lo cual implica que es simétrica. Es decir,

$$\overline{x^*Ax} = x^t\overline{A}\overline{x} = \left(x^t\overline{A}\overline{x}\right)^t = (\overline{x})^t\left(\overline{A}\right)^t\left(x^t\right)^t = x^*A^*x = x^*Ax.$$

Como x^*Ax coincide con su conjugado, es un número real.

Si λ (a priori complejo) es un valor propio de A, existe un vector columna $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Multiplicando a la izquierda por x^* queda $x^*Ax = \lambda x^*x$. Teniendo en cuenta que

$$x^*x = \left(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{x_1}x_1 + \cdots + \overline{x_n}x_n$$

$$= |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0,$$

el valor de λ es por tanto $\lambda = \dfrac{x^*Ax}{x^*x} \in \mathbb{R}$.

3. Valores propios de A :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = -1.$$

Subespacios propios:

$$V_5 \equiv \left\{ \begin{matrix} -2x_1 + (2+2i)x_2 = 0 \\ (2-2i)x_1 - 4x_2 = 0 \end{matrix} \right. , \quad V_{-1} \equiv \left\{ \begin{matrix} 4x_1 + (2+2i)x_2 = 0 \\ (2-2i)x_1 + 2x_2 = 0. \end{matrix} \right.$$

Unas bases de estos subespacios propios son respectivamente:

$$B_5 = \{(2, 1-i)\}, \quad B_{-1} = \{(1, -1+i)\}$$

14.16. Concepto de forma sesquilineal

1. Sea $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y la aplicación

$$f : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad f(x, y) = x^t M \, \overline{y},$$

en donde x, y representan vectores columna de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente. Demostrar que f es forma sesquilineal.

2. Sea E el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado real $[a, b]$. Es decir, $E = \{x : [a, b] \to \mathbb{C},\ f \text{ continua.}\}$. Demostrar que

$$f : E \times E \to \mathbb{C}, \quad f(x, y) = \int_a^b x(t) \, \overline{y(t)} \, dt.$$

es una forma sequilineal.

3. Sea E el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)$ finitamente no nulas, (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Demostrar que

$$f : E \times E \to \mathbb{C}, \quad f(x, y) = \sum x_j \overline{y_j}$$

es una forma sesquilineal.

Solución. 1. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, para todo $x, y \in \mathbb{C}^m$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y usando conocidas propiedades de las matrices y de la conjugación:

$$(i)\ f(x + y, z) = (x + y)^t M\ \overline{z} = (x^t + y^t)M\ \overline{z}$$

$$= x^t M\ \overline{z} + y^t M\ \overline{z} = f(x, z) + f(y, z).$$

$$f(\alpha x, z) = (\alpha x)^t M\ \overline{z} = \alpha x^t M\ \overline{z} = \alpha f(x, z).$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, para todo $x \in \mathbb{C}^m$, para todo $y, z \in \mathbb{C}^n$ y usando conocidas propiedades de las matrices y de la conjugación:

$$(ii)\ f(x, y + z) = x^t M\ \overline{y + z} = x^t M\ (\overline{y} + \overline{z})$$

$$= x^t M\ \overline{y} + x^t M\ \overline{z} = f(x, y) + f(x, z).$$

$$f(x, \alpha y) = x^t M\ \overline{\alpha y} = \overline{\alpha} x^t M\ \overline{y} = \overline{\alpha} f(x, y).$$

Concluimos que f es forma sequilineal.

2. La conjugada de una función continua es continua y el producto de continuas también, luego la integral dada existe y es un número complejo, luego la aplicación f está bien definida. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, para todo $x, y, z \in E$ y usando conocidas propiedades de la integral:

$$(i)\ f(x + y, z) = \int_a^b (x(t) + y(t))\, \overline{z(t)}\ dt$$

$$= \int_a^b x(t)\ \overline{z(t)}\ dt + \int_a^b y(t)\ \overline{z(t)}\ dt = f(x, z) + f(y, z).$$

$$f(\alpha x, y) = \int_a^b \alpha x(t)\ \overline{y(t)}\ dt = \alpha \int_a^b x(t)\ \overline{y(t)}\ dt = \alpha f(x, y).$$

$$(ii)\ f(x, y + z) = \int_a^b x(t)\ \overline{y(t) + z(t)}\ dt$$

$$= \int_a^b x(t)\ \overline{y(t)}\ dt + \int_a^b x(t)\ \overline{z(t)}\ dt = f(x, y) + f(x, z).$$

$$f(x,\alpha y)=\int_a^b x(t)\,\overline{\alpha y(t)}\,dt=\overline{\alpha}\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt=\overline{\alpha}f(x,y).$$

Concluimos que f es forma sequilineal.

3. Claramente $f(x,y)\in\mathbb{C}$ pues la suma es finita. Para todo $\alpha\in\mathbb{C}$ y para todo $x,y,z\in E$,

$$(i)\;\; f(x+y,z)=\sum\left(x_j+y_j\right)\overline{z_j}=\sum\left(x_j\overline{z_j}+y_j\overline{z_j}\right)$$

$$=\sum x_j\overline{z_j}+\sum y_j\overline{z_j}=f(x,z)+f(y,z),$$

$$f(\alpha x,y)=\sum(\alpha x_j)\overline{y_j}=\sum\alpha(x_j\overline{y_j})=\alpha\sum x_j\overline{y_j}=\alpha f(x,y).$$

$$(ii)\;\; f(x,y+z)=\sum x_j\overline{y_j+z_j}=\sum x_j\left(\overline{y_j}+\overline{z_j}\right)$$

$$=\sum x_j\overline{y_j}+\sum x_j\overline{z_j}=f(x,y)+f(x,z),$$

$$f(x,\alpha y)=\sum x_j\overline{\alpha y_j}=\sum x_j\overline{\alpha}\;\overline{y_j}=\overline{\alpha}\sum x_j\overline{y_j}=\overline{\alpha}f(x,y).$$

Concluimos que f es forma sequilineal.

14.17. Expresión matricial de una forma sesquilineal

1. Sea $f:E\times F\to\mathbb{C}$ una forma sequilineal y $B_E=\{u_1,\ldots,u_m\}$, $B_F=\{v_1,\ldots,v_m\}$ bases de E y F respectivamente. Sea $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$ dada por $a_{ij}=f(u_i,u_j)$. Demostrar que para todo $x\in E$ y para todo $y\in F$ se verifica

$$f(x,y)=X^tA\overline{Y},$$

siendo X el vector de coordenadas de x en B, e Y el de y en B.

2. Sean E y F espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ ambos de dimensión finita y $f:E\times F\to\mathbb{K}$ una forma sesquilineal. Sean B_E y B_F bases de E y F respectivamente y A la matriz de f en las bases B_E y B_F.
Sea B'_E una nueva base de E y B'_F una nueva base de F. Sea P la matriz de cambio de B_E a B'_E y Q la matriz de cambio de B_F a B'_F.
Demostrar que la matriz de la forma sesquilineal f en la nuevas bases B'_E y B'_F es $P^tA\overline{Q}$.

Solución. 1. Sean $x \in E$, $y \in E$, con $X = (x_1, \ldots, x_m)^t$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Entonces,

$$f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{m} x_j u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} f(u_j, v_j) = \sum_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} x_j \overline{y_k} f(u_i, v_j)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u_1,v_1) & f(u_1,v_2) & \ldots & f(u_1,v_n) \\ f(u_2,v_1) & f(u_2,v_2) & \ldots & f(u_2,v_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ f(u_m,v_1) & f(u_m,v_2) & \ldots & f(u_m,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $f(x,y) = X^t A \overline{Y}$.

2. La expresión de f en las bases B_E y B_F es

$$f(x,y) = X^t A \overline{Y}, \qquad (1)$$

siendo X las coordenadas de x en B_E e Y las de y en B_F. Las ecuaciones del cambio de base en E y F son respectivamente

$$X = PX', \quad Y = QY', \qquad (2)$$

siendo X' las coordenadas de x en B'_E e Y' las de y en B'_F. Sustituyendo las igualdades (2) en (1) :

$$f(x,y) = \left(PX'\right)^t A\overline{QY'} = \left(X'\right)^t \left(P^t A\overline{Q}\right) Y'.$$

La matriz de f en la nuevas bases B'_E y B'_F es por tanto $P^t A\overline{Q}$.

14.18. Concepto de forma hermítica o hermitiana

1. Sea E el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado real $[a,b]$. Demostrar que

$$f : E \times E \to \mathbb{C}, \quad f(x,y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

es una forma hermítica.

2. Sea E el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)$ finitamente no nulas, (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Demostrar que

$$f : E \times E \to \mathbb{C}, \quad f(x, y) = \sum x_j \overline{y_j}$$

es una forma hermítica.

3. Sea E espacio vectorial complejo de dimensión finita y B una base de E. Demostrar que una forma sesquilineal en E es hermítica si y sólo si la matriz de f en B es hermítica.

4. Sea $f : E \times E \to \mathbb{C}$ una forma hermítica y $q : E \to \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada. Demostrar que para todo $x, y \in E$ se verifica

$$f(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} + i\frac{q(x+iy) - q(x-iy)}{4}.$$

Solución. 1. Ya habíamos demostrado que f es sesquilineal. Además

$$f(y, x) = \int_a^b y(t)\,\overline{x(t)}\,dt = \int_a^b \overline{x(t)\,\overline{y(t)}}\,dt = \overline{\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt} = \overline{f(x, y)}.$$

Es decir, f es forma hermítica.

2. Ya habíamos demostrado que f es sesquilineal. Además para todo $x, y \in E$,

$$f(y, x) = \sum y_j \overline{x_j} = \sum \overline{x_j \overline{y_j}} = \overline{\sum x_j \overline{y_j}} = \overline{f(x, y)}.$$

Es decir, f es forma hermítica.

3. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. La matriz de f en B es $A = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = f(u_i, u_j)$. Si f es hermítica, $a_{ji} = f(u_j, u_i) = \overline{f(u_i, u_j)} = \overline{a_{ij}}$ es decir, A es hermítica. Recíprocamente, si A es hermítica se verifica para todo $x, y \in E$:

$$f(y, x) = Y^t A \overline{X} = \left(Y^t A \overline{X}\right)^t = \left(\overline{X}\right)^t A^t \left(Y^t\right)^t$$

$$= \overline{X^t} A^t Y = \overline{X^t A^* \overline{Y}} = \overline{X^t A \overline{Y}} = \overline{f(x, y)}$$

es decir, f es forma hermítica.

4. Usando la definición de forma hermítica y de forma cuadrática asociada, tenemos

$$\frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} = \frac{f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y)}{4}$$

$$= \frac{q(x) + f(x,y) + f(y,x) + q(y) - q(x) + f(x,y) + f(y,x) - q(y)}{4}$$

$$= \frac{2f(x,y) + 2f(y,x)}{4} = \frac{f(x,y) + f(y,x)}{2}. \quad (1)$$

Por otra parte

$$i\frac{q(x+iy) - q(x-iy)}{4} = i\frac{f(x+iy, x+iy) - f(x-iy, x-iy)}{4}$$

$$= i\frac{q(x) + if(y,x) - if(x,y) + q(y) - q(x) + if(y,x) - if(x,y) - q(y)}{4}$$

$$= i\frac{2if(y,x) - 2if(x,y)}{4} = \frac{-f(y,x) + f(x,y)}{2} \quad (2)$$

Sumando las igualdades (1) y (2),

$$f(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} + i\frac{q(x+iy) - q(x-iy)}{4}.$$

14.19. Producto escalar complejo, espacio unitario

1. Demostrar que en todo espacio unitario E y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in E$ se verifica

1) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
2) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.
3) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$.

2. Dados dos vectores $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ de $\mathbb{C}^n$ se define

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Demostrar que es un producto escalar complejo (se le llama *producto escalar usual* en $\mathbb{C}^n$).

3. Hallar $\langle x, y \rangle$, siendo $x = (1 + 3i, -2i, 1, 5)^t$, $y = (1 + i, 1, 0, -2 + 3i)$ con $\langle\ ,\ \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{C}^4$.

4. Sea E el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado real $[a, b]$. Es decir, $E = \{x : [a, b] \to \mathbb{C},\ f \text{ continua.}\}$. Demostrar que

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

es un producto escalar en E.

5. Sea E el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)$ finitamente no nulas, (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Demostrar que

$$\langle x, y\rangle = \sum x_j \overline{y_j}$$

es un producto escalar en E.

6. Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial real o complejo con producto escalar. Probar que todo u perteneciente a V se puede escribir como: $u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle v_j$.

Solución. Recordamos que si E es espacio vectorial complejo, es decir sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se dice que la aplicación

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle &: E \times E \to \mathbb{C} \\ (x, y) &\to \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

es un producto escalar complejo si, y sólo si satisfacen las condiciones:
(i) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para todo $x, y, z \in E$.
(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y \in E$.
(iii) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ para todo $x, y \in E$.
(iv) $\langle x, x\rangle > 0$ para todo $x \in E$ con $x \neq 0$.

Equivalentemente, un producto escalar complejo es una forma hermítica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva.

1. 1) $\langle x, y+z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

2) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.

3) $\langle 0, y\rangle = \langle 0y, y\rangle = 0\langle y, y\rangle = 0, \quad \langle x, 0\rangle = \langle x, 0x\rangle = \overline{0}\langle x, x\rangle = 0\langle x, x\rangle = 0.$

2. Escribiendo los vectores x e y en columnas podemos expresar

$$\langle x, y\rangle = \left(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y^* x.$$

(i) Para todo $x, y, z \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x + y, z\rangle = z^*(x + y) = z^* x + z^* y = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle .$$

(ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle \alpha x, y \rangle = y^*(\alpha x) = \alpha(y^* x) = \alpha \langle x, y \rangle .$$

(iii) Para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$.

$$\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}} = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

(iv) Para todo $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0.$$

3. $\langle x, y \rangle = (1+3i)(1-i) + (-2i) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-2-3i) = -6 - 15i.$

4. La conjugada de una función continua es continua y el producto de continuas también, luego la integral dada existe y es un número complejo. La aplicación $\langle\ ,\ \rangle$ está bien definida. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y, z \in E$ y usando conocidas propiedades de la integral:

$$(i) \quad \langle x + y, z \rangle = \int_a^b (x(t) + y(t))\, \overline{z(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b x(t)\, \overline{z(t)}\, dt + \int_a^b y(t)\, \overline{z(t)}\, dt = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle .$$

$$(ii) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \int_a^b \alpha x(t)\, \overline{y(t)}\, dt = \alpha \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt = \alpha \langle x, y \rangle.$$

$$(iii) \quad \langle y, x \rangle = \int_a^b y(t)\, \overline{x(t)}\, dt = \int_a^b \overline{x(t)\, \overline{y(t)}}\, dt = \overline{\int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt} = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

Por último, si $x \in E$ es función no nula:

$$(iv) \quad \langle x, x \rangle = \int_a^b x(t)\, \overline{x(t)}\, dt = \int_a^b |x(t)|^2 \ dt.$$

La función $|x(t)|^2$ es continua, positiva y no nula en $[a, b]$, luego su integral es positiva en $[a, b]$ por una conocida propiedad de análisis real. Es decir, $\langle x, x \rangle > 0$.

5. Claramente $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ pues la suma es finita.
(i) Para todo $x, y, z \in E$,

$$\langle x + y, z \rangle = \sum (x_j + y_j)\, \overline{z_j} = \sum (x_j \overline{z_j} + y_j \overline{z_j})$$

$$= \sum x_j \overline{z_j} + \sum y_j \overline{z_j} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

(ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x \in E$,

$$\langle \alpha x, y\rangle = \sum (\alpha x_j)\overline{y_j} = \sum \alpha (x_j \overline{y_j}) = \alpha \sum x_j \overline{y_j} = \alpha \langle x, y\rangle.$$

(iii) Para todo $x, y \in E$,

$$\langle y, x\rangle = \sum y_j \overline{x_j} = \sum \overline{x_j \overline{y_j}} = \overline{\sum x_j \overline{y_j}} = \overline{\langle x, y\rangle}.$$

(iv) Para todo $0 \neq x \in E$ existe al menos un x_j no nulo, por tanto:

$$\langle x, x\rangle = \sum x_j \overline{x_j} = \sum |x_j|^2 > 0.$$

6. Como $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es base de V, si $u \in V$ existen escalares λ_j con $j = 1, \ldots, n$ tales que $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$u = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \Rightarrow \langle u, v_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, v_i\rangle \Rightarrow \langle u, v_i\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_j, v_i\rangle$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{B \text{ ortogonal}} \langle u, v_i\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i\rangle \underbrace{\Rightarrow}_{B \text{ unitaria}} \langle u, v_i\rangle = \lambda_i \cdot 1 = \lambda_i \Rightarrow u = \sum_{j=1}^n \langle u, v_j\rangle v_j.$$

14.20. Expresión matricial del producto escalar complejo

1. Si E es espacio unitario de dimensión n y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E, demostrar que para todo $x, y \in E$

$$\langle x, y\rangle = X^t G \overline{Y}, \text{ con } G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \ldots & \langle e_2, e_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \langle e_n, e_2\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$$

siendo X el vector de coordenadas de x en B, e Y el de y en B.

2. Demostrar que la matriz de Gram es hermítica.

Solución. 1. Sean $x, y \in E$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Entonces,

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\overline{y_k} \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle \right) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j \overline{y_k} \langle e_j, e_k \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \ldots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \ldots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \ldots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\langle x, y \rangle = X^t G \overline{Y}$.

2. Efectivamente, si $G = [g_{ij}]$ es una matriz de Gram de orden n, para todo $i = 1, \ldots, n$ se verifica $g_{ij} = \langle e_i, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, e_i \rangle}$, luego g_{ii} es real. Por otra parte, para todo $i \neq j$,

$$g_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, e_i \rangle} = \overline{g_{ij}}.$$

14.21. Matrices unitarias

1. Comprobar que $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ es matriz unitaria.

2. Identificar las matrices unitarias reales.

3. Demostrar que una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria si, y sólo si sus vectores columnas forman un sistema ortonormal con el producto escalar complejo usual.
Aplicación. Comprobar que $M = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ es unitaria.

4. Demostrar que:
1) El producto de matrices unitarias y del mismo orden es unitaria.
2) La matriz identidad es unitaria.
3) La inversa de una matriz unitaria es unitaria.
Nota. Estas propiedades demuestran que el conjunto de las matrices unitarias de orden n es subgrupo multiplicativo del grupo multiplicativo de la matrices invertibles de $\mathbb{C}^{n \times n}$.

5. Demostrar el módulo del determinante de una matriz unitaria es igual a 1.

Solución. 1. Tenemos

$$U^* U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por tanto U es unitaria.

2. Si U es matriz real y unitaria, $U^* = \left(\overline{U}\right)^t = U^t$. Entonces, U es unitaria si, y sólo si $U^tU = I$ lo cual equivale a decir que U es ortogonal.

3. El producto escalar complejo usual de dos vectores columna $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ sabemos que viene dado por

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = y^*x.$$

Si $C_1, \ldots, C_n$ son las columnas de U,

$$U^*U = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1, C_2, \ldots, C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^*C_1 & C_1^*C_2 & \ldots & C_1^*C_n \\ C_2^*C_1 & C_2^*C_2 & \ldots & C_2^*C_n \\ \vdots & & & \vdots \\ C_n^*C_1 & C_n^*C_2 & \ldots & C_n^*C_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_2, C_1\rangle & \ldots & \langle C_n, C_1\rangle \\ \langle C_1, C_2\rangle & \langle C_2, C_2\rangle & \ldots & \langle C_n, C_2\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle C_1, C_n\rangle & \langle C_2, C_n\rangle & \ldots & \langle C_n, C_n\rangle \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$U \text{ es unitaria } \Leftrightarrow U^*U = I \Leftrightarrow \begin{cases} \langle C_i, C_j\rangle = 0 & i \neq j \\ \langle C_i, C_i\rangle = \|C_i\|^2 = 1 & \forall i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

de lo cual se concluye la propiedad. Sean ahora C_1 y C_2 las columnas de M. Entonces,

$$\begin{aligned} \|C_1\| &= \sqrt{\langle C_1, C_1\rangle} = \sqrt{0\cdot 0 + (-i)\cdot \overline{i}} = \sqrt{1} = 1, \\ \|C_2\| &= \sqrt{\langle C_2, C_2\rangle} = \sqrt{i\cdot(-i) + 0\cdot 0} = \sqrt{1} = 1, \\ \langle C_1, C_2\rangle &= 0\cdot(-i) + (-i)\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

por tanto M es unitaria.

4. 1) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarias. Entonces,

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*IB = B^*B = I \Rightarrow AB \text{ es unitaria.}$$

2) Tenemos $I^*I = II = I$, por tanto I es unitaria.

3) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $A^{-1} = A^*$, por tanto

$$\left(A^{-1}\right)^* A^{-1} = (A^*)^* A^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} \text{ es unitaria.}$$

5. Si U es unitaria, $U^*U = I$. Tomando determinantes, y teniendo en cuenta que el determinante de la matriz conjugada es el conjugado del determinante,

$$(\det U^*) \cdot (\det U) = 1 \Rightarrow \left(\det \overline{U}^{\,t}\right) \cdot (\det U) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\det \overline{U}\right) \cdot (\det U) = 1 \Rightarrow \overline{\det U} \cdot \det U = 1 \Rightarrow |\det U|^2 = 1.$$

Es decir, $|\det U| = 1$.

14.22. Descomposición en valores singulares

1. Demostrar el teorema de descomposición en valores singulares:
Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Existen matrices unitarias $Q_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $Q_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $Q_1^* A Q_2 = \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ siendo

$$(i) \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } m < n.$$

$$(ii) \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } m > n.$$

$$(iii) \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \text{si } m = n,$$

con $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ todos ≥ 0 y $p = \text{mín}\{m, n\}$. A los números $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ se les llama valores singulares de A.

2. (Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).
Dada la matriz $A = \dfrac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ calcular números σ_1, σ_2 y matrices U, V que verifiquen:

(a) $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0$.
(b) $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son ortogonales.
(c) $V^t A U = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución. 1. Efectivamente, la matriz $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cumple

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A,$$

por tanto es hermítica. Como consecuencia del teorema espectral existe una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A^*A. Sea λ_i valor propio de A^*A asociado al vector propio e_i es decir, $A^*Ae_i = \lambda_i e_i$. Tenemos

$$e_i^* A^* A e_i = \lambda_i e_i^* e_i = \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = (Ae_i)^*(Ae_i) = \langle Ae_i, Ae_i \rangle \geq 0.$$

Supondremos sin pérdida de generalidad que

$$\lambda_1 > 0\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_r > 0\ ,\ \lambda_{r+1} = 0\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_n = 0.$$

Llamemos

$$\begin{cases} \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\ ,\ v_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A e_i \in \mathbb{C}^m \quad (i = 1, \ldots, r) \\ \sigma_i = 0 \quad (i = r+1, \ldots, p) \text{ con } p = \text{mín}\{m, n\}. \end{cases}$$

La familia $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es ortonormal. Efectivamente

$$(i)\ \langle v_i, v_j \rangle = \left(\frac{1}{\sigma_i} A e_i\right)^* \left(\frac{1}{\sigma_j} A e_j\right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} e_i^* A^* A e_j$$

$$= \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} e_i^* e_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \langle e_i, e_j \rangle = 0 \ \ (\text{si } i \neq j).$$

$$(ii)\ \|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \langle e_i, e_i \rangle = 1 \, \|e_i\|^2 = 1.$$

Podemos por tanto extender a una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_m\}$ de $\mathbb{C}^m$. Llamando $Q_1 = [v_1, \ldots, v_m]$ y $Q_2 = [e_1, \ldots, e_n]$ tenemos

$$Q_1^* A Q_2 = \big[v_1, \ldots, v_m\big]^* A \big[e_1, \ldots, e_n\big] = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix} A \big[e_1, \ldots, e_n\big]$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix} \big[Ae_1, \ldots, Ae_n\big] = \begin{bmatrix} v_1^* A e_1 & \ldots & v_1^* A e_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_m^* A e_1 & \ldots & v_m^* A e_n \end{bmatrix}.$$

Veamos qué matriz es $Q_1^* A Q_2$

1) Si $j > r$, $\|Ae_j\|^2 = \langle Ae_j, Ae_j \rangle = e_j^* A^* A e_j = \lambda_j e_j^* e_j = 0$. Es decir $Ae_j = 0$.

2) Para todo $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ se verifica

$$v_i^* A e_j = \frac{1}{\sigma_i} e_i^* A^* A e_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i} e_i^* e_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i} < e_i, e_j >= 0,$$

$$\text{si } i \neq j v_i^* A e_i = \frac{\lambda_i}{\sigma_i} < e_i, e_i >= \sigma_i.$$

3) $\forall i = r+1, \ldots, m$ y $\forall j = 1, \ldots, r$ se verifica

$$v_i^* A e_j = v_i^* (\sigma_j v_j) = \sigma_j < v_i, v_j >= 0 \text{ (pues } i \neq j).$$

En consecuencia tenemos

$$Q_1^* A Q_2 = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } \Sigma = \text{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r).$$

2. Aplicamos a la matriz dada el método general de cálculo que proporciona la demostración del teorema anterior

$$A^* A = A^t A = \ldots = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 45 & -3 \\ -3 & 45 \end{bmatrix}.$$

Hallemos los valores propios de $18A^*A$, para ello restamos a la segunda fila la primera y luego a la primera columna le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 45-\lambda & -3 \\ -3 & 45-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45-\lambda & -3 \\ -48+\lambda & 48-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42-\lambda & -3 \\ 0 & 48-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (42-\lambda)(48-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 42 \ \vee \lambda = 48.$$

Los valores propios de A^*A son por tanto $\lambda_1 = 42/18 = 7/3$ y $\lambda_2 = 48/18 = 8/3$. Hallemos los subespacios propios asociados a A^*A

$$\ker(A^*A - \lambda_1 I) \equiv \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases} \ker(A^*A - \lambda_2 I) \equiv \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Unas respectivas bases son $\{(1,1)^t\}$ y $\{(-1,1)^t\}$. Una base ortonormal formada por vectores propios de A^*A es por tanto

$$\{e_1 = (1/\sqrt{2})(1,1)^t, e_2 = (1/\sqrt{2})(-1,1)^t\}.$$

En consecuencia la matriz U es

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{7/3},\ \sigma_2 = \sqrt{8/3}$. Los vectores $v_1,\ v_2$ son

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A e_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A e_2 = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Extendemos v_1, v_2 a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Un vector $v_3 = (x_1, x_2, x_3)^t$ ortogonal a v_1 y v_2 ha de cumplir $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$ y $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

Elegimos por ejemplo $(3, 2, 1)$, que normalizado queda $v_3 = (1/\sqrt{14})(3, 2, 1)^t$. La descomposición pedida es por tanto

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{21} & -1/\sqrt{21} & -4/\sqrt{21} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{7/3} & 0 \\ 0 & \sqrt{8/3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.23. Matrices normales

1. Comprobar que $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{bmatrix}$ es matriz normal.

2. Aplicar el teorema espectral a la matriz normal:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{bmatrix}.$$

3. Demostrar que
1) Las matrices hermiticas antihermíticas y unitarias son normales.
2) A normal $\Rightarrow \|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
3) Si A es normal, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $Ax = \lambda x$ $\Rightarrow A^*x = \bar{\lambda}x$.
4) Vectores propios de una matriz normal asociados a valores propios distintos, son ortogonales.

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2i & 4 \\ 2i & 8 & -2i \\ 4 & 2i & 5 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que es normal y encontrar una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU$ sea diagonal.

Solución. 1.

$$AA^* = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix},$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix}$$

Se verifica $AA^* = A^*A$ es decir, A es normal.

2. Valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & 1+i \\ -1+i & 2i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3i\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3i \vee \lambda = 0 \text{ (simples)}.$$

Subespacios propios:

$$V_{3i} \equiv \begin{cases} -2ix_1 + (1+i)x_2 = 0 \\ (-1+i)x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}, \quad V_0 \equiv \begin{cases} ix_1 + (1+i)x_2 = 0 \\ (-1+i)x_1 + 2ix_2 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = 3i$ valor propio simple, $\dim V_{3i} = 1$ y una base de V_{3i} es $\{u_1 = (1, 1+i)^t\}$. Razonando análogamente obtenemos que una base de V_0 es $\{u_2 = (-1+i, 1)^t\}$. Dado que la matriz A es normal, los vectores u_1, u_2 han de ser ortogonales. En efecto,

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 1 \cdot (-1-i) + (1+i) \cdot 1 = 0.$$

Las normas de estos vectores son $\|u_1\| = \|u_2\| = \sqrt{3}$, por tanto la matriz

$$U = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

es unitaria, y según el teorema espectral se verifica

$$U^{-1}AU = U^*AU = \text{diag }(3i, 0).$$

3. 1) Usando las correspondientes definiciones,

$$A \text{ es hermítica } \Rightarrow AA^* = AA = A^*A \Rightarrow A \text{ es normal.}$$

$$A \text{ es antihermítica } \Rightarrow AA^* = A(-A) = (-A)A = A^*A \Rightarrow A \text{ es normal.}$$

$$A \text{ es unitaria } \Rightarrow AA^* = AA^{-1} = A^{-1}A = A^*A \Rightarrow A \text{ es normal.}$$

2) El producto escalar usual de dos vectores u, v de $\mathbb{C}^n$ es $\langle u, v \rangle = v^*u$, por tanto para todo $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = (Ax)^* (Ax) = x^*A^*Ax,$$

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = (A^*x)^*(A^*x) = x^*AA^*x = x^*A^*Ax.$$

Es decir, $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

3) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, la matriz $A - \lambda I$ es normal. En efecto,

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^* = (A-\lambda I)\left(A^* - \bar{\lambda}I\right)$$

$$= AA^* - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \lambda\bar{\lambda}I.$$

$$(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = \left(A^* - \bar{\lambda}I\right)(A-\lambda I)$$

$$= A^*A - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + \lambda\bar{\lambda}I = AA^* - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \lambda\bar{\lambda}I.$$

Entonces, aplicando la propiedad anterior a la matriz $A - \lambda I$,

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x = 0 \Rightarrow \|(A-\lambda I)x\| = \|(A-\lambda I)^*x\| = 0$$

$$\Rightarrow \left\|(A^* - \bar{\lambda}I)x\right\| = \left\|A^*x - \bar{\lambda}x\right\| = 0 \Rightarrow A^*x - \bar{\lambda}x = 0 \Rightarrow A^*x = \bar{\lambda}x.$$

4) Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ son vectores propios de A asociados a los valores propios λ y μ respectivamente con $\lambda \neq \mu$,

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ Ay = \mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^*Ax = \lambda y^*x \\ Ay = \mu y \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Tomando }*} \begin{cases} x^*A^*y = \bar{\lambda}x^*y \\ Ay = \mu y. \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Propiedad 3.}} \begin{cases} x^*A^*y = \bar{\lambda}x^*y \\ A^*y = \bar{\mu}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^*A^*y = \bar{\lambda}x^*y \\ x^*Ay = \bar{\mu}x^*y \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Restando}} \left(\bar{\lambda} - \bar{\mu}\right)x^*y = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Tomando }*} (\lambda - \mu)y^*x = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda\neq\mu} \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ son ortogonales.}$$

4. La matriz A satisface $A^* = A$, por tanto es hermítica y como consecuencia, normal. El polinomio característico de A es $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda$, y los valores propios $\lambda_1 = 0$ (simple) y $\lambda_2 = 9$ (doble). Un vector propio unitario asociado a λ_1 es $e_1 = \frac{1}{3}(-2, i, 2)^t$. Hallando una base del subespacio propio asociado al valor propio λ_2 y normalizando por el método de Shmidt obtenemos

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^t, \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-i, 4, i)^t.$$

La matriz unitaria $U = [e_1, e_2, e_3]$ satisface por tanto

$$U^{-1}AU = \text{diag }(0, 9, 9).$$

14.24. Matrices de proyección y simetría

1. a) Sea $\mathbb{K}^m$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) dotado del producto escalar usual y F un subespacio de $\mathbb{K}^m$. Sea $B_F = \{e_1, e_2, \ldots e_r\}$ una base ortonormal de F. Demostrar que la proyección ortogonal p sobre F viene dada por

$$p : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m, \quad p(x) = (e_1 e_1^* + e_2 e_2^* + \cdots + e_r e_r^*)\, x, \text{ con } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

A la matriz $P = e_1 e_1^* + e_2 e_2^* + \cdots + e_r e_r^*$ se la llama matriz de proyección sobre el subespacio F.
b) Como aplicación, hallar la matriz de proyección en $\mathbb{R}^3$ sobre $F \equiv x_1 + x_2 + x_3$.

2. Demostrar que la matriz P de proyección es idempotente y hermítica.

3. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) una matriz con sus n columnas linealmente independientes. Demostrar que la matriz A^*A es invertible.

4. a) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) una matriz con sus n columnas linealmente independientes. Sea $\mathbb{K}^m$ dotado del producto escalar usual. Demostrar que la matriz de proyección P sobre el subespacio columna de A es

$$P = A\,(A^*A)^{-1}\,A^*.$$

b) Como aplicación, calcular la matrices de proyección P y simetría S sobre el subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$F \equiv \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Sea el hiperplano de $\mathbb{K}^m$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

$$F \equiv a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = 0.$$

1) Demostrar que la matriz de proyección sobre F es

$$P = I - \frac{NN^*}{N^*N} \quad \text{con } N = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

2) Como aplicación, calcular la matrices de proyección P y simetría S sobre el hiperplano de $\mathbb{C}^3 : F \equiv 2x_1 + ix_2 + 2x_3 = 0$.
3) Hallar el simétrico del vector $x = (1, 1, 1)^T$ sobre el subespacio F.

6. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matriz real o compleja y con columnas linealmente independientes. Sean P y S las matrices de proyección y simetría respectivamente sobre el subespacio columna de A y con respecto del producto escalar usual, esto es

$$P = A\,(A^*A)^{-1}\,A^*, \quad S = 2P - I.$$

Usando las fórmulas anteriores demostrar que:
1) P es idempotente y hermítica.
2) S es unitaria y hermítica.

7. Sea $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ una matriz idempotente y hermítica, es decir $P^2 = P$ y $P^* = P$. Demostrar que P es la matriz de proyección sobre un determinado subespacio de $\mathbb{K}^n$ con el producto escalar usual.

Solución. 1. *a*) Recordemos que si E es espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, y $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base ortonormal de F, entonces, para todo $x \in E$ la proyección ortogonal de x sobre F es

$$p_F(x) = \langle x, e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x, e_r\rangle\, e_r. \quad \Box$$

En nuestro caso, usando el producto escalar usual y teniendo en cuenta que $e_k^* x$ es un escalar,

$$\begin{aligned} p_F(x) &= (e_1^*x)\,e_1 + \cdots + (e_r^*x)\,e_r = e_1\,(e_1^*x) + \cdots + e_r\,(e_r^*x) \\ &= (e_1e_1^*)\,x + \cdots + (e_re_r^*)\,x = (e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^*)\,x. \end{aligned}$$

Concluimos que $P = e_1e_1^* + e_2e_2^* + \cdots + e_re_r^*$.

b) Una base ortogonal de F es $\{(1, -1, 0)^T, (1, 1, -2)^T\}$, y una ortonormal,

$$B_F = \left\{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T \right\}.$$

Entonces,

$$P = e_1e_1^* + e_2e_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1, -1, 0] + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\,[1, 1, -2]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. En efecto, según el problema anterior $P = e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^*$. Entonces,

$$P^* = (e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^*)^* = (e_1^*)^*\, e_1^* + \cdots + (e_r^*)^*\, e_r^*$$

$$= e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^* = P \Rightarrow P \text{ es hermítica.}$$

$$P^2 = (e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^*)\,(e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^*)$$

$$\underbrace{=}_{B_F \text{ base ortog.}} \quad e_1\,(e_1^*e_1)\,e_1^* + \cdots + e_r\,(e_r^*e_r)\,e_r^*$$

$$\underbrace{=}_{B_F \text{ base unitaria}} \quad e_1e_1^* + \cdots + e_re_r^* = P \Rightarrow P \text{ es idempotente.}$$

3. En efecto, la matriz A^*A es de orden $n \times n$. Sea $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{C}^n$:

$$(A^*A)x = 0 \Rightarrow x^*(A^*A)x = x^*0 \Rightarrow (Ax)^*(Ax) = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow [a_1, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{a_1,\ldots,a_n \text{ lin. indep.}} \quad x_1 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$$

La única solución del sistema lineal homogéneo $(A^*A)x = 0$ es la trivial, lo cual implica por el teorema de Rouché-Fröbenius que rg $(A^*A) = n$ (rango máximo). En consecuencia, A^*A es invertible.

4. *a*) La matriz P está bien definida, pues vimos que A^*A es invertible. Además, P es de orden $m \times m$. Sea $P = [p_1, \ldots, p_m]$ y $A = [a_1, \ldots, a_n]$. Sean $e_1, \ldots, e_m$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{K}^m$, entonces

$$Pe_1 = [p_1, \ldots, p_m] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = p_1, \quad Pe_m = [p_1, \ldots, p_m] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = p_m,$$

luego las columnas de P pertenecen al subespacio columna de A, y por tanto serán combinaciones lineales de los vectores $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} p_1 = \mu_{11}a_1 + \cdots + \mu_{1n}a_n \\ \qquad\qquad \ldots \\ p_m = \mu_{m1}a_1 + \cdots + \mu_{mn}a_n \end{cases}$$

con lo cual podemos escribir

$$P = [p_1, \dots, p_m] = [a_1, \dots, a_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{1n} & \dots & \mu_{mn} \end{bmatrix}}_{W} = AW.$$

Como $P^* = P$ por ser P matriz de proyección,

$$P = AW \Rightarrow P^* = \underbrace{W^*}_{Q} A^* = QA^*.$$

Como $a_1, \dots, a_n$ pertenecen al subespacio columna de A,

$$PA = P\,[a_1, \dots, a_n] = [Pa_1, \dots, Pa_n] = [a_1, \dots, a_n] = A.$$

Entonces,

$$QA^* = P \Rightarrow QA^*A = PA \Rightarrow QA^*A = A \Rightarrow Q = A\,(A^*A)^{-1}$$
$$\Rightarrow P = QA^* = A\,(A^*A)^{-1}\,A^*.$$

b) Hallemos una base de F,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} F_3 - F_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por tanto,

$$F \equiv \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Una base de F es

$$B_F = \left\{(-2-2, 1, 0)^T, (4, 5, 0, 2)^T)\right\}.$$

Entonces, F es el subespacio columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cuyas columnas son linealmente independientes. Por tanto, la matrices pedidas son

$$P = A\,(A^*A)^{-1}\,A^* = \ldots = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$S = 2P - I = \ldots = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. 1) La dimensión de F es $m-1$. Sea $B_F = \{e_2, \ldots e_m\}$ una base ortonormal de F. La matriz de proyección sobre F es $P = e_2e_2^* + \cdots + e_me_m^*$. Normalizando el vector N, obtenemos $v = N/\sqrt{N^*N}$. Dado que $\mathbb{K}^m = F \oplus F^\perp$, una base ortonormal de $\mathbb{K}^m$ es

$$B = \{v, e_2, \ldots, e_m\}.$$

La proyección ortogonal de cualquier vector x de $\mathbb{K}^m$ sobre $\mathbb{K}^m$ es claramente x, luego la matriz de proyección sobre $\mathbb{K}^m$ es la identidad. En consecuencia,

$$I = vv^* + e_2e_2^* + \cdots + e_me_m^*.$$

Es decir, $I = vv^* + P$, de lo cual se deduce

$$P = I - vv^* = I - \frac{N}{\sqrt{N^*N}}\frac{N^*}{\sqrt{N^*N}} = I - \frac{NN^*}{N^*N}.$$

2) Tenemos $N = (2, i, 2)^T$, por tanto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -i & 2 \end{bmatrix} = \ldots = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2i & -4 \\ -2i & 8 & -2i \\ -4 & 2i & 5 \end{bmatrix},$$

$$S = 2P - I = \ldots = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4i & -8 \\ -4i & 7 & -4i \\ -8 & 4i & 1 \end{bmatrix}.$$

3) El vector pedido es

$$Sx = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4i & -8 \\ -4i & 7 & -4i \\ -8 & 4i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7+4i \\ 7-8i \\ -7+4i \end{bmatrix}.$$

6. 1) Tenemos

$$P^2 = \left(A\,(A^*A)^{-1}\,A^*\right)\left(A\,(A^*A)^{-1}\,A^*\right) = A\,(A^*A)^{-1}\,(A^*A)\,(A^*A)^{-1}\,A^*$$
$$= AI\,(A^*A)^{-1}\,A^* = A\,(A^*A)^{-1}\,A^* = P \Rightarrow P \text{ es idempotente.}$$
$$P^* = \left(A\,(A^*A)^{-1}\,A^*\right)^* = (A^*)^*\left((A^*A)^{-1}\right)^* A^* = A\,((A^*A)^*)^{-1}\,A^*$$
$$= A\,(A^*A)^{-1}\,A^* = P \Rightarrow P \text{ es hermítica.}$$

2) Tenemos

$$S^*S = (2P-I)^*(2P-I) = (2P^*-I)(2P-I) = (2P-I)(2P-I)$$
$$= 4P^2 - 2P - 2P + I = 4P - 4P + I = 0 \Rightarrow S \text{ es unitaria.}$$
$$S^* = (2P-I)^* = 2P^* - I = 2P - I = S \Rightarrow S \text{ es hermítica.}$$

7. Consideremos el subespacio F de $\mathbb{K}^n$ generado por las columnas de P. Es decir,

$$F = \{Px : x \in \mathbb{K}^n\}.$$

Veamos que P es la matriz de proyección sobre el subespacio F. En efecto, para todo $x \in \mathbb{K}^n$ se verifica $Px \in F$ por la propia definición de F. Por otra parte,

$$x = \underbrace{Px}_{\in F} + (x - Px) \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Veamos que $x - Px \in F^\perp$. En efecto, todo $y \in F$ es de la forma $y = Pz$ para algún $z \in \mathbb{K}^n$, por tanto

$$\langle x - Px, y\rangle = \langle x - Px, Pz\rangle = \langle x, Pz\rangle - \langle Px, Pz\rangle$$
$$= (Pz)^*\,x - (Pz)^*\,(Px) = z^*P^*x - z^*P^*Px$$
$$\underbrace{=}_{P\text{ hermit.}} z^*Px - z^*P^2x \underbrace{=}_{P\text{ idemp.}} z^*Px - z^*Px = 0.$$

14.25. Lema de Schur

1. Demostrar el lema de Schur: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, existe $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U^{-1}AU = U^*AU = T$ en donde T es una matriz triangular superior y los elementos de la diagonal principal de T son los valores propios de A.
2. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}.$$

Aplicar el lema de Schur para encontrar una matriz U unitaria tal que $U^{-1}AU = U^*AU = T$, con T triangular superior.

Solución. 1. Usaremos el método de inducción.
Paso base. El lema es cierto para $n = 1$. Efectivamente, si $A = [a]$ basta elegir $U = [1]$, que es unitaria y además

$$U^*AU = [1]^*[a][1] = [1][a][1] = [a] = T.$$

Paso de inducción. Sea el lema cierto para $n-1$. Sea λ_1 un valor propio de A y sea u_1 un vector propio asociado a λ_1 y de módulo 1 $(\|u_1\| = 1)$. Ampliando hasta obtener una base de $\mathbb{C}^n$ y luego ortonormalizando por el método de Schmidt obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^n : (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. La matriz $U_1 = \begin{bmatrix} u_1, u_2, \ldots, u_n \end{bmatrix}$ es por tanto unitaria y se verifica $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Entonces,

$$AU_1 = A\begin{bmatrix} u_1, u_2, \ldots, u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1, Au_2, \ldots, Au_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1, u_2, \ldots, u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & \ldots \end{bmatrix} = U_1 \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right].$$

Es decir, se verifica

$$U_1^{-1}AU_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right], \text{ con } U_1 \text{ unitaria y } A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Por hipótesis de inducción, existe $M_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ unitaria tal que

$$M_2^{-1}A_1M_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & t_{12} & \ldots & t_{1,n-1} \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & t_{2,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

siendo $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A_1. Definamos

$$U_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right].$$

La matriz U_2 es claramente unitaria. Además,

$$(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2) = U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2^{-1} \end{array}\right] U_1^{-1}AU_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 \\ \hline 0 & M_2^{-1}A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 M_2 \\ \hline 0 & M_2^{-1}A_1 M_2 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = T.$$

La matriz $U = U_1 U_2$ es unitaria por ser producto de unitarias y por tanto $U^{-1}AU = U^*AU = T$ con T triangular. Es claro que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A debido a la semejanza entre A y T. El lema es cierto para n.

2. Seguimos el esquema de la demostración del lema de Shur. Valores propios de A :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 - (1+2i)\lambda - 1 + i = 0,$$

$$\lambda = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{1}}{2} = \{1+i, i\}.$$

Subspacio propio y base asociados a $\lambda = i$:

$$V_i \equiv \begin{cases} -5x_1 - 15x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0, \end{cases} \qquad B_i = \{(-3,1)^T\}.$$

Normalizando, obtenemos $u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)^T$. Un vector ortogonal a u_1 es $(1,3)^T$, y normalizando obtenemos $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^T$. La base $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ es ortonormal, por tanto

$$U_1 = [u_1, u_2] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es matriz unitaria. Hallemos $U_1^* A U_1$:

$$U_1^* A U_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \dots = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10i & 170 \\ 0 & 10+10i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 17 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} = T.$$

La matriz U pedida es $U = U_1$.

14.26. Simetría de Householder

Sea $N \neq 0$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que la matriz de simetría respecto del hiperplano ortogonal a N viene dada por

$$H = I - 2\frac{NN^T}{N^TN},$$

la cual se llama fórmula de Householder y a la simetría asociada, simetría de Householder. Sea $a \neq 0$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que existe al menos una simetría H de Householder de modo que el vector Ha tiene todas sus componentes nulas con excepción de la primera.

Solución. Consideremos el vector $N = a + \|a\|\, e_1$, siendo e_1 el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ i.e. $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Hallemos Ha :

$$Ha = \left(I - 2\frac{NN^T}{N^TN}\right) a = Ia - 2\frac{NN^T}{N^TN} a = a - N \cdot 2\frac{N^T}{N^TN} a.$$

Desarrollemos N^TN :

$$N^TN = (a + \|a\|\, e_1)^T (a + \|a\|\, e_1) = \left(a^T + \|a\|\, e_1^T\right)(a + \|a\|\, e_1)$$

$$= a^Ta + \|a\|\, e_1^Ta + \|a\|\, a^Te_1 + \|a\|^2\, e_1^Te_1$$

$$= \|a\|^2 + \|a\| \langle e_1, a\rangle + \|a\| \langle a, e_1\rangle + \|a\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|a\| \langle e_1, a\rangle\right).$$

Por otra parte,

$$2N^Ta = 2\left(a^T + \|a\|\, e_1^T\right) a = 2\left(a^Ta + \|a\|\, e_1^Ta\right) = 2\left(\|a\|^2 + \|a\| \langle e_1, a\rangle\right).$$

En consecuencia,

$$Ha = a - N \cdot 2\frac{N^T}{N^TN} a = a - (a + \|a\|\, e_1) \frac{2\left(\|a\|^2 + \|a\| \langle e_1, a\rangle\right)}{2\left(\|a\|^2 + \|a\| \langle e_1, a\rangle\right)}$$

$$= a - (a + \|a\|\, e_1) = -\|a\|\, e_1 = \begin{bmatrix} -\|a\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

como queríamos demostrar.

14.27. Gram-Schmidt con integral impropia

Se considera el espacio vectorial E formado por las funciones

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=(a+bx)e^{-x}\ (a,b\in\mathbb{R}).$$

Comprobar que $\langle f(x),g(x)\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\ dx$ es un producto escalar que confiere a E estructura de espacio euclídeo. Elegir una base de E y ortonormalizarla por el método de Gram-Schmidt.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. Veamos que la función $\langle\ ,\ \rangle : E\times E\to\mathbb{R}$ dada está bien definida, es decir que la integral que la define es convergente. Para que el problema sea más autocontenido, no usaremos criterios de convergencia, hallando directamente el valor de la integral. Es claro que $\langle f(x),g(x)\rangle$ es de la forma $I=\int_0^{+\infty}(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}\ dx$. Calculemos pues esta integral. Usamos el conocido método de identificación de coeficientes para este tipo de funciones. Escribimos:

$$\int (Ax^2+Bx+C)e^{-2x}\ dx=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{-2x}.$$

Derivando ambos miembros:

$$(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}=[-2\alpha x^2+2(\alpha-\beta)x+\beta-2\gamma]e^{-2x}.$$

Identificando coeficientes y resolviendo:

$$\alpha=-\frac{A}{2},\ \beta=-\frac{A+B}{2},\ \gamma=-\frac{A+B+2C}{4}.$$

Tenemos por tanto:

$$I(A,B,C)=\int_0^{+\infty}(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}\ dx$$

$$=\left[-\left(\frac{A}{2}x^2+\frac{A+B}{2}x+\frac{A+B+2C}{4}\right)\cdot\frac{1}{e^{2x}}\right]_0^{+\infty}=\frac{A+B+2C}{4}.$$

La función $\langle\ ,\ \rangle$ está por tanto bien definida. Veamos que es un producto escalar.

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ es forma bilineal. En efecto, para todo λ_1,λ_2 números reales y para todo $f_1(x),f_2(x),g(x)$ elementos de E :

$$\begin{aligned}\langle\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x),g(x)\rangle &= \int_0^{+\infty}(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))g(x)dx\\ &=\lambda_1\int_0^{+\infty}f_1(x)g(x)dx+\lambda_2\int_0^{+\infty}f_2(x)g(x)dx\\ &=\lambda_1\left\langle f_1(x),g(x)\right\rangle+\lambda_2\left\langle f_2(x),g(x)\right\rangle.\end{aligned}$$

De manera análoga:

$$\langle f(x), \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \rangle = \lambda_1 \langle f(x), g_1(x) \rangle + \lambda_2 \langle f(x), g_2(x) \rangle .$$

(ii) $\langle \ , \ \rangle$ es simétrica. En efecto, para todo $f(x), g(x)$ elementos de E :

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx = \langle g(x), f(x) \rangle .$$

(iii) La forma cuadrática Q asociada a $\langle \ , \ \rangle$ es definida positiva. En efecto, para todo $f(x) \in E$ tenemos $Q(f(x)) = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx \geq 0$ al ser $f^2 \geq 0$. Por otra parte, dado que f^2 es no negativa y continua se verifica $Q(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ por un conocido teorema de Cálculo. Hemos demostrado pues que $\langle \ , \ \rangle$ es producto escalar.

Hallemos una base de E. Todo vector de este espacio se puede expresar en la forma $f(x) = a \cdot e^{-x} + b \cdot (xe^{-x})$. Esto implica que $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ es sistema generador de E. Veamos que es linealmente independiente. En efecto, si $\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 xe^{-x} = 0$, para $x = 0$ obtenemos $\alpha_1 = 0$. Para $x = 1$ queda $\alpha_2 e^{-1} = 0$ lo que implica $\alpha_2 = 0$.

Una base de E es por tanto $\mathcal{B} = \{u_1(x) = e^{-x}, u_2(x) = xe^{-x}\}$. Hallemos la base $\mathcal{B}' = \{v_1(x), v_2(x)\}$ obtenida de $\mathcal{B}$ al aplicarle el método de Gram-Schmidt. Usaremos el valor hallado de $I(A, B, C)$.

$$\|u_1(x)\|^2 = \langle u_1(x), u_1(x) \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = I(0, 0, 1) = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $v_1(x) = u_1(x)/\|u_1(x)\| = \sqrt{2}e^{-x}$. Por otra parte sabemos que

$$v_2(x) = \frac{u_2(x) - \langle u_2(x), v_1(x) \rangle v_1(x)}{\|u_2(x) - \langle u_2(x), v_1(x) \rangle v_1(x)\|}.$$

El valor de $\langle u_2(x), v_1(x) \rangle$ es:

$$\langle u_2(x), v_1(x) \rangle = \int_0^{+\infty} (xe^{-x})(\sqrt{2}e^{-x})dx = \sqrt{2}I(0, 1, 0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

El numerador de $v_2(x)$ es $n(x) = xe^{-x} - (\sqrt{2}/4)\sqrt{2}e^{-x} = (x - 1/2)e^{-x}$, entonces:

$$\|n(x)\|^2 = \langle n(x), n(x) \rangle = \int_0^{+\infty} n^2(x)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (x^2 - x + 1/4)e^{-2x}dx = I(1, -1, 1/4) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow v_2(x) = \frac{n(x)}{\|n(x)\|} = \sqrt{8}(x-1/2)e^{-x} = \sqrt{2}(2x-1)e^{-x}.$$

La base ortonormalizada de $\mathcal{B}$ por el método de Gram-Schmidt es por tanto:

$$\mathcal{B}' = \{\sqrt{2}e^{-x}, \sqrt{2}(2x-1)e^{-x}\}.$$

14.28. Proyección ortogonal en $\mathbb{R}_2[x]$

En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 se define el producto escalar

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

1. Hallar el coseno del ángulo que forman los vectores $p_1 = x$ y $p_2 = x^2$.
2. Ortonormalizar la base $B = \{1, x, x^2\}$ por el método de Schmidt.
3. Hallar la proyección ortogonal del vector x^2 sobre el subespacio M engendrado por 1 y x.
4. Determinar la distancia mínima de x^2 al subespacio M.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Dado que la integral está definida en el intervalo simétrico $[-1, 1]$, esta será nula para cualquier función impar. Tenemos $< p_1, p_2 >= (1/2)\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$. Al ser p_1 y p_2 no nulos, sus normas no son nulas y en consecuencia, el coseno del ángulo que forman estos dos vectores es

$$\cos\alpha = \frac{\langle p_1, p_2\rangle}{\|p_1\|\,\|p_2\|} = 0.$$

2. Dada una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de un espacio euclídeo E sabemos que la ortonormalizada por el método de Gram-Schmidt viene dada por

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|},$$

$$e_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, e_2\rangle e_2 - \langle u_3, e_1\rangle e_1}{\|u_3 - \langle u_3, e_2\rangle e_2 - \langle u_3, e_1\rangle e_1\|}.$$

Procedemos a efectuar los cálculos para $u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2$

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx} = 1 \Rightarrow e_1 = 1,$$

$$u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1 = x - \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx\right)\cdot 1 = x$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow e_2 = \sqrt{3}x,$$

$$u_3 - < u_3, e_2 > e_2 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 = x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx\right) \cdot \sqrt{3}x -$$

$$\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5}} \Rightarrow e_3 = (3\sqrt{5}/2)(x^2 - 1/3).$$

La base pedida es por tanto $B' = \{1,\ \sqrt{3}x,\ (3\sqrt{5}/2)(x^2 - 1/3)\}$.

3. Una base del subespacio M es $\{1, x\}$, y de los cálculos efectuados en el apartado anterior deducimos que una base ortonormal de M es $\{1, \sqrt{3}x\}$. Por un conocido teorema, la proyección de ortogonal de x^2 sobre M es

$$p = \langle x^2, 1\rangle 1 + < x^2, \sqrt{3}x > \sqrt{3}x = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \cdot 1$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx\right)\sqrt{3}x = \frac{1}{3}.$$

4. La mínima distancia de un vector a un subespacio sabemos que es la distancia del vector a su proyección ortogonal sobre el subespacio. Es decir

$$d(x^2, M) = d\left(x^2, \frac{1}{3}\right) = \left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 - 1/3)^2 dx} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

14.29. Signatura en un espacio euclídeo

Sea E un espacio vectorial real euclídeo de dimensión n y sea $u \in E$ un vector de norma 1 ($\|u\| = 1$). Para cada número real a se define en E la forma cuadrática

$$Q_a : E \to \mathbb{R}\ , \quad Q_a(x) = (\langle x, u\rangle)^2 + a\,\|x\|^2\,.$$

($\langle\ ,\ \rangle$ representa el producto escalar en E). Se pide:
(a) Determinar razonadamente la signatura de Q_a (índice de positividad, índice de negatividad, índice de nulidad), según los valores de a, si $-1 < a < 0$.
(b) La misma pregunta si $a \geq 0$ o bien $a \leq -1$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Como $\|u\| = 1$ el vector u es no nulo y en consecuencia linealmente independiente. Por el teorema de la ampliación de la base, existen vectores $u_2, \ldots, u_n$ de E tales que $B = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$ es base de E. Aplicando el método de Gram-Schmidt a B obtenemos la base ortonormaal de E: $B' = \{u, e_2, \ldots, e_n\}$.

El vector de coordenadas de u en B' es $(1, 0, \ldots, 0)$. Llamemos $(x_1, \ldots, x_n)$ al vector de coordenadas de x en B'. Dado que B' es ortonormal, el producto escalar de dos vectores por medio de sus coordenadas en B' se calcula como en el caso usual. Por tanto:

$$Q_a(x) = x_1^2 + a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = (1+a)x_1^2 + ax_2^2 + \ldots + ax_n^2.$$

En forma matricial

$$Q_a(x) = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) \begin{pmatrix} 1+a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si $-1 < a < 0$ la matriz diagonal D anterior es de la forma $D = \operatorname{diag}\,(+, -, \ldots, -)$ y la signatura de Q_a es en consecuencia $s = (1, n-1, 0)$.

(b) Para $a \geq 0$ tenemos:

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow D = \operatorname{diag}\,(1, 0, \ldots, 0) \Rightarrow s = (1, 0, n-1) \\ a > 0 \Rightarrow D = \operatorname{diag}\,(+, +, \ldots, +) \Rightarrow s = (n, 0, 0). \end{cases}$$

Para $a \leq -1$:

$$\begin{cases} a = -1 \Rightarrow D = \operatorname{diag}\,(0, -1, \ldots, -1) \Rightarrow s = (0, n-1, 1) \\ a < -1 \Rightarrow D = \operatorname{diag}\,(-, -, \ldots, -) \Rightarrow s = (0, n, 0). \end{cases}$$

14.30. Un endomorfismo antisimétrico

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual $\langle\ ,\ \rangle$ se considera el endomorfismo f cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

1. Calcular $\langle x, f(x)\rangle$ para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y los valores propios de f.
2. Determinar una ecuaciones cartesianas y unas bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. En $\mathbb{R}^n$ con un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ un endomorfismo g se llama antisimétrico si $\forall x \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle g(x), y\rangle = -\langle x, g(y)\rangle$. Demostrar que:

$$g \text{ es antisimétrico} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \ g(x) \perp x.$$

4. Verificar que si g es antisimétrico se cumplen:
i) g no tiene valores propios distintos de 0.
ii) $\operatorname{Im} g = (\ker g)^{\perp}$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Tenemos

$$\langle x, f(x)\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La expresión anterior es una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada por una matriz antisimétrica, lo cual implica que $q = 0$. Es decir, $\langle x, f(x)\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Hallemos los valores propios de f :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ -2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 14\lambda = (-\lambda)(\lambda^2 + 14).$$

El único valor propio es $\lambda = 0$, pues estamos trabajando en el cuerpo de los reales.

2. Unas ecuaciones cartesianas del núcleo son

$$\ker f \equiv \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Su dimensión es:

$$\dim(\ker f) = 3 - \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Una base del núcleo es $B_{\ker f} = \{(-3, 2, 1\}$. Los vectores (y_1, y_2, y_3) de la imagen de f son los vectores de $\mathbb{R}^3$ que se pueden expresar de la forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con x_1, x_2, x_3 variando en $\mathbb{R}$. Los tres vectores anteriores generan por tanto a Im f, el rango de la matriz A es dos y las dos primeras columnas son linealmente independientes. Concluimos que una base de Im f es $B_{\text{Im } f} = \{(0,1,-2),(-1,0,-3)\}$. Unas ecuaciones paramétricas de la imagen son

$$\text{Im } f \equiv \begin{cases} y_1 = -\lambda_2 \\ y_2 = \lambda_1 \\ y_3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Eliminando λ_1 y λ_2 obtenemos $3y_1 - 2y_2 - y_3 = 0$ (ecuación cartesiana de la imagen).

3. $\Rightarrow$) Usando la propiedad conmutativa del producto escalar

$$\begin{aligned} g \text{ antisim.} &\Rightarrow \langle g(x), y\rangle = -\langle x, g(y)\rangle \quad \forall x \forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \langle g(x), x\rangle = -\langle x, g(x)\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \langle x, g(x)\rangle = -\langle x, g(x)\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow 2\langle x, g(x)\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \langle x, g(x)\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow x \perp g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica $\langle x+y, g(x+y)\rangle = 0$. Usando la linealidad de g :

$$\begin{aligned} \langle x+y, g(x+y)\rangle = 0 &\Rightarrow \langle x+y, g(x)+g(y)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x, g(x)\rangle + \langle y, g(x)\rangle + \langle x, g(y)\rangle + \langle y, g(y)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle y, g(x)\rangle + \langle x, g(y)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle y, g(x)\rangle = -\langle x, g(y)\rangle \\ &\Rightarrow \langle g(x), y\rangle = -\langle x, g(y)\rangle \\ &\Rightarrow g \text{ antisim.} \end{aligned}$$

4. i) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de g. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $g(v) = \lambda v$. Como g es antisimétrico se verifica $\langle v, g(v)\rangle = 0$. Usando que $\|v\|^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle v, g(v)\rangle = 0 &\Rightarrow \langle v, \lambda v\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \lambda \langle v, v\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \lambda \|v\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0. \end{aligned}$$

ii) Si $v \in \text{Im } g$, existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = g(u)$. Para todo $x \in \ker g$ se verifica:

$$\langle v, x\rangle = \langle g(u), x\rangle = -\langle u, g(x)\rangle = -\langle u, 0\rangle = 0.$$

Es decir, $v \in (\ker g)^{\perp}$ con lo cual Im $g \subset (\ker g)^{\perp}$. Por otra parte, usando el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales y que para F subespacio de $\mathbb{R}^n$ se verifica $\dim F^{\perp} = n - \dim F$, tenemos:

$$\dim\,(\ker g)^{\perp} = n - \dim\,\ker g = n - (n - \dim \operatorname{Im}\,g) = \dim \operatorname{Im}\,g.$$

Concluimos que Im $g = (\ker g)^{\perp}$.

14.31. Un endomorfismo simétrico

Sea $E = \mathbb{R}^{(2,2)}$ dotado del producto escalar $\langle P, Q\rangle = \operatorname{tr}(P^tQ)$. Dada la matriz

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 1-\alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

se considera el endomorfismo T_α de E en E definido por $T_\alpha(X) = A(\alpha)\cdot X$. Se pide:

1. Determinar la matriz $M(\alpha)$ de T_α en la base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Estudiar para qué valores de α no es T_α un isomorfismo de E, y caracterizar en este caso los subespacios $\ker T_\alpha$ e Im T_α.
3. Demostrar que la matriz $M(\alpha)$ y el endomorfismo T_α tienen los mismos valores propios para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Determinar el endomorfismo traspuesto de T_α e indicar para que valores de α es T_α un endomorfismo simétrico.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Denotemos $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, entonces

$$T(e_1) = A(\alpha)e_1 = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = (-1+\alpha)e_1 + \alpha e_3,$$

$$T(e_2) = A(\alpha)e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1+\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = (-1+\alpha)e_2 + \alpha e_4,$$

$$T(e_3) = A(\alpha)e_3 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (1-\alpha)e_1 - e_3,$$

$$T(e_4) = A(\alpha)e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1+\alpha)e_2 - e_4.$$

Trasponiendo coeficientes obtenemos la matriz $M(\alpha)$ de T_α en la base B :

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. El endomorfismo T_α no es isomorfismo si y sólo si $M(\alpha)$ no es invertible, o equivalentemente si y sólo si $\det M(\alpha) \neq 0$. Para hallar este determinante sumamos a la primera columna la tercera:

$$\det M(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ \alpha-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)\begin{vmatrix} 0 & 1-\alpha & 0 \\ -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} -1+\alpha & 1-\alpha \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha^2-2\alpha+1) = (\alpha-1)^4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Para $\alpha = 1$ la matriz del endomorfismo T_1 es

$$M(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Unas ecuaciones de $\ker T_1$ en coordenadas en la base B y una base $\ker T_1$ son:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad B_{\ker T_1} = \{(1,0,1,0)^t, (0,1,0,1)^t\}.$$

Una base de $\ker T_1$ la podemos expresar por tanto en la forma

$$B_{\ker T_1} = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

Un conjunto maximal de columnas linealmente independientes de la matriz de una aplicación lineal sabemos que determina una base de la imagen, en consecuencia una base de $\operatorname{Im} T_1$ es

$$B_{\operatorname{Im} T_1} = \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

3. Desarrollando por los elementos de la primera columna obtenemos

$$|M(\alpha)-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1+\alpha-\lambda & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -1+\alpha-\lambda & 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1+\alpha-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1+\alpha-\lambda & 1-\alpha \\ \alpha & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \alpha(1-\alpha)\begin{vmatrix} -1+\alpha-\lambda & 1-\alpha \\ \alpha & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+\alpha-\lambda & 1-\alpha \\ \alpha & -1-\lambda \end{vmatrix}^2 = |A(\alpha)-\lambda I|^2.$$

Es decir, la matriz $A(\alpha)$ y el endomorfismo T_α tienen los mismos valores propios para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Denotemos

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\ ,\ Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\ .$$

La expresión del producto escalar es

$$\langle P, Q\rangle = \langle \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\rangle = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Dado que $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ son las coordenadas de P y Q respectivamente en la base B, la expresión del producto escalar en esta base es

$$\langle P, Q\rangle = X^t I Y,$$

lo cual implica que la base B es ortonormal. La matriz del endomorfismo traspuesto T_α^t es por tanto $M(\alpha)^t$ y el endomorfismo T_α es simétrico si y sólo si $M(\alpha)$ es simétrica. Esto ocurre cuando $\alpha = 1/2$.

14.32. Automorfismo en un espacio euclídeo

Sea E espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $H \subset E$ subespacio.

1. Probar que existe un único automorfismo f en E cumpliendo

$$\begin{cases} f(x) = x & \forall x \in H \\ f(x) = -x & \forall x \in H^\perp \end{cases}$$

Probar también que $f^{-1} = f$.
2. Calcular dicho automorfismo si $E = \mathbb{R}^3$ siendo H el subespacio generado

por el vector $(-2, 0, 1)$ y calcular la imagen mediante dicho automorfismo del subespacio

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}.$$

(Se considera el producto escalar usual).
3. Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio tridimensional, H una recta pasando por el origen y la simetría g respecto de la recta H. Probar que de identificar puntos y vectores de $\mathbb{R}^3$, g es el automorfismo del que se habla en el primer apartado.
4. Deducir que el simétrico de un plano respecto de una recta es a su vez un plano y que este es único.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Veamos que f es único. En efecto, como $E = H \oplus H^\perp$, todo $x \in E$ se puede expresar de manera única en la forma $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in H$, $x_2 \in H^\perp$. Entonces

$$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = x_1 - x_2.$$

Concluimos que si el automorfismo f existe, entonces está unívocamente determinado. Veamos ahora que la aplicación $f : E \to E$ definida mediante $f(x) = x_1 - x_2$ es efectivamente un automorfismo en E que satisface $f(x) = x$ para todo $x \in H$ y $f(x) = -x$ para todo $x \in H^\perp$.

(a) f es lineal. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y sean $x, y \in E$ tales que $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in H, x_2 \in H^\perp$, $y = y_1 + y_2$ con $y_1 \in H, y_2 \in H^\perp$. Entonces

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2).$$

en donde $\lambda x_1 + \mu y_1 \in H$ y $\lambda x_2 + \mu y_2 \in H^\perp$. Tenemos

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda(x_1 - x_2) + \mu(y_1 - y_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

es decir, f es lineal.

(b) f es inyectiva. Si $x \in \ker f$ entonces $f(x) = x_1 - x_2 = 0$ es decir, $x_1 = x_2$ lo cual implica que x_1 y x_2 pertenecen a $H \cap H^\perp = \{0\}$. Por tanto $x_1 = x_2 = 0$ y en consecuencia $x = 0$. Hemos demostrado que $\ker f = \{0\}$ o equivalentemente que f es inyectiva.

(c) f es sobreyectiva. Por el teorema de las dimensiones para aplicaciones lineales deducimos que $\dim \operatorname{Im} f = \dim E$ es decir, $\operatorname{Im} f$, por tanto f es sobreyectiva. Hemos demostrado que f es isomorfismo, y por ende automorfismo, al ser el espacio inicial igual al final.

(d) Si $x \in H$ entonces $x = x + 0$ con $x \in H, 0 \in H^{\perp}$ y si $x \in H^{\perp}$ entonces $x = 0 + x$ con $0 \in H, x \in H^{\perp}$. En consecuencia

$$\begin{cases} f(x) = x - 0 = x & \forall x \in H \\ f(x) = 0 - x = -x & \forall x \in H^{\perp}. \end{cases}$$

Finalmente veamos que $f^{-1} = f$ o de forma equivalente, que $f \circ f = I$. Efectivamente, para todo $x \in E$ se verifica

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \\ &= x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x = I(x). \end{aligned}$$

2. Los vectores de $H^{\perp}$ son los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ortogonales al vector $(-2, 0, 1)$, es decir, $H^{\perp} \equiv -2x + z = 0$. Una base de $H^{\perp}$ es $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Dado que $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^{\perp}$, la unión de una base de H con otra de $H^{\perp}$ es una base de $\mathbb{R}^3$:

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(-2, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 0)\}.$$

Expresemos ahora cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como suma de uno de H y otro de $H^{\perp}$:

$$(x, y, z) = \lambda_1(-2, 0, 1) + \lambda_2(1, 0, 2) + \lambda_3(0, 1, 0).$$

Resolviendo el sistema correspondiente obtenemos $\lambda_1 = (z - 2x)/5$, $\lambda_2(x + 2z)/5$ y $\lambda_3 = -y$. El sumando que pertenece a H es:

$$\lambda_1(-2, 0, 1) = \frac{1}{5}(4x - 2z, 0, -2x + z), \quad (1)$$

y el sumando que pertenece a $H^{\perp}$:

$$\lambda_2(1, 0, 2) + \lambda_3(0, 1, 0) = \frac{1}{5}(-x + 2z, 5y, -2x - 4z). \quad (2)$$

Restando al sumando (1) el sumando (2) obtenemos el vector $(x, -y, z)$, es decir el automorfismo f es:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, -y, z).$$

El transformado de F es por tanto $f(F) \equiv x + y + 2z = 0$.

3. La simetría g es un automorfismo que cumple

$$\begin{cases} g(x) = x & \forall x \in H \\ g(x) = -x & \forall x \in H^{\perp}. \end{cases}$$

Por la unicidad demostrada en el primer apartado se deduce que $g = f$.

4. Por ser g automorfismo, conserva la dimensiones de los subespacios en consecuencia transforma planos en planos. La unicidad de cada plano es consecuencia inmediata de la definición de aplicación.

14.33. Endomorfismo, forma cuadrática y cono

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual $\langle\ ,\ \rangle$ y siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica, se considera el endomorfismo T y la forma cuadrática f que cumplen las condiciones:

i) $\forall x \forall y \in \mathbb{R}^3 \quad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$.
ii) $T(e_1) \in L[e_1 - e_3]$.
iii) $T(e_2) \in L[e_2 + 2e_3]$.
iv) $T(e_3) = -9e_1 + 8e_2 - 11e_3$.
v) $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \langle T(x), x\rangle$.

1. Hallar la matriz de T respecto a B. Estudiar si es un isomorfismo. Estudiar si es un isomorfismo isométrico.
2. Estudiar si T es diagonalizable. Hallar la suma, el producto y los signos de los valores propios.
3. Obtener la matriz de f respecto a B, y una expresión polinómica de $f(x_1, x_2, x_3)$. Reducir esta expresión a suma de cuadrados.
4. Estudiar que figura geométrica es la curva C de ecuaciones

$$x_3 = 1,\ f(x_1, x_2, 1) = 0.$$

Hallar una ecuación no paramétrica, respecto de B del cono de vértice $(0, 0, 0)$ y directriz C.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. De $T(e_1) \in L[e_1 - e_3]$ deducimos que $T(e_1) = \lambda e_1 - \lambda e_3$, y de $T(e_2) \in L[e_2 + 2e_3]$ que $T(e_2) = \mu e_2 + 2\mu e_3$. Si A es la matriz pedida:

$$\left\{ \begin{matrix} T(e_1) = \lambda e_1 - \lambda e_3 \\ T(e_2) = \mu e_2 + 2\mu e_3 \\ T(e_3) = -9e_1 + 8e_2 - 11e_3 \end{matrix} \right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -9 \\ 0 & \mu & 8 \\ -\lambda & 2\mu & -11 \end{bmatrix}.$$

La condición i) indica que T es un endomorfismo simétrico. Como la base canónica B es ortonormal con respecto del producto escalar usual, la matriz

A es simétrica. Es decir, $\lambda = -9$ y $\mu = 4$. En consecuencia:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 8 \\ -9 & 8 & -11 \end{bmatrix}.$$

Se verifica $\det A = -1296 \neq 0$ lo cual implica que T es isomorfismo. Dado que la base canónica es ortonormal con el producto escalar usual, T será isomorfismo isométrico si y sólo si A es ortogonal, y claramente no lo es.

2. La matriz real A es simétrica, y por tanto diagonalizable en $\mathbb{R}$ (teorema espectral). Como consecuencia, T lo es. Sea $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (con λ_i valores propios de A) una matriz semejante con A. Teniendo en cuenta que matrices semejantes tienen la misma traza y el mismo determinante:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det D = \det A = -1296$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} A = 2.$$

De las igualdades anteriores se deduce inmediatamente que un valor propio es negativo y los dos restantes positivos.

3. Llamando $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ se verifica

$$f(x) = \langle T(x), x\rangle = \langle Ax, x\rangle = (Ax)^t x = x^t A^t x = x^t A x.$$

En consecuencia, la matriz de f en la base B es A. Además:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 8 \\ -9 & 8 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 4x_2^2 - 11x_3^2 - 18x_1x_3 + 16x_2x_3. \end{aligned}$$

Descompongamos ahora $f(x_1, x_2, x_3)$ en suma de cuadrados independientes usando el método de Gauss:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 9(x_1^2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 - 11x_3^2 + 16x_2x_3 \\ &= 9(x_1 - x_3)^2 - 9x_3^2 + 4x_2^2 - 11x_3^2 + 16x_2x_3 \\ &= 9(x_1 - x_3)^2 + (4x_2^2 - 20x_3^2 + 16x_2x_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_2^2 - 20x_3^2 + 16x_2x_3 &= 4(x_2^2 + 4x_2x_3) - 20x_3^2 \\ &= 4(x_2 + 2x_3)^2 - 16x_3^2 - 20x_3^2 \\ &= 4(x_2 + 2x_3)^2 - 36x_3^2. \end{aligned}$$

Queda por tanto

$$f(x_1,x_2,x_3)=9(x_1-x_3)^2+4(x_2+2x_3)^2-36x_3^2.$$

4. Tenemos $f(x_1,x_2,1)=9(x_1-1)^2+4(x_2+2)^2-36$, por tanto la curva C tiene por ecuaciones:

$$C\equiv\left\{\begin{matrix}\dfrac{(x_1-1)^2}{4}+\dfrac{(x_2+2)^2}{9}=1\\ x_3=1.\end{matrix}\right.$$

En consecuencia es una elipse contenida en el plano $x_3=1$, de centro $(1,-2,0)$ y semiejes $a=2, b=3$. Hallemos la ecuación del cono. La rectas que pasan por el origen y que no son paralelas al plano $x_3=1$ son de la forma $X_1/\lambda=X_2/\mu=X_3/1$ o equivalentemente de la forma $X_1=\lambda X_3,\ X_2=\mu X_3$. Obligando a que corten a la directriz:

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{(\lambda X_3-1)^2}{4}+\dfrac{(\mu X_3+2)^2}{9}=1\\ X_3=1.\end{matrix}\right.$$

Eliminando X_3 de las dos igualdades anteriores obtenemos $9(\lambda-1)^2+4(\mu+2)^2=36$. Esta última relación proporciona la condición que han de cumplir las rectas $X_1=\lambda X_3,\ X_2=\mu X_3$ para que pertenezcan al cono. Sustituyendo en esta relación λ por X_1/X_2 y μ por X_2/X_3, obtenemos la ecuación del cono:

$$9(X_1-X_3)^2+4(X_1+2X_3)^2-36X_3^2=0.$$

14.34. Subespacio ortogonal al de las matrices diagonales

Sea E el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n y entradas reales. Se considera el producto escalar

$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}\,AB^t,\quad \forall A.B\in E.$$

Sea W el subespacio de E formado por las matrices diagonales. Determinar $W^\perp$, y hallar su dimensión.

Solución. Sea $X\in E$. Para que X pertenezca a $W^\perp$ es necesario y suficiente que X sea ortogonal a los elementos de una base de W. Elijamos $B=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ como base de W siendo:

$$D_1=\begin{bmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}0&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{bmatrix},\ \ldots,\ D_n=\begin{bmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{bmatrix}$$

Sea la matriz genérica de E :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} .$$

Entonces

$$\langle D_1, X\rangle = \text{tr } D_1X^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{tr} \begin{bmatrix} x_{11} & & \dots & \\ & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \dots & 0 \end{bmatrix} = x_{11}.$$

De manera análoga:

$$\langle D_2, X\rangle = x_{22} \ , \ \dots \ , \ \langle D_n, X\rangle = x_{nn}$$

Entonces,

$$X \in W^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle D_1, X\rangle = 0 \\ \langle D_2, X\rangle = 0 \\ \dots \\ \langle D_n, X\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ \dots \\ x_{nn} = 0. \end{cases}$$

El subespacio ortogonal a W es por tanto:

$$W^{\perp} = \{ \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} : x_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

y dado que $E = W \oplus W^{\perp}$, se verifica

$$\dim W^{\perp} = \dim E - \dim W = n^2 - n = n(n-1).$$

14.35. Diagonalización simultánea, sistema diferencial

(i) Hallar todas las soluciones del sistema diferencial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

(ii) Hallar la solución particular cumpliendo

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_1'(0) = -\sqrt{2},\ x_2'(0) = \sqrt{2}/4. \end{cases}$$

Solución. Comentamos el método general. Sea el sistema diferencial $BX'' = AX$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas y B definida positiva. Sabemos que existe una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible tal que

$$\begin{cases} C^tAC = D \\ C^tBC = I_n. \end{cases} \qquad (1)$$

siendo $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con λ_i los valores propios generalizados. Efectuando el cambio $X = CY$ obtenemos

$$BX'' = AX \Leftrightarrow BCY'' = ACY \Leftrightarrow (C^t)^{-1}Y'' = (C^t)^{-1}DY \Leftrightarrow Y'' = DY.$$

(i) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ambas matrices son simétricas y B es definida positiva al tener todos sus menores principales positivos. Los valores propios generalizados son

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & 2 - 2\lambda \\ 2 - 2\lambda & 8 - 8\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 2.$$

Hallemos los subespacios propios generalizados

$$V_{\lambda_1} \equiv \left\{ (1/2)x_1 = 0 \right. , \ V_{\lambda_2} \equiv \begin{cases} (-1/2)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 = 0. \end{cases}$$

Unas bases estos subespacios son $B_1 = \left\{ v_1 = (0,1)^t \right\}$ y $B_2 = \left\{ v_2 = (4,-1)^t \right\}$. Estos vectores corresponden a valores propios generalizados distintos, en consecuencia son B-ortogonales. Sus normas son $\|v_1\| = \sqrt{v_1^tBv_1} = 2\sqrt{2}$, $\|v_2\| = \sqrt{v_2^tBv_2} = 2\sqrt{2}$. Una matriz C cumpliendo las condiciones (1) sabemos que es $C = [\ v_1/\|v_1\|,\ v_2/\|v_2\|\ ]$ es decir

$$C = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos el sistema diagonal $Y'' = DY$

$$Y''(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1''(t) = y_1(t) \\ y_2''(t) = 2y_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ y_2(t) = \gamma e^{\sqrt{2}t} + \lambda e^{-\sqrt{2}t}. \end{cases}$$

Por tanto

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = CY(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 4\gamma e^{\sqrt{2}t} + 4\lambda e^{-\sqrt{2}t} \\ \alpha e^t + \beta e^{-t} - \gamma e^{\sqrt{2}t} - \lambda e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}.$$

(ii) Imponiendo las condiciones $X(0) = (0,0)^t$, $X'(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/4)^t$ y resolviendo el sistema obtenemos

$$X(t) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4e^{\sqrt{2}t} + 4e^{-\sqrt{2}t} \\ e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}.$$

14.36. $Q(A) = (\textbf{traza } A)^2 - 2\det A$

En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ se considera el producto escalar

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Se define la aplicación $Q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(A) = (\text{traza } A)^2 - 2\det A.$$

$a)$ Comprobar que Q es una forma cuadrática y hallar su matriz asociada en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.
$b)$ Encontrar una base ortonormal con respecto al producto escalar definido anteriormente en la que la matriz asociada a Q sea diagonal.

Solución. $a)$ Sea $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$Q(A) = (x_1 + x_4)^2 - 2(x_1x_4 - x_2x_3) = x_1^2 + x_4^2 + 2x_2x_3.$$

Obsérvese que (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas de A en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$. Por el conocido isomorfismo entre todo espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}^n$ (fijada un base), podemos concluir que Q es una forma cuadrática al ser un polinomio homogéneo de grado 2. Podemos expresar

$$Q(A) = (x_1, x_2, x_3, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a Q en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Valores propios de M :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2-1).$$

Los valores propios son por tanto 1 (triple) y -1 (simple). Unas ecuaciones cartesianas de los subespacios propios y unas correspondientes bases ortogonales son

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad B_1 = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0)\},$$

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0, \end{cases} \quad B_{-1} = \{(0,-1,1,0)\}.$$

Base ortonormal y de vectores propios:

$$\left\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0)\right\}$$

(en coordenadas en la base canónica). La base pedida es por tanto

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Nota. La matriz P de cambio de la base canónica a la base B es ortogonal (pues ambas son ortogonales). Por tanto

$$P^{-1}MP = P^tMP = \text{diag }(1,1,1,-1)$$

es la matriz de Q en la base B.

14.37. Una matriz normal

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal, es decir $AA^* = A^*A$ ($A^* = \bar{A}^{\,t}$, traspuesta de la conjugada de A).

a) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{C}^n$ es $\|Ax\|_2 = \|A^*x\|_2$.
b) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, estudiar si la matriz $A - \lambda I$ es normal razonando la respuesta. Sea ahora λ un valor propio de A, estudiar si $\bar{\lambda}$ es valor propio de A^*,

razonando la respuesta.
c) Sean λ y μ dos valores propios distintos de A. Sean u y v dos vectores propios de A asociados a λ y μ respectivamente. Estudiar si u y v son siempre ortogonales, razonando la respuesta.

(Propuesto en examen de Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. a) Usando las definiciones de norma euclídea, producto escalar, conocidas propiedades del operador *, y que A es normal:

$$\|A^*x\|_2^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = (A^*x)^*(A^*x) = x^*(A^*)^*A^*x$$

$$= x^*AA^*x = x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|_2^2 .$$

Es decir, $\|Ax\|_2 = \|A^*x\|_2 .$

b) Desarrollando $(A-\lambda I)^*(A-\lambda I)$ y $(A-\lambda I)(A-\lambda I)^*$:

$$(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = (A^* - \bar{\lambda}I)(A-\lambda I) = A^*A - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I,$$

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^* = (A-\lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I) = AA^* - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + |\lambda|^2 I.$$

Dado que $AA^* = A^*A$, deducimos que $(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = (A-\lambda I)(A-\lambda I)^*$ y por tanto la matriz $A-\lambda I$ es normal.
Si λ es valor propio de A entonces existe un vector $w \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $Aw = \lambda w$ o de forma equivalente, $(A-\lambda I)w = 0$. Como $A-\lambda I$ es normal, usando el apartado a):

$$0 = \|(A-\lambda I)w\|_2 = \|(A-\lambda I)^*w\|_2 .$$

Deducimos que $0 = (A-\lambda I)^*w = (A^* - \bar{\lambda}I)w$ o equivalentemente que $A^* = \bar{\lambda}w$ con $w \neq 0$. Por tanto, $\bar{\lambda}$ es valor propio de A^*.

c) Por hipótesis $Au = \lambda u$ y $Av = \mu v$. Multiplicando por v^* en la primera igualdad obtenemos $v^*Au = \lambda v^*u$ y tomando * en ambos miembros, $u^*A^*v = \bar{\lambda}u^*v$. Ahora bien, por el apartado b) se verifica $A^*v = \bar{\mu}v$ y por tanto:

$$u^*\bar{\mu}v = \bar{\lambda}u^*v \Rightarrow (\bar{\lambda} - \bar{\mu})u^*v = 0 \Rightarrow (\bar{\lambda} - \bar{\mu})\langle u, v\rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$, también $\bar{\lambda} \neq \bar{\mu}$ y ha de ser $\langle u, v\rangle = 0$. Los vectores u y v son ortogonales.

Capítulo 15

Álgebra de los números complejos

15.1. Cuerpo de los números complejos

Demostrar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es cuerpo, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones habituales en $\mathbb{C}$.

Solución. *a*) $(\mathbb{C}, +)$ es grupo abeliano. En efecto,
1. Interna. Para todo $x_1 + y_1 i,\ x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ con $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\in\mathbb{R}}) + (\underbrace{y_1 + y_2}_{\in\mathbb{R}})i \in \mathbb{C}.$$

2. Asociativa. Para todo $x_1 + y_1 i,\ x_2 + y_2 i,\ x_3 + y_3 i \in \mathbb{C}$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, y usando la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{R}$,

$$[(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)] + (x_3 + y_3 i) = [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i] + (x_3 + y_3 i)$$

$$= ((x_1 + x_2) + x_3) + ((y_1 + y_2) + y_3)\, i = (x_1 + (x_2 + x_3)) + (y_1 + (y_2 + y_3))\, i$$

$$= (x_1 + y_1 i) + [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i] = (x_1 + y_1 i) + [(x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i)]\,.$$

3. Existencia de elemento neutro. Para todo $x + yi \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(x + yi) + (0 + 0i) = (x + 0) + (y + 0)i = x + yi,$$
$$(0 + 0i) + (x + yi) = (0 + x) + (0 + y)i = x + yi,$$

por tanto $0 + 0i$ es elemento neutro.
4. Existencia de elemento simétrico. Para todo $x + yi \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(x + yi) + ((-x) + (-y)i) = (x + (-x)) + (y + (-y))\, i = 0 + 0i,$$

$$((-x)+(-y)i)+(x+yi) = ((-x)+x)+((-y)+y)\,i = 0+0i,$$

por tanto, todo elemento de $\mathbb{C}$ tiene simétrico.
5. Conmutativa. Para todo $x_1+y_1i,\ x_2+y_2i \in \mathbb{C}$ con $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$ y usando la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$,

$$(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i) = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

$$= (x_2+x_1)+(y_2+y_1)i = (x_2+y_2i)+(x_1+y_1i).$$

b) $(\mathbb{C},\cdot)$ es semigrupo conmutativo y unitario. En efecto,
1. Interna. Para todo $x_1+y_1i,\ x_2+y_2i \in \mathbb{C}$ con $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (\underbrace{x_1x_2-y_1y_2}_{\in\mathbb{R}})+(\underbrace{y_1x_2+x_1y_2}_{\in\mathbb{R}})i \in \mathbb{C}.$$

2. Asociativa. Para todo $x_1+y_1i,\ x_2+y_2i,\ x_3+y_3i \in \mathbb{C}$ con $x_j,y_j \in \mathbb{R}$, y usando conocidas propiedades de la suma y del producto en $\mathbb{R}$,

$$[(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)]\,(x_3+y_3i) = [(x_1x_2-y_1y_2)+(y_1x_2+x_1y_2)i]\,(x_3+y_3i)$$

$$= (x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-y_1x_2y_3-x_1y_2y_3)+(x_1x_2y_3-y_1y_2y_3+y_1x_2x_3+x_1y_2x_3)i.$$

Por otra parte

$$(x_1+y_1i)\,[(x_2+y_2i)(x_3+y_3i)] = (x_1+y_1i)\,[(x_2x_3-y_2y_3)+(y_2x_3+x_2y_3)i]$$

$$= (x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1y_2x_3-y_1x_2y_3)+(y_1x_2x_3-y_1y_2y_3+x_1y_2x_3+x_1x_2y_3)i.$$

Se verifica la igualdad.
3. Conmutativa. Para todo $x_1+y_1i,\ x_2+y_2i \in \mathbb{C}$ con $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$,

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i,$$

$$(x_2+y_2i)(x_1+y_1i) = (x_2x_1-y_2y_1)+(y_2x_1+x_2y_1)i.$$

Se verifica la igualdad.
4. Existencia de elemento unidad. Para todo $x+yi \in \mathbb{C}$ con $x,y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(x+yi)(1+0i) = (1x-0y)+(1y+0x)i = x+yi,$$

por tanto $1+0i$ es elemento unidad.
c) Todo elemento no nulo de $\mathbb{C}$ tiene inverso. En efecto, si $x+yi \in \mathbb{C}$ con x, $y \in \mathbb{R}$ es no nulo, entonces $x \neq 0$ o $y \neq 0$ con lo cual $x^2+y^2 \neq 0$. Entonces,

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{yx-xy}{x^2+y^2}i = 1+0i,$$

luego $x+iy$ tiene inverso.
Concluimos que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es cuerpo.

15.2. Operaciones con números complejos

1. Expresar en forma binómica de cada uno de los siguientes números complejos:

$$a)\ \frac{3-2i}{1+4i}.\ \ b)\ i^{23}.\ \ c)\ \frac{1}{z}.\ \ d)\ \frac{z-1}{z+1}.\ \ e)\ (1-2i)^4.\ \ f)\ \sqrt{3-4i}.$$

2. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2-(2+i)z-1+7i=0$.

3. Determinar todos los números complejos que son conjugados con su cubo.

4. *a*) Demostrar que si $z\in\mathbb{C}$, entonces $\text{Re } z>0 \Leftrightarrow |z-1|<|z+1|$.
b) Demostrar que si $x+yi=(s+ti)^n$ con $n\in\mathbb{N}$, $x,y,s,t\in\mathbb{R}$, entonces $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$.

5. Demostrar que si r es raíz de un polinomio $p(z)\in\mathbb{C}[z]$ con coeficientes reales, también $\overline{r}$ es raíz de $p(z)$.

6. Sabiendo que el polinomio $p(z)=4z^4-12z^3+13z^2-12z+9$ tiene la raíz compleja $r=i$, hallar todas sus raíces.

7. Determinar el valor real del parámetro a para que la ecuación en z

$$|z|^2-(3-4i)z-(3-4i)\overline{z}+a=0$$

represente una circunferencia en el plano complejo de radio 3.

8. Sean $z_1=1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ las distintas raíces enésimas de la unidad. Demostrar que $(1-z_2)(1-z_3)\ldots(1-z_n)=n$.

9. Sea $G=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Demostrar que $(G,\cdot)$ es grupo.

Solución. 1. *a*) $\dfrac{3-2i}{1+4i}=\dfrac{(3-2i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\dfrac{3-8+(-2-12)i}{1^2+4^2}=-\dfrac{5}{17}-\dfrac{14}{17}i.$

b) $i^{23}=i^{20}i^3=\left(i^4\right)^5(-i)=1^5(-i)=-i.$

c) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{\text{Re } z}{|z|^2}-\dfrac{\text{Im } z}{|z|^2}i.$

d) $\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{z-1}{z+1}\cdot\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}+1}=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1+2\text{Re } z}+\dfrac{2\text{Im } z}{|z|^2+1+2\text{Re } z}i.$

$e)$ Usando la fórmula del binomio de Newton

$$(1-2i)^4 = \binom{4}{0}1^4(2i)^0 - \binom{4}{1}1^3(2i)^1 + \binom{4}{2}1^2(2i)^2 - \binom{4}{3}1^1(2i)^3 + \binom{4}{4}1^0(2i)^4$$

$$= 1 - 4\cdot 2i + 6\cdot 4i^2 - 4\cdot 8i^3 + 1\cdot 16i^4 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i.$$

$f)$ Tenemos para x, y números reales

$$\sqrt{3-4i} = x + yi \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema anterior. Sustituyendo $y = -2/x$ en la primera ecuación

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3, \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \{4, -1\}.$$

Como x es real, queda $x = \pm 2$ y por tanto, $y = \mp 1$. Es decir, $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$.

2. Tenemos

$$z = \frac{2 + i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(-1+7i)}}{2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{7 - 24i}}{2}$$

$$= \ldots = \frac{2 + i \pm (4 - 3i)}{2} = \{3 - i, -1 + 2i\}.$$

3. Sea $z = x + yi$ con x, y reales. Entonces,

$$z^3 = \overline{z} \Leftrightarrow (x+yi)^3 = x - yi \Leftrightarrow x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x - yi$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema anterior se deduce que $x = 0$ o $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$. Si $x = 0$, sustituyendo en la segunda obtenemos $y(1 - y^2) = 0$, es decir $y = 0$ 0 $y = \pm 1$. Por tanto, los números complejos 0, y $\pm i$ satisfacen las condiciones del problema.

Si $x^2-3y^2-1=0$, de la segunda ecuación se deduce $y=0$ o $3x^2-y^2+1=0$. Si $y=0$, entonces queda $x=\pm 1$. Si $3x^2-y^2+1=0$, queda el sistema

$$\begin{cases} x^2-3y^2-1=0 \\ 3x^2-y^2+1=0. \end{cases}$$

Restando a la segunda ecuación la primera multiplicada por 3 obtenemos $8y^2+4=0$, lo cual no proporciona ninguna solución.
Los números pedidos son por tanto $0, \ \pm 1, \ \pm i$.

4. a) Tenemos las siguientes equivalencias

$$|z-1|<|z+1| \Leftrightarrow |z-1|^2<|z+1|^2 \Leftrightarrow (z-1)\left(\overline{z-1}\right)<(z+1)\left(\overline{z+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow (z-1)\left(\overline{z}-1\right)<(z+1)\left(\overline{z}+1\right) \Leftrightarrow z\overline{z}-\overline{z}-z+1<z\overline{z}+\overline{z}+z+1$$

$$\Leftrightarrow 0<2\left(z+\overline{z}\right) \Leftrightarrow 0<\operatorname{Re} z.$$

b) Tomando módulos en ambos miembros

$$|x+yi|=|(s+ti)^n|=|s+ti|^n .$$

Elevando al cuadrado

$$|x+yi|^2=|s+ti|^{2n}=\left(|s+ti|^2\right)^n \Rightarrow x^2+y^2=(s^2+t^2)^n.$$

5. Sea $p(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $a_k\in\mathbb{R}$ para todo k. Usando conocidas propiedades del conjugado

$$r \text{ es raíz de } p(z) \Rightarrow p(r)=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k r^k=0 \Rightarrow \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k}=\overline{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\;\overline{r^k}=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k\;\overline{r}^{\,k}=0 \Rightarrow p\left(\overline{r}\right)=0 \Rightarrow \overline{r} \text{ es raíz de } p(z).$$

6. Como el polinomio $p(z)$ tiene todos los coeficientes reales, $-i$ también es raíz de $p(z)$, luego

$$p(z)=(z-i)(z+i)q(z)=(z^2+1)q(z) \text{ con } q(z)\in\mathbb{C}[z].$$

Dividiendo $p(z)$ entre z^2+1 obtenemos $q(z)=4z^2-12z+9$, o bien $q(z)=4(z-3/2)^2$. Las raíces de $p(z)$ son por tanto $\pm i$ (simples) y $3/2$ (doble).

7. Sea $z = x + yi$ con x, y números reales. Sustituyendo tenemos

$$x^2 + y^2 - (3 - 4i)(x + yi) - (3 + 4i)(x - yi) + a = 0,$$

$$x^2 + y^2 - (3x - 4xi + 3yi + 4y) - (3x + 4xi - 3yi + 4y) + a = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + a = 0, \quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 - a.$$

El radio de la circunferencia es $r = \sqrt{25 - a}$. Para que sea $r = 3$, se ha de verificar $a = 16$.

8. Podemos expresar $z^n - 1 = (z - 1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$. Por otra parte,

$$(1 - z)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1) = z^n - 1.$$

En consecuencia $(z - z_2) \ldots (z - z_n) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$ y dando a z el valor 1,

$$(1 - z_2)(1 - z_3) \ldots (1 - z_n) = n.$$

9. Veamos que la aplicación $f(z) = |z|$ es un homomorfismo entre los grupos multiplicativos $\mathbb{C} - \{0\}$ y $(0, +\infty)$. En efecto, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica

$$f(zw) = |zw| = |z|\,|w| = f(z)f(w).$$

Ahora bien $G = \ker f$ lo cual prueba que G es subgrupo del grupo multiplicativo $\mathbb{C} - \{0\}$ y por ende, grupo multiplicativo.

15.3. Raíz cuadrada de un número complejo

Siendo $a, b \in \mathbb{R}$, calcular $\sqrt{a + bi}$ expresando el resultado en forma binómica.

Solución. Para $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos las equivalencias

$$\sqrt{a + bi} = x + yi \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases} \qquad (1)$$

De la segunda ecuación de (1), $xy = -b/2$ y llamando $r_1 = x^2$, $r_2 = -y^2$ tenemos $r_1 r_2 = -b^2/4$. De la primera ecuación, $r_1 + r_2 = a$. Una ecuación de segundo grado cuyas raíces son r_1 y r_2 es $(r - r_1)(r - r_2) = 0$ o bien

$$r^2 - ar - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Supongamos que $b \neq 0$, entonces

$$r_1 = x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} > 0, \quad r_2 = -y^2 = \frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0.$$

En consecuencia se verifica

$$|x| = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad |y| = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Usando la relación $2xy = b$ podemos deducir la elección de los signos para las soluciones de x e y :

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\, i \right) \text{ si } b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\, i \right) \text{ si } b < 0.$$

Si $b = 0$, queda $\sqrt{a + 0i} = \sqrt{a}$. Por tanto,

$$\sqrt{a+bi} = \pm |a| \ \text{ si } \ a > 0 \ \text{ y } \ b = 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm |a|\, i \ \text{ si } \ a < 0 \ \text{ y } \ b = 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = 0 \ \text{ si } \ a = 0 \ \text{ y } \ b = 0.$$

15.4. Forma trigonométrica de los números complejos

1. Expresar en forma binómica
   1) $2[\cos 135^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 135^{\text{o}}]$. 2) $5[\cos(-\pi/3) + i \operatorname{sen}(-\pi/3)]$.

Expresar en forma trigonométrica
   3) $\sqrt{3} - i$. 4) $-1 + i$. 5) $-4 - 4\sqrt{3}i$. 6) $-3i$.

2. Calcular las siguientes potencias expresando el resultado en forma binómica. *a*) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{15}$. *b*) $(1 - i)^{27}$.

3. Expresar $\cos 6x$ y $\operatorname{sen} 6x$ en función de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

4. Calcular: *a*) $\sqrt[3]{1+i}$. *b*) $\sqrt[6]{1}$.

5. Resolver las ecuaciones: *a*) $z^6 + 1 = 0$. *b*) $z^4 + 4 = 0$.

6. Demostrar que las raíces enésimas de un número complejo cualquiera son los productos de una de ellas por las raíces enésimas de la unidad.

7. Calcular el mayor valor entero $n < 0$ tal que $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^n$ sea imaginario puro.

8. Calcular $(1 + w)^n$, siendo $w = \cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3$.

9. Calcular $(1 + \cos x + i \operatorname{sen} x)^n$ con $x \in \mathbb{R}$.

Solución. 1. 1) $2[\cos 135^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 135^{\text{o}}] = 2[-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2] = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

2) $5[\cos(-\pi/3) + i \operatorname{sen}(-\pi/3)] = 5[1/2 - i\sqrt{3}/2] = 5/2 - 5\sqrt{3}i/2$.

3) El módulo es $\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. El argumento θ satisface $\tan\theta = -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$, por tanto $\theta = -\pi/6$ (4$^{\text{o}}$ cuadrante). Es decir,

$$\sqrt{3} - i = 2[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)].$$

4) Tenemos $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan\theta = -1$, por tanto $\theta = 3\pi/4$ (2$^{\text{o}}$ cuadrante). Es decir,

$$-1 + i = \sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)].$$

5) Tenemos $\rho = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$ y $\tan\theta = \sqrt{3}$, por tanto $\theta = -2\pi/3$ (3$^{\text{o}}$ cuadrante). Es decir,

$$-4 - 4\sqrt{3} = 8[\cos(-2\pi/3) + i \operatorname{sen}(-2\pi/3)].$$

6) Por una simple consideración geométrica, $\rho = 3$, $\theta = -\pi/2$, por tanto

$$-3i = 3[\cos(-\pi/2) + i \operatorname{sen}(-\pi/2)].$$

2. *a*) Usando la fórmula de De Moivre:

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^{15} = (2[\cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\pi/6])^{15} = 2^{15}[\cos 15\pi/6 + i \operatorname{sen} 15\pi/6]$$

$$= 2^{15}[\cos 15\pi/6 + i \operatorname{sen} 15\pi/6] = 2^{15}[\cos 5\pi/2 + i \operatorname{sen} 5\pi/2]$$

$$= 2^{15}[\cos(2\pi + \pi/2) + i \operatorname{sen}(2\pi + \pi/2)] = 2^{15}[\cos\pi/2 + i \operatorname{sen}\pi/2] = 2^{15}i.$$

b) Podemos proceder como en el apartado anterior, ahora bien dado que $(1-i)^2 = 1-1-2i = -2i$,

$$(1-i)^{27} = \left((1-i)^2\right)^{13}(1-i) = (-2i)^{13}(1-i) = -2^{13}i^{13}(1-i)$$
$$= -2^{13}i(1-i) = -2^{13} - 2^{13}i = -2^{13}(1+i).$$

3. Usando la fórmula de De Moivre,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^6 = \cos 6x + i \operatorname{sen} 6x.$$

Usando la fórmula del binomio de Newton,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^6 = \binom{6}{0}\cos^6 x + \binom{6}{1}(\cos^5 x)(i \operatorname{sen} x)$$
$$+\binom{6}{2}(\cos^4 x)(i \operatorname{sen} x)^2 + \binom{6}{3}(\cos^3 x)(i \operatorname{sen} x)^3 + \binom{6}{4}(\cos^2 x)(i \operatorname{sen} x)^4$$
$$+\binom{6}{5}(\cos x)(i \operatorname{sen} x)^5 + \binom{6}{6}(i \operatorname{sen} x)^6 = \cos^6 x + 6i\cos^5 x \operatorname{sen} x$$
$$-15\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x - 20i\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 15\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x + 6i\cos x \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^6 x.$$

Igualando partes real e imaginaria,

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x + 15\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x,$$
$$\operatorname{sen} 6x = 6\cos x \operatorname{sen}^5 x - 20\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 6\cos x \operatorname{sen}^5 x.$$

4. *a*) Usando la conocida fórmula de las raíces enésimas de un número complejo,

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{1(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)}$$
$$= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi/3}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ (k=0,1,2)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right),\ (k=0,1,2).$$

Dando a k los correspondientes valores, obtenemos las tres raíces

$$k=0 \Rightarrow w_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12},$$
$$k=1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{9\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{12},$$
$$k=2 \Rightarrow w_2 = \cos\frac{17\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}.$$

b) De manera análoga

$$\sqrt[6]{1} \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}$$

$$= \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ (k = 0, 1, \dots, 5)$$

$$= \cos\frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{3},\ (k = 0, 1, \dots, 5).$$

Dando a k los correspondientes valores,

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k = 3 \Rightarrow w_2 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1.$$

Como $\sqrt[6]{1}$ son las raíces del polinomio con coeficientes reales $z^6 - 1$ las otras dos raíces han de ser las conjugadas de w_1 y w_2. En consecuencia, las raíces sextas de la unidad son

$$\pm 1, \quad \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

5. a) Usando la conocida fórmula de las raíces enésimas de un número complejo,

$$z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{-1} \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)}$$

$$= \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ (k = 0, 1, \dots, 5)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right),\ (k = 0, 1, \dots, 5).$$

Dando a k los correspondientes valores,

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Como z^6+1 es polinomio con coeficientes reales, las otras tres raíces han de ser las conjugadas de las anteriores, por tanto las soluciones de $z^6+1=0$ son
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \quad \pm i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$
$b)$ Procediendo de manera análoga,
$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4 \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{-4} \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{4(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)}$$
$$= \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right), \ (k=0,1,2,3)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\right), \ (k=0,1,2,3).$$
Dando a k los correspondientes valores,
$$k=0 \Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i,$$
$$k=1 \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i.$$
Como habíamos comentado en el apartado anterior las otras dos raíces han de ser las conjugadas de las anteriores, por tanto las soluciones de $z^4+4=0$ son
$$1 \pm i, \quad -1 \pm i.$$
6. Sea z un número complejo y sea w_0 una raíz enésima de z, es decir $w_0^n = z$. Las raíces enésimas de la unidad son
$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\ldots n-1.$$
Llamando $\epsilon = \cos 2\pi/n + i\operatorname{sen} 2\pi/n$, las raíces enésimas de la unidad se pueden expresar como
$$U_n = \{1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1}\} = \{\epsilon^k : k=0,1,2,\ldots,n-1\}.$$
Se verifica para todo $k=0,1,2,\ldots,n-1$
$$\left(w_0\epsilon^k\right)^n = w_0^n\epsilon^{kn} = w_0^n\left(\epsilon^n\right)^k = z\cdot 1^k = z,$$
es decir el conjunto w_0U_n está formado por raíces enésimas de z. Además, los argumentos de las raíces enésimas de la unidad son distintos dos a dos, por

tanto w_0U_n tiene exactamente n elementos los cual prueba la proposición.

7. Aplicamos la fórmula de De Moivre:

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^n=\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right)^n$$

$$=\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right).$$

Para que sea imaginario puro, se ha de verificar $\cos n\pi/6=0$, y el mayor entero estrictamente negativo que lo cumple se obtiene evidentemente para $n\pi/6=-\pi/2$, es decir para $n=-3$.

8. Tenemos,

$$1+w+w^2=1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0\Rightarrow 1+w=-w^2.$$

En consecuencia,

$$(1+w)^n=\left(-w^2\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}.$$

9. Tenemos

$$1+\cos x+i\operatorname{sen}x=2\cos^2\frac{x}{2}+2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (1+\cos x+i\operatorname{sen}x)^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right).$$

15.5. Miscelánea de números complejos (1)

1. Sea $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$. Demostrar que para todo $w_1,w_2\in D$ se verifica

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-\overline{w_1}w_2}\right|<1.$$

2. Demostrar que $\left|(1+i)z^3+iz\right|<3/4$ si $|z|<1/2$.

3. Usando la forma trigonométrica de los números complejos, calcular la suma:

$$S=1+\binom{n}{1}\cos x+\binom{n}{2}\cos 2x+\cdots+\binom{n}{n}\cos nx.$$

4. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces enésimas de la unidad y k entero positivo. Calcular $S_k=w_0^k+w_1^k+\cdots+w_{n-1}^k$.

5. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}:\quad z^3-(5+i)z^2+(6+5i)z-6i=0$.

6. Sean z y w dos números complejos. Demostrar la relación

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right).$$

¿Qué significado geométrico tiene esta identidad?

7. Siendo z, w números complejos no nulos, demostrar la desigualdad

$$|z+w|\geq\frac{1}{2}\left(|z|+|w|\right)\left|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right|.$$

8. Sea z un número complejo tal que $|z|>1$ y n entero positivo. Demostrar que

$$\frac{1}{|1+z^n|}\leq\frac{1}{|z|^n-1}$$

9. Sea $\lambda\in\mathbb{R}$. Describir geométricamente el conjunto

$$A=\{z\in\mathbb{C}:|z|=\lambda\,|z-1|\}.$$

Solución. 1. Usando que $|w|^2=w\overline{w}$:

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-\overline{w_1}w_2}\right|<1\Leftrightarrow|w_1-w_2|<|1-\overline{w_1}w_2|$$

$$\Leftrightarrow|w_1-w_2|^2<|1-\overline{w_1}w_2|^2$$

$$\Leftrightarrow(w_1-w_2)(\overline{w_1}-\overline{w_2})<(1-\overline{w_1}w_2)(1-w_1\overline{w_2})$$

$$\Leftrightarrow|w_1|^2-w_2\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}+|w_2|^2<1-w_2\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}+|w_1|^2\,|w_2|^2$$

$$\Leftrightarrow|w_1|^2+|w_2|^2<1+|w_1|^2\,|w_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |w_1|^2 \left(1 - |w_2|^2\right) < 1 - |w_2|^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{1-|w_2|^2<0} |w_1|^2 > 0,$$

y la última desigualdad es por hipótesis.

2. Usando conocidas propiedades del módulo,

$$\left|(1+i)z^3 + iz\right| \le \left|(1+i)z^3\right| + |iz| = |1+i|\,|z|^3 + |i|\,|z|$$

$$< \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{8} < \frac{2+4}{8} = \frac{3}{4}.$$

3. Llamemos $H = \binom{n}{1} \operatorname{sen} x + \binom{n}{2} \operatorname{sen} 2x + \cdots + \binom{n}{n} \operatorname{sen} nx$. Entonces,

$$S + iH = 1 + \binom{n}{1}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \binom{n}{2}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n}(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$$

$$= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \binom{n}{2}1^{n-2}(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n}(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = (1 + \cos x + \operatorname{sen} x)^n.$$

Usando la conocidas fórmulas de trigonometría

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \quad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

podemos expresar

$$S + iH = \left(2\cos^2 \frac{x}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^n$$

$$\left[2\cos \frac{x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + i \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)\right]^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + i \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^n$$

$$= 2^n \cos^n \frac{x}{2}\left(\cos \frac{nx}{2} + i \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\right).$$

Igualando partes reales obtenemos

$$S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}.$$

4. Las raíces enésimas de la unidad son

$$w_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2j\pi}{n}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Estás raíces se pueden expresar en la forma

$$w_0 = 1, w_1 = w_1, w_2 = w_1^2, \ldots, w_{n-1} = w_1^{n-1}.$$

Por tanto $S_k = 1 + w_1^k + w_1^{2k} + \cdots + w_1^{k(n-1)}$. Si k es múltiplo de n, $k = np$ entonces,

$$S_k = 1 + (w_1^n)^p + (w_1^n)^{2p} + \cdots + (w_1^n)^{(n-1)p} = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Si k no es múltiplo de n, entonces $w_1^k \neq 1$ y aplicando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S_k = \frac{1\,(w_1^n - 1)}{w_1^k - 1} = 0.$$

5. Una simple inspección de los coeficientes de la ecuación, sugiere ensayar la posible solución $z = i$. Tenemos

$$i^3 - (5+i)i^2 + (6+5i)i = -i + 5 + i + 6i - 5 - 6i = 0.$$

Usando el algoritmo de Ruffini

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -5-i & 6+5i & -6i \\ i & & i & -5i & 6i \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

y queda la ecuación $z^2 - 5z + 6 = 0$, cuyas raíces son 2 y 3.

6. Desarrollando el primer miembro

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)\left(\overline{z} + \overline{w}\right) + (z-w)\left(\overline{z} - \overline{w}\right)$$

$$= z\overline{z} + w\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{w} + z\overline{z} - w\overline{z} - z\overline{w} + w\overline{w}$$
$$= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

La identidad expresa el conocido teorema de geometría: la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.

7. Desarrollando el segundo miembro y usando conocidas propiedades del módulo,

$$\frac{1}{2}\left(|z| + |w|\right)\left|\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{|z|\,z}{|z|} + \frac{|z|\,w}{|w|} + \frac{|w|\,z}{|z|} + \frac{|w|\,w}{|w|}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left|z+w+\frac{|z|\,w}{|w|}+\frac{|w|\,z}{|z|}\right| = \frac{1}{2}\left|z+w+\frac{|z|^2\,w+|w|^2\,z}{|zw|}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|z+w+\frac{z\overline{z}w+w\overline{w}z}{|zw|}\right| = \frac{1}{2}\left|z+w+\frac{zw\left(\overline{z}+\overline{w}\right)}{|zw|}\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left(|z+w|+\left|\frac{zw\left(\overline{z}+\overline{w}\right)}{|zw|}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(|z+w|+\frac{|zw|\,|\overline{z}+\overline{w}|}{|zw|}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|z+w|+|\overline{z}+\overline{w}|\right) = \frac{1}{2}\left(|z+w|+|\overline{z+w}|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|z+w|+|z+w|\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\,|z+w| = |z+w|\,.
\end{aligned}
$$

8. Por la desigualdad triangular,

$$|z^n| = |z^n+1-1| \le |z^n+1|+1.$$

Esto implica que $|z|^n-1 \le |z^n+1|$. Dado que $|z|>1$, tenemos

$$0 < |z|^n - 1 \le |z^n+1|\,.$$

Por tanto, $\dfrac{1}{|1+z^n|} \le \dfrac{1}{|z|^n-1}$.

9. Si $\lambda<0$, A es claramente el conjunto vacío. Si $\lambda=0$ queda $|z|=0$ con lo cual A contiene únicamente al origen.
Sea ahora $\lambda>0$ y $z=x+yi$ con x,y reales. Entonces,

$$
\begin{aligned}
|z| = \lambda\,|z-1| &\Leftrightarrow |z|^2=\lambda^2\,|z-1|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2=\lambda^2\left((x-1)^2+y^2\right) \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2=\lambda^2\left(x^2-2x+1+y^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(1-\lambda^2\right)x^2+\left(1-\lambda^2\right)y^2+2\lambda^2x=\lambda^2.
\end{aligned}
$$

Si $\lambda=1$ queda $2x=1$, luego A representa la recta $x=1/2$. Si $\lambda\ne 1$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2+\frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}x=\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \\
\Leftrightarrow & \left(x+\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda^4}{\left(1-\lambda^2\right)^2} \\
\Leftrightarrow & \left(x+\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

En este caso A representa una circunferencia de centro C y radio r, siendo

$$C\left(-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2},0\right),\quad r=\frac{\lambda}{|1-\lambda^2|}.$$

15.6. Miscelánea de números complejos (2)

1. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}:\ z^4+2z^3+4z^2+8z+16=0.$

2. Para a,b números reales, calcular las sumas

$$R=\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cdots+\cos\left(a+(n-1)b\right),$$

$$I=\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a+2b)+\cdots+\operatorname{sen}\left(a+(n-1)b\right).$$

3. Demostrar que si $0\neq z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta,\ (\theta\in\mathbb{R})$ y n natural, entonces

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta.$$

4. Determinar el subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+iy)^3\in\mathbb{R}\ \wedge\ |x+iy|>8\}.$$

5. Expresar la circunferencia $C:x^2+y^2+2x+2y=0$ en coordenadas conjugadas complejas, es decir en función de $z=x+iy$ y de $\overline{z}$.

6. Sea $z\in\mathbb{C}$ y $\theta\in\mathbb{R}$. $a)$ Demostrar que el producto $z'=z\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)$ es el resultado de girar el vector z un ángulo θ alrededor del origen.
$b)$ Escribir la ecuación matricial del giro.

7. Sean z y w dos números complejos no nulos. Demostrar que si $|z+w|=|z-w|$ entonces, w/z es imaginario puro.

8. Demostrar que todas las circunferencias y rectas del plano se pueden expresar en la forma

$$\lambda z\overline{z}+\overline{A}z+A\overline{z}+B=0 \text{ con } \lambda,B\in\mathbb{R},\ \lambda B<A\overline{A}.$$

Solución. 1. Tenemos las igualdades

$$z^4+2z^3+4z^2+8z+16=16\left(\frac{z^4}{16}+\frac{z^3}{8}+\frac{z^2}{4}+\frac{z}{2}+1\right)$$

$$16\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\left(\frac{z}{2}\right)^4\right)\underbrace{=}_{\text{si } z\neq 2}16\cdot\frac{(z/2)^5-1}{z/2-1}.$$

Para $z\neq 2$ la ecuación dada equivale a $z^5-32=0$. Basta por tanto hallar las raíces quintas de 32 y excluir $z=2$ (que evidentemente no satisface la ecuación dada). Efectuando los cálculos obtenemos en forma polar

$$z_1=2_{2\pi/5},\quad z_2=2_{4\pi/5},\quad z_3=2_{6\pi/5},\quad z_4=2_{8\pi/5}.$$

2. Tenemos

$$\begin{aligned} R+iI &= \sum_{k=0}^{n-1}(\cos(a+kb)+i\operatorname{sen}(a+kb)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(\cos a+i\operatorname{sen} a)(\cos kb+i\operatorname{sen} kb) \\ &= (\cos a+i\operatorname{sen} a)\sum_{k=0}^{n-1}(\cos kb+i\operatorname{sen} kb) \end{aligned}$$

Dado que $\cos kb+i\operatorname{sen} kb=(\cos b+i\operatorname{sen} b)^n$ y usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica

$$R+iH=(\cos a+i\operatorname{sen} a)\ \frac{\cos nb+i\operatorname{sen} b}{\cos b+i\operatorname{sen} b-1}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos b-i\operatorname{sen} b-1$, y separando partes real e imaginaria

$$R=\frac{\cos(a+(n-1)b)-\cos(a+nb)-\cos(a-b)+\cos a}{2(1-\cos b)},$$

$$I=\frac{\operatorname{sen}(a+(n-1)b)-\operatorname{sen}(a+nb)-\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen} a}{2(1-\cos b)}.$$

Usando las conocidas fórmulas que transforman las sumas de las razones trigonométricas seno y coseno en productos, obtenemos

$$R=\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}(nb/2)}{\operatorname{sen}(b/2)},$$

$$I=\operatorname{sen}\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}(nb/2)}{\operatorname{sen}(b/2)}.$$

3. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}=\frac{\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta=\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta) \\ \Rightarrow z^n+\frac{1}{z^n} &= (\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n+(\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta))^n \\ &= \cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta+\cos(-n\theta)+i\operatorname{sen}(-n\theta) \\ &= \cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta-i\operatorname{sen} n\theta=2\cos n\theta. \end{aligned}$$

4. Tenemos $(x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ Entonces,

$$(x+iy)^3 \text{ es real } \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee 3x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm\sqrt{3}x.$$

Si $y = 0$, entonces

$$|x+iy| > 8 \Leftrightarrow x^2 > 64 \Leftrightarrow |x| > 8.$$

Si $y = \pm\sqrt{3}x$, entonces

$$|x+iy| > 8 \Leftrightarrow x^2 + 3x^2 > 64 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow |x| > 4.$$

El conjunto S pedido es por tanto

$$S = \{(x,0) : |x| > 8\} \cup \{(x, \pm\sqrt{3}x) : |x| > 4\}.$$

5. Tenemos $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$. Sumando y restando estas igualdades obtenemos

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Sustituyendo en la ecuación de C y usando que $x^2 + y^2 = z\overline{z}$,

$$C : z\overline{z} + 2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + 2\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = 0,$$

$$C : z\overline{z} + (1-i)z + (1+i)\overline{z} = 0.$$

6. *a*) Los valores del módulo y el argumento de z' son

$$\left|z'\right| = |z|\,|\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta| = |z|\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = |z| \cdot 1 = |z|\,,$$

$$\arg z' = \arg\left(z\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)\right) = (\arg z) + \theta,$$

lo cual prueba el resultado.
b) Si $z' = x' + y'i$ con x', y' reales:

$$x' + iy' = (x + yi)\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + (x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)i.$$

La ecuación matricial del giro es por tanto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

7. Tenemos

$$|z+w| = |z-w| \Leftrightarrow |z+w|^2 = |z-w|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+w)\left(\overline{z+w}\right) = (z-w)\left(\overline{z-w}\right)$$
$$\Leftrightarrow (z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right) = (z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+w\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{w} = z\overline{z}-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w}$$
$$\Leftrightarrow 2w\overline{z}+2z\overline{w}=0 \Leftrightarrow 2\left(\overline{z\overline{w}}+z\overline{w}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\text{Re }(z\overline{w})=0 \Leftrightarrow \text{Re }(z\overline{w})=0.$$

Entonces,
$$\frac{w}{z}=\frac{w\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{\text{Re }(w\overline{z})+i\text{ Im }(w\overline{z})}{|z|^2}=\frac{\text{Im }(w\overline{z})}{|z|^2}i,$$
luego w/z es imaginario puro.

8. Toda circunferencia o recta del plano tiene por ecuación
$$\lambda x^2+\lambda y^2+ax+by+c=0 \text{ con } \lambda,a,b,c\in\mathbb{R}.$$
Para que sea circunferencia ha de ser $\lambda\neq 0$. Ademas, completando cuadrados queda
$$\left(x+\frac{a}{2\lambda}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2\lambda}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4\lambda c}{4\lambda^2},$$
con lo cual también se ha de verificar $a^2+b^2-4\lambda c>0$. Para que sea recta, ha de ser $\lambda=0$ y a,b no simultáneamente nulos.

Usando coordenadas conjugadas complejas $x=(z+\overline{z})/2$, $y=(z-\overline{z})/2i$:
$$\lambda\frac{z^2+\overline{z}^2+2z\overline{z}}{4}-\lambda\frac{z^2+\overline{z}^2-2z\overline{z}}{4}+a\frac{z+\overline{z}}{2}-bi\frac{z-\overline{z}}{2}+c=0,$$
$$\lambda z\overline{z}+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}i\right)z+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i\right)\overline{z}+c=0.$$
Llamando $A=a/2+bi/2$ y $c=B$ queda $\lambda z\overline{z}+\overline{A}z+A\overline{z}+B=0$. Si $\lambda\neq 0$ la condición $a^2+b^2-4\lambda c>0$ equivale a $\lambda B<A\overline{A}$ siendo además λ,B reales por hipótesis.
Si $\lambda=0$, como a y b no son simultáneamente nulos, $A\overline{A}>0$ luego $0=\lambda B<A\overline{A}$.

Capítulo 16

Polinomios en una variable

16.1. División euclídea de polinomios

1. Efectuar la división de $A(x) = x^4+6x^3+10x^2+3x-6$ entre $B(x) = x^2+3x$. Deducir de ello la descomposición de $A(x)$ en producto de dos trinomios de segundo grado.

2. En $\mathbb{R}[x]$ hallar los siguientes restos
$a)$ De la división de $p(x) = x^{1237} - 1$ entre $q(x) = x^2 - 1$.
$b)$ De la división de $p(x) = x^{1237} - 1$ entre $q(x) = (x+1)^2$.

3. En $\mathbb{R}[x]$ hallar los siguientes restos
$a)$ De la división de $p(x) = (x+\sqrt{3})^{16}$ entre $q(x) = x^2 + 1$.
$b)$ De la división de $(\cosh a + x \operatorname{senh} a)^n$ entre $x^2 - 1$.

4. Sean a y b números reales distintos y $p(x)$ un polinomio real. Determinar el resto de la división de $p(x)$ entre $(x-a)(x-b)$ en función de $p(a)$ y de $p(b)$.

5. (a) Usando el algoritmo de Euclides, hallar el máximo común divisor mónico $D(x)$ de los polinomios de $\mathbb{Q}[x]$:

$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3.$$

(b) Encontrar polinomios $\alpha(x)$, $\beta(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ tales que

$$\alpha(x)\, p(x) + \beta(x)\, q(x) = D(x).$$

Solución. 1. Efectuando la división obtenemos

$$A(x) = B(x)(x^2 + 3x + 1) - 6.$$

Por tanto, podemos expresar

$$A(x) = B(x)\,(B(x)+1) - 6 = B^2(x) + B(x) - 6$$

$$= (B(x)-2)\,(B(x)+3) = (x^2+3x-2)(x^2+3x+3).$$

2. *a*) Según el teorema de la división euclídea de polinomios, existen únicos polinomios $c(x)$ y $r(x) = ax + b$ tales que

$$x^{1237} - 1 = (x^2-1)c(x) + ax + b. \quad (1)$$

Las raíces de $x^2 - 1$ son $x = \pm 1$. Sustituyéndolas en (1),

$$0 = a + b, \quad -2 = -a + b.$$

Resolviendo obtenemos $a = 1$, $b = -1$, luego el resto pedido es $r(x) = x - 1$.
b) Análogamente

$$x^{1237} - 1 = (x+1)^2 c(x) + ax + b. \quad (2)$$

La única raíz de $(x+1)^2$ es $x = -1$ (doble). Sustituyendo en (2),

$$-2 = -a + b.$$

Derivando la igualdad (2),

$$1237x^{1236} = 2(x+1)c(x) + (x+1)^2 c'(x) + a.$$

Sustituyendo $x = -1$ en la igualdad anterior obtenemos $1237 = a$, luego el resto pedido es $r(x) = 1237x + 1235$.

3. *a*) Podemos expresar

$$(x+\sqrt{3})^{16} = (x^2+1)c(x) + ax + b. \quad (1)$$

Las raíces de $x^2 + 1$ son $x = \pm i$. Sustituyendo $x = i$ en (1),

$$(\sqrt{3}+i)^{16} = ai + b. \quad (2)$$

El módulo de $\sqrt{3} + i$ es 2 y el argumento $\pi/6$, por tanto

$$(\sqrt{3}+i)^{16} = 2^{16}\left(\cos 16 \cdot \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 16 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{16}\left(\cos 16 \cdot 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 16 \cdot 30^{\text{o}}\right)$$

$$= 2^{16}\left(\cos 16 \cdot 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 16 \cdot 30^{\text{o}}\right)$$

$$= 2^{16}\,(\cos 480^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 480^{\text{o}})$$
$$2^{16}\,(\cos 120^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 120^{\text{o}}) = 2^{16}\left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right).$$

Igualando partes real e imaginaria en (2), $a = 2^{15}\sqrt{3}$ y $b = -2^{15}$. El resto pedido es por tanto
$$r(x) = 2^{15}(\sqrt{3}x - 1).$$

b) Podemos expresar

$$(\cosh a + x \operatorname{senh} a)^n = (x^2 - 1)c(x) + Ax + B. \quad (1)$$

Las raíces de $x^2 - 1$ son $x = \pm 1$. Sustituyendo en (1),

$$\begin{cases} (\cosh a + \operatorname{senh} a)^n = A + B \\ (\cosh a - \operatorname{senh} a)^n = -A + B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{e^a + e^{-a}}{2} + \dfrac{e^a - e^{-a}}{2}\right)^n = A + B \\ \left(\dfrac{e^a + e^{-a}}{2} - \dfrac{e^a - e^{-a}}{2}\right)^n = -A + B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{na} = A + B \\ e^{-na} = -A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{e^{na} - e^{-na}}{2} = \operatorname{senh} na \\ B = \dfrac{e^{na} + e^{-na}}{2} = \cosh na. \end{cases}$$

El resto pedido es por tanto $r(x) = x \operatorname{senh} na + \cosh na$.

4. Podemos expresar

$$p(x) = (x - a)(x - b)c(x) + Ax + B.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior $x = a$ y $x = b$,

$$\begin{cases} p(a) = Aa + B \\ p(b) = Ab + B. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos el resto:

$$Ax + B = \frac{p(a) - p(b)}{a - b}x + \frac{ap(b) - bp(a)}{a - b}.$$

5. (a) Efectuando las correspondientes divisiones euclídeas

	$x + 3$	$(1/10)x - 3/10$
$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$	$x^3 - 2x^2 - 2x - 3$	$10x^2 + 10x + 10$
$10x^2 + 10x + 10$	0	

Entonces, mcd $(p(x), q(x)) = 10x^2 + 10x + 10$ o bien,

$$D(x) = \text{mcd }(p(x), q(x)) = x^2 + x + 1 \text{ (mónico).}$$

(b) De las divisiones hechas en el apartado anterior,

$$10D(x) = 10x^2 + 10x + 10 = p(x) - (x+3)q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}p(x) + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{10}\right)q(x) = D(x)$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{10}, \quad \beta(x) = -\frac{1}{10}x - \frac{3}{10}.$$

16.2. Factorización de polinomios

1. Descomponer el polinomio $f(x) = x^6 + 1$ en producto de factores irreducibles, $a)$ En $\mathbb{C}[x]$. $b)$ En $\mathbb{R}[x]$.

2. Descomponer el polinomio $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ en producto de factores irreducibles, $a)$ En $\mathbb{C}[x]$. $b)$ En $\mathbb{R}[x]$.

3. Descomponer en producto de factores irreducibles el polinomio de $\mathbb{Z}_5[x]$

$$p(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3.$$

4. Efectuar la factorización de $f(x) = x^8 + x^4 + 1$ en producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

5. Descomponer en producto de factores irreducibles el polinomio

$$p(x) = x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{73}{36}x^2 + \frac{7}{9}x + \frac{1}{9},$$

sabiendo que tiene dos raíces reales dobles.

6. (a) Descomponer en producto de factores irreducibles los polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x, \quad q(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

(b) Calcular mcd $(p(x), q(x))$ y mcm $(p(x), q(x))$.

Solución. 1. $a)$ Hallemos las raíces de $f(x)$. Tenemos

$$x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{-1} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{1(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)}$$

$$= \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ (k=0,1,\ldots,5)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right),\ (k=0,1,\ldots,5).$$

Dando a k los correspondientes valores,

$$k=0\Rightarrow w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$
$$k=1\Rightarrow w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=i,$$
$$k=2\Rightarrow w_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Como $f(x)=x^6+1$ es polinomio con coeficientes reales, las otras tres raíces han de ser las conjugadas de las anteriores, por tanto

$$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$(x-i)(x+i)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

$b)$ Operando los factores que corresponden a raíces conjugadas obtenemos

$$f(x)=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1).$$

2. $a)$ Hallemos las raíces de $f(x)$. Tenemos

$$x^4-10x^2+1=0,\ \ x^2=\frac{10\pm\sqrt{96}}{2}=\frac{10\pm4\sqrt{6}}{2}=5\pm\sqrt{6}.$$

Ahora bien, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ pues $\left(\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)^2=5+2\sqrt{6}$. De manera análoga, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Las raíces de $f(x)$ son por tanto

$$\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \ -\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ \ -\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

y la descomposición en factores irreducibles es

$$f(x)=\left(x-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

$b)$ Claramente la descomposición es la misma.

3. Tenemos

$$p(0) = 3 \neq 0,\ p(1) = 1 + 1 + 4 + 4 + 3 + 4 + 3 = 1 \neq 0.$$

$$p(2) = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 = 0.$$

Aplicando el algoritmo de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x-2)(\underbrace{x^4 + 3x^3 + 4x + 1}_{p_1(x)}).$$

$$p_1(2) = 1 + 2 + 3 + 1 = 2 \neq 0,\ p_1(3) = 1 + 1 + 2 + 1 = 0.$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow p_1(x) = (x-3)(\underbrace{x^3 + x^2 + 3x + 3}_{p_2(x)}).$$

$$p_2(3) = 2 + 4 + 4 + 3 = 3 \neq 0,\ p_2(4) = 4 + 1 + 2 + 3 = 0.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & & 4 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow p_2(x) = (x-4)(\underbrace{x^2 + 3}_{p_3(x)}).$$

$$p_3(4) = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

En consecuencia, la descomposición en factores irreducibles de $p(x)$ es

$$p(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x^2+3),$$

o de forma equivalente

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x^2+3).$$

4. Podemos expresar

$$f(x) = x^8 + x^4 + 1 = \left(x^4+1\right)^2 - x^4 = \left(x^4+1\right)^2 - \left(x^2\right)^2$$
$$= \left(x^4 + 1 + x^2\right)\left(x^4 + 1 - x^2\right) = \left(x^4 + x^2 + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right).$$

Por otra parte

$$x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2+1\right)^2 - 3x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2$$

$$= \left(x^2 + 1 + (\sqrt{3}x)\right)\left(x^2 + 1 - (\sqrt{3}x)\right) = \left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right).$$

De manera análoga

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2+1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right).$$

Podemos expresar

$$f(x)=\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Los cuatro polinomios de segundo grado que aparecen tienen discriminante menor que 0 luego son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ y por tanto ya tenemos la factorización pedida.

5. Si a es raíz doble de $p(x)$, entonces es raíz simple de $p'(x)$ con lo cual a es raíz simple del m.c.d. $(p(x),p'(x))$. Usando el algoritmo de Euclides obtenemos

$$D(x)=\text{m.c.d.}\left(p(x),p'(x)\right)=6x^2+7x+2.$$

Hallemos las raíces de $D(x)$:

$$6x^2+7x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{12}=\{-1/2,-2/3\},$$

por tanto,

$$x^4+\frac{7}{3}x^3+\frac{73}{36}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{1}{9}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2.$$

6. (a) Tenemos $p(x)=x\,(\underbrace{x^3+4x^2+x+4}_{p_1(x)})$. Por otra parte,

$$p_1(0)=4\neq 0,\ p_1(1)=1+4+1+4=0.$$

Aplicando el algoritmo de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & & 1 & 0 & 1\\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\Rightarrow p_1(x)=(x-1)(\underbrace{x^2+1}_{p_2(x)}).$$

$$p_2(1)=1+1=2\neq 0,\ p_2(2)=4+1=0.$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 1\\ 2 & & 2 & 4\\ \hline & 1 & 2 & 0\end{array}\Rightarrow p_2(x)=(x-2)(x+2).$$

En consecuencia,

$$p(x)=x(x-1)(x-2)(x+2)=x(x+4)(x+3)(x+2).$$

Procediendo de manera análoga obtenemos

$$q(x)=(x+3)(x+2)(x+1).$$

(b) De los apartados anteriores deducimos

$$\text{mcd}\ (p(x),q(x))=(x+3)(x+2),$$

$$\text{mcm}\ (p(x),q(x))=x(x+4)(x+3)(x+2)(x+1).$$

16.3. Fórmulas de Cardano-Vieta

1. Demostrar las fórmulas de Cardano-Vieta: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ $(a_n \neq 0)$ y sean $r_1, r_2, \ldots, r_n$ las raíces de $p(x)$ en donde cada una se escribe tantas veces como sea su multiplicidad. Designemos por σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n las llamadas funciones elementales de las raíces. Se verifica

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \sum_i r_i = r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
&\sigma_2 = \sum_{i<j} r_i r_j = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
&\sigma_3 = \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
&\ldots\\
&\sigma_n = r_1 r_2 \cdots r_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

2. Comprobar las fórmulas de Cardano-Vieta para el polinomio

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

3. Resolver la ecuación $17x^3 + 16x^2 + 33x - 2 = 0$ sabiendo que tiene una raíz compleja de módulo $\sqrt{2}$.

4. Dada la ecuación $x^3 - 7x + k = 0$, calcular k para que una solución sea el doble de otra. Resolver dicha ecuación.

Solución. 1. Usando el teorema de descomposición de polinomios podemos expresar

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n).$$

Igualando los coeficientes de x^{n-p},

$$a_{n-p} = a_n \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} (-1)^p r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_p} = (-1)^p a_n \sigma_p,$$

de donde resultan las fórmulas de Cardano-Vieta.

2. Como $p(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$, 1 es raíz de $p(x)$. Dividiendo $p(x)$ entre $x + 1$, obtenemos

$$p(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

Las raíces de $p(x)$ son por tanto $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. Los coeficiente de $p(x)$ son $a_3 = 1$, $a_2 = -4$, $a_1 = 1$, $a_0 = 6$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&r_1 + r_2 + r_3 = -1 + 2 + 3 = 4 = -\frac{-4}{1} = -\frac{a_2}{a_3},\\
&r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 3 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a_1}{a_3},\\
&r_1r_2r_3 = (-1)\cdot 2\cdot 3 = -6 = -\frac{6}{1} = -\frac{a_0}{a_3}.
\end{aligned}
$$

3. Las tres soluciones de la ecuación son de la forma

$$x_1 = a + bi,\ x_2 = a - bi,\ x_3,\ \text{con } a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 2.$$

Usando las fórmulas de Cardano-Vieta

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 2a + x_3 = -\frac{16}{17},\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a^2 + b^2 + (a + bi)x_3 + (a - bi)x_3 = \frac{33}{17},\\
&x_1x_2x_3 = (a^2 + b^2)x_3 = \frac{2}{17}.
\end{aligned}
$$

Obtenemos pues el sistema

$$\begin{cases} 2a + x_3 = -\frac{16}{17} \\ 2 + 2ax_3 = \frac{33}{17} \\ 2x_3 = \frac{2}{17}, \end{cases}$$

que resuelto proporciona las solución $x_3 = 1/17$, $a = -1/2$. Por otra parte $b = \sqrt{2 - a^2} = \pm\sqrt{7}/2$. Las soluciones de la ecuación dada son por tanto

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i,\ \frac{1}{17}.$$

4. Las raíces de la ecuación son de la forma x_1, $x_2 = 2x_1$ y x_3. Aplicando las fórmulas de Cardano-Vieta,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1^2 + 3x_1x_3 = -7, \\ 2x_1^2x_3 = k. \end{cases}$$

Sustituyendo $x_3 = -3x_1$ obtenemos $-7x_1^2 = -7$ de lo cual $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 2$ y $x_3 = \mp 3$. Usando $k = 2x_1^2x_3$ queda

$$
\begin{aligned}
&k = -6 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\\
&k = 6 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3.
\end{aligned}
$$

16.4. Raíces en progresión

Se considera el polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$.

1. (i) Hallar la condición que han de cumplir los coeficientes de $p(x)$ para que tenga tres raíces en progresión aritmética.
(ii) Usar los resultados obtenidos para resolver la ecuación

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0.$$

2. (i) Hallar la condición que han de cumplir los coeficientes de $p(x)$ para que tenga tres raíces en progresión geométrica.
(ii) Usar los resultados obtenidos para resolver la ecuación

$$8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0.$$

Solución. 1. (i) Las tres raíces del polinomio se pueden expresar en la forma $u - h, u, u + h$. Usando las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} u - h + u + u + h = -b/a \\ (u-h)u + (u-h)(u+h) + u(u+h) = c/a \\ (u-h)u(u+h) = -d/a. \end{cases}$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{cases} 3u = -b/a \\ 3u^2 - h^2 = c/a \\ u^3 - uh^2 = -d/a. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $u = -b/(3a)$. Sustituyendo en la segunda:

$$h^2 = 3u^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{3a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2}.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación u y h^2 por sus valores:

$$-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{3a}\,\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} = -\frac{d}{a}.$$

Simplificando obtenemos la relación:

$$27a^2d + b(2b^2 - 9ac) = 0.$$

(ii) Para $a = 8, b = -12, c = -2, d = 3$ se verifica $27a^2d + b(2b^2 - 9ac) = 0$. En este caso tenemos:

$$u = -\frac{b}{3a} = \frac{1}{2}\,, \quad h = \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{3a^2}} = \pm 1.$$

Para $h = 1$ obtenemos $\{u-h, u, u+h\} = \{-1/2, 1, 3/2\}$ y para $h = -1$, las mismas soluciones: $\{u-h, u, u+h\} = \{3/2, 1, -1/2\}$. Concluimos que las raíces del polinomio son $-1/2, 1$ y $3/2$.

2. (i) Las tres raíces del polinomio se pueden expresar en la forma $u/h, u, uh$. Usando las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\left\{\begin{matrix} (u/h) + u + uh = -b/a \\ (u/h)u + (u/h)(uh) + u(uh) = c/a \\ (u/h)u(uh) = -d/a. \end{matrix}\right.$$

Simplificando obtenemos:

$$\left\{\begin{matrix} u\left((1/h) + 1 + h\right) = -b/a \\ u^2\left((1/h) + 1 + h\right) = c/a \\ u^3 = -d/a. \end{matrix}\right.$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos $u = -c/b$ con lo cual $-d/a = -c^3/b^3$ o bien:

$$b^3d - c^3a = 0.$$

(ii) Para $a = 8, b = -42, c = 63, d = -27$ se verifica $b^3d - c^3a = 0$. En este caso tenemos $u = -c/b = 3/2$. La igualdad $u\left((1/h) + 1 + h\right) = -b/a$ es ahora:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{h} + 1 + h\right) = \frac{21}{4}.$$

Operando queda la ecuación $2h^2 - 5h + 2 = 0$ cuyas soluciones son 2 y $1/2$. Para $h = 2$ obtenemos $\{u/h, u, uh\} = \{3/4, 3/2, 3\}$ y para $h = 1/2$, las mismas soluciones: $\{u/h, u, uh\} = \{3, 3/2, 3/4\}$. Concluimos que las raíces del polinomio son $3/4, 3/2$ y 3.

16.5. Raíces múltiples de polinomios

1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 0, a es un elemento del cuerpo $\mathbb{K}$ y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Demostrar que si a es raíz de orden $k \geq 1$ de $p(x)$, entonces a es raíz de orden $k-1$ de $p'(x)$.

2. Demostrar que en $\mathbb{Z}_2[x]$, $a = 1$ es raíz doble tanto de $p(x) = x(x+1)^2$ como de $p'(x)$.

3. Demostrar que 1 es raíz al menos triple el polinomio

$$p(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1.$$

4. Siendo $n \geq 1$, hallar la multiplicidad de 1 como raíz de

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)(x^n - 1) \in \mathbb{C}[x].$$

5. Demostrar que el polinomio $p(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}[x]$ no tiene raíces múltiples.

6. Hallar las condiciones según las cuales el polinomio

$$f(x) = x^5 + 10ax^3 + 5bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

tiene al menos una raíz al menos triple y no nula.

7. Calcular la multiplicidad de la raíz a de

$$p(x) = \frac{x-a}{2}\big(f'(x) + f'(a)\big) - f(x) + f(a) \in \mathbb{C}[x],$$

siendo $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Solución. 1. Si es raíz de orden $k \geq 1$ de $p(x)$, $p(x) = (x-a)^k q(x)$ con $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $q(a) \neq 0$. Derivando

$$\begin{aligned} p'(x) &= k(x-a)^{k-1}q(x) + (x-a)^k q'(x) \\ &= (x-a)^{k-1}\big(kq(x) + (x-a)q'(x)\big). \end{aligned}$$

Sea $h(x) = kq(x) + (x-a)q'(x)$, entonces $h(a) = kq(a)$. Ahora bien $q(a) \neq 0$ y $k1 \neq 0$ pues $\mathbb{K}$ es de característica distinta de 0, luego $h(a) \neq 0$.

2. En $\mathbb{Z}_2$ se verifica $-1 = 1$, por tanto $p(x) = (x-1)^2 x$ y claramente $a = 1$ es raíz doble de $p(x)$. Derivando,

$$p'(x) = \underbrace{(1+1)}_{=0}(x-1)x + (x-1)^2 \cdot 1 = (x-1)^2,$$

es decir $a = 1$ también es raíz doble de $p'(x)$.

3. Las derivadas primera y segunda de $p(x)$ son

$$p'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + n(n-1)x^{n-2},$$

$$p''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Sustituyendo $x = 1$,

$$p(1) = 1 - n + n - 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} p'(1) &= 2n - n(n+1) + n(n-1) = n(2 - n - 1 + n - 1) = 0, \\ p''(0) &= 2n(2n-1) - n^2(n+1) + n(n-1)(n-2) \\ &= n\left(4n - 2 - n^2 - n + n^2 - 3n + 2\right) = 0, \end{aligned}$$

luego 1 es raíz al menos triple el polinomio $p(x)$.

4. Se verifica $\varphi(1) = 0$. Por otra parte,

$$\varphi'(x) = 2x(x^n - 1) + (x^2 - 1)nx^{n-1} \Rightarrow \varphi'(1) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= 2(x^n - 1) + 2nx^n + 2nx^n + (x^2 - 1)n(n-1)x^{n-2} \\ &\Rightarrow \varphi''(0) = 4n \neq 0, \end{aligned}$$

luego 1 es raíz doble de $\varphi(x)$.

5. Si r es raíz múltiple de $p(x)$ se ha de verificar $p(r) = p'(r) = 0$. Tenemos

$$p(r) = 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \cdots + \frac{r^n}{n!} = 0. \quad (1)$$

Por otra parte,

$$p'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow p'(r) = 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \cdots + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} = 0. \quad (2)$$

Restando a la igualdad (1) la (2) obtenemos $r^n/n| = 0$, es decir r ha de ser necesariamente 0. Pero claramente 0 no es raíz de $p(x)$.

6. Las derivadas primera y segunda de $f(x)$ son

$$f'(x) = 5x^4 + 30ax^2 + 5b, \quad f''(x) = 20x^3 + 60ax.$$

Si x es raíz al menos triple no nula de $f(x)$,

$$\left\{\begin{matrix} x^5 + 10ax^3 + 5bx + c = 0 \\ 5x^4 + 30ax^2 + 5b = 0 \\ 20x^3 + 60ax = 0 \end{matrix}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \neq 0} \left\{\begin{matrix} x^5 + 10ax^3 + 5bx + c = 0 \\ x^4 + 6ax^2 + b = 0 \\ x^2 + 3a = 0. \end{matrix}\right.$$

Sustituyendo $x^2 = -3a$ en la segunda igualdad

$$9a^2 - 18a^2 + b = 0, \text{ o bien } b = 9a^2.$$

La primera igualdad se puede expresar como $x\left(x^4+10ax^2+5b\right)+c=0$. Sustituyendo en esta, $x=\sqrt{-3a}$,

$$\sqrt{-3a}\left(9a^2-30a^2-b\right)=-c \text{ o bien } 24a^2\sqrt{-3a}=-c.$$

Elevando al cuadrado obtenemos $-1728a^5=c^2$. Las condiciones pedidas son por tanto

$$\begin{cases} b=9a^2 \\ 1728a^5+c^2=0. \end{cases}$$

7. Se verifica $p(a)=0$ Derivando sucesivamente obtenemos

$$p'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)+f'(a)\right)+\frac{x-a}{2}f''(x)-f'(x)\Rightarrow p'(a)=0,$$

$$\begin{aligned} p''(x)&=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{x-a}{2}f'''(x)-f''(x) \\ &=\frac{x-a}{2}f'''(x)\Rightarrow p''(a)=0, \end{aligned}$$

$$p'''(x)=\frac{1}{2}f'''(x)+\frac{x-a}{2}f^{(4)}(x)\Rightarrow p'''(a)=\frac{1}{2}f'''(a).$$

La multiplicidad de a como cero de $p(x)$ es por tanto $k+3$, siendo $k\geq 0$ la multiplicidad de a como raíz de $f'''(x)$.

16.6. Raíz cuádruple según parámetros

Determinar $m,n,p\in\mathbb{R}$ para que el polinomio $f(x)=x^6+mx^4+10x^3+nx+p$ admita una raíz cuádruple.

Solución. Si x es una raíz cuádruple, ha de verificar $f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$, es decir

$$\begin{cases} 6x^5+4mx^3+30x^2+n=0 \\ 30x^4+12mx^2+60x=0 \\ 120x^3+24mx+60=0 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} 6x^5+4mx^3+30x^2+n=0 \\ 5x^4+2mx^2+10x=0 \\ 10x^3+2mx+5=0. \end{cases}$$

No puede ser $x=0$ pues no verifica la tercera ecuación. Dividiendo la segunda ecuación entre x :

$$\begin{cases} 5x^3+2mx+10=0 \\ 10x^3+2mx+5=0 \end{cases}\Rightarrow 5x^3-5x=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{1}.$$

Los únicos posibles valores de x son por tanto $x=1$ o cualquiera de las otras dos raíces cúbicas $\omega,\bar{\omega}$ no reales de la unidad. Esto último no puede ser, pues al tener $f(x)$ coeficientes reales, si tiene una raíz también tiene la conjugada y $f(x)$ sería de grado 8. Concluimos que la única posible raíz cuádruple de $f(x)$ es $x=1$. Entonces:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(1)=0 \\ f'''(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m+10+n+p=0 \\ 6+4m+30+n=0 \\ 5+2m+10=0 \\ 10+2m+5=0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos $m=-15/2, n=-6, p=5/2$.

16.7. Polinomio de interpolación de Lagrange

1. Sean $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ elementos distintos dos a dos de un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ elementos de $\mathbb{K}$. Demostrar que existe un único polinomio $p\in\mathbb{K}[x]$ de grado $\leq n$ tal que

$$p(x_0)=\lambda_0,\ p(x_1)=\lambda_1,\ \ldots\ ,\ p(x_n)=\lambda_n.$$

Al polinomio p se le llama *polinomio de interpolación de Lagrange* para los puntos (x_i,λ_i), $i=0{,}1,\ldots,n$.

2. Encontrar en $\mathbb{R}[x]$ el polinomio de interpolación de Lagrange para los puntos $(1,3)$, $(-1,9)$, $(3,13)$.

3. Se considera la función $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{4}$. Hallar el polinomio de menor grado que toma los mismos valores que f en los puntos -2, $-4/3$, 0, $4/3$, 2.

Solución. 1. *Unicidad.* Si existieran dos polinomios $p,q\in\mathbb{K}[x]$ de grado $\leq n$ cumpliendo $p(x_i)=\lambda_i$ y $q(x_i)=\lambda_i$ para todo $i=0{,}1,\ldots,n$, entonces $(p-q)(x_i)=0$ para todo $i=0{,}1,\ldots,n$. Esto implicaría que el polinomio $p-q$ que es de grado $\leq n$ tendría más de n raíces y esto sólo puede ocurrir cuando $p-q=0$, luego $p=q$.

Existencia. El polinomio

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

es claramente de grado $\leq n$ y satisface $p(x_i)=\lambda_i$ para todo $i=0{,}1,\ldots,n$.

2. El polinomio de interpolación de Lagrange es en este caso

$$p(x)=\lambda_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\lambda_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\lambda_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

siendo $(x_0, \lambda_0) = (1, 3)$, $(x_1, \lambda_1) = (-1, 9)$ y $(x_2, \lambda_2) = (3, 13)$. Sustituyendo y operando obtenemos $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

3. El polinomio pedido es el polinomio de interpolación de Lagrange para los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, 4$ con $x_0 = -2$, $x_1 - 4/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4/3$, $x_4 = 2$. Los valores de y_i son

$$y_0 = f(-2) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y_1 = f\left(-4/3\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1/2,$$

$$y_2 = f(0) = \cos 0 = 1,\ y_3 = f\left(4/3\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 1/2,\ y_4 = f(2) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Usando la correspondiente fórmula y operando, obtenemos:

$$p(x) = \frac{1}{640}\left(9x^4 - 196x^2 + 640\right).$$

16.8. Ecuación de tercer grado

1. Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$.

2. Resolver la ecuación $x^3 - 12x + 16 = 0$.

3. Usando el discriminante, estudiar el tipo de soluciones de las ecuaciones:
(a) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$.
(b) $x^3 - 12x + 16 = 0$.
(c) $x^3 - 10x + 30$.

4. Demostrar que la sustitución $x = y - \dfrac{a}{3}$ transforma la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, en la ecuación equivalente

$$y^3 + py + q = 0.$$

Solución. Recordemos los siguiente resultados teóricos:

Teorema. La sustitución $x = y - \dfrac{a}{3}$ transforma la ecuación de tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

en la ecuación equivalente

$$y^3 + py + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Teorema. Sea la ecuación $y^3+py+q=0$ con $p,q\in\mathbb{C}$. Entonces,
(a) Las soluciones de esta ecuación son

$$y=\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}_{\alpha}+\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}_{\beta}$$

siempre y cuando $\alpha\beta=-p/3$.
(b) Sean $1,\epsilon,\epsilon^2$ las raíces cúbicas de la unidad, es decir

$$1,\quad \epsilon=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad \epsilon^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Supongamos que α_1 y β_1 son valores de α y β respectivamente tales que $\alpha_1\beta_1=-p/3$. Entonces, las soluciones de la ecuación dada son

$$\begin{aligned}y_1&=\alpha_1+\beta_1\\ y_2&=\alpha_1\epsilon+\beta_1\epsilon^2\\ y_3&=\alpha_1\epsilon^2+\beta_1\epsilon.\quad\square\end{aligned}$$

1. Efectuando la sustitución $x=y-1$:

$$(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-14=0$$
$$\Leftrightarrow y^3-6y-9=0.$$

Tenemos $p=-6$, $q=-9$, por tanto

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{216}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{8},\quad \beta=\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{1}$$

Para $\alpha_1=2$ y $\beta_1=1$ obtenemos $\alpha_1\beta_1=2=-p/3$, luego las soluciones de $(*)$ son

$$\begin{aligned}y_1&=\alpha_1+\beta_1=3,\\ y_2&=\alpha_1\epsilon+\beta_1\epsilon^2=2\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\\ y_3&=\alpha_1\epsilon^2+\beta_1\epsilon=2\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son

$$\begin{aligned}x_1&=y_1-1=2,\\ x_2&=y_2-1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\\ x_3&=y_3-1=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

2. Tenemos $p = -12$, $q = 16$, por tanto

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \ldots = \sqrt[3]{-8},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \ldots = \sqrt[3]{-8},$$

Para $\alpha_1 = -2$ y $\beta_1 = -2$ obtenemos $\alpha_1\beta_1 = 4 = -p/3$, luego las soluciones de la ecuación dada son

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 = -4, \\ x_2 &= \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 = -2 \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - 2 \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 2, \\ x_3 &= \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon = -2 \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} - 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = 2. \end{aligned}$$

3. Recordemos el siguiente resultado teórico:
Teorema. Sea la ecuación de tercer grado $y^3 + py + q = 0$ con p, q reales y sea

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

su discriminante. Entonces,
(i) Si $D < 0$, la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias conjugadas.
(ii) Si $D = 0$, todas las soluciones son reales siendo dos de ellas iguales entre sí.
(iii) Si $D > 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas. $\square$

(a) Efectuando la sustitución $x = y - 1$ obtenemos $y^3 - 6y - 9 = 0$, es decir $p = -6$, $q = -9$. El discriminante es

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -108\left(\frac{81}{4} - \frac{216}{27}\right) < 0.$$

La ecuación tiene una solución real y dos imaginarias conjugadas.
(b) Tenemos $p = -12$, $q = 16$, por tanto

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -108\left(\frac{256}{4} - \frac{216}{27}\right) = 0.$$

Todas las soluciones son reales siendo dos de ellas iguales entre sí.

(c) Tenemos $p = -10$, $q = 30$, por tanto

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -108\left(\frac{900}{4} - \frac{1000}{27}\right) > 0.$$

La ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

4. Tenemos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3}y + c = 0.$$

Los términos de segundo grado se cancelan, en consecuencia la ecuación anterior es de la forma $y^3 + py + q = 0$.

16.9. Miscelánea de polinomios

1. Demostrar que el polinomio $f(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2} \in \mathbb{R}[x]$ con $a, b, c \in \mathbb{N}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

2. Determinar λ real para que el polinomio $P(x) = x^5 - 209x + \lambda$ admita dos ceros cuyo producto sea igual a 1.

3. Encontrar dos polinomios distintos en $\mathbb{Z}_3[x]$ que determinen la misma función de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{Z}_3$.

4. Encontrar un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de quinto grado de manera que $P(x) + 1$ sea divisible por $(x-1)^3$ y $P(x) - 1$ sea divisible por $(x+1)^3$.

Solución. 1. Dado que $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$, se verifica la equivalencia

$$x^2 + x + 1 \mid f(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 \mid (x-1)f(x).$$

Desarrollando,

$$(x-1)f(x) = (x-1)\left(x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}\right)$$

$$= x^{3a}(x-1) + x^{3b}(x^2 - x) + x^{3c}(x^3 - x^2).$$

Si r es raíz de $x^3 - 1$ (real o compleja) se verifica $r^3 = 1$, y por tanto

$$(r-1)f(r) = 1(r-1) + 1(r^2 - r) + 1(1 - r^2) = 0.$$

Es decir, toda raíz de x^3-1 lo es de $(x-1)f(x)$ luego x^3-1 divide a $(x-1)f(x)$.

2. La condición impuesta equivale a que existe $a\in\mathbb{C}$ tal que el polinomio x^2+ax+1 divide a $P(x)$. Efectuando la división euclídea de $P(x)$ entre x^2+ax+1, obtenemos como resto

$$R(x)=\left(a^4-3a^2-208\right)x+a^3-2a+\lambda,$$

y los dos coeficientes han de ser nulos. Resolviendo la ecuación bicuadrada

$$a^4-3a^2-208=0$$

obtenemos las soluciones $a=\pm4$ y $a=\pm\sqrt{13}i$. Sustituyendo $a=\pm4$ en $a^3-2a+\lambda=0$ obtenemos $\lambda=\pm56$ y sustituyendo $a=\pm\sqrt{13}i$ obtenemos valores complejos de λ. La solución es por tanto $\lambda=\pm56$.

3. Los polinomios de $\mathbb{Z}_3[x]$, $f(x)=x^4+2x$ y $g(x)=x^2+2x$ son distintos, sin embargo,

$$f(0)=0,\ f(1)=1+2=0,\ f(2)=1+1=2,$$

$$g(0)=0,\ g(1)=1+2=0,\ g(2)=1+1=2.$$

Es decir, f y g determinen la misma función de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{Z}_3$.

4. Si $P(x)+1$ es divisible por $(x-1)^3$ entonces $(P(x)+1)'=P'(x)$ es divisible por $(x-1)^2$. De manera análoga, $P'(x)$ es divisible por $(x+1)^2$. Dado que $(x-1)^2$ y $(x+1)^2$ son primos entre sí, ha de ser

$$P'(x)=\alpha(x-1)^2(x+1)^2=\alpha(x^2-1)^2\quad(\alpha\in\mathbb{R}).$$

Entonces, $P(x)$ es necesariamente de la forma

$$P(x)=\alpha\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)+\beta.$$

Como $P(x)+1$ es divisible por $(x-1)^3$ y $P(x)-1$ por $(x+1)^3$, $P(1)+1=0$ y $P(-1)-1=0$. Es decir

$$\begin{cases}P(1)=-1\\P(-1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}+1\right)+\beta=-1\\[2ex]\alpha\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}-1\right)+\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{15}{8}\\[1ex]\beta=0.\end{cases}$$

El polinomio pedido es por tanto

$$P(x)=-\frac{15}{8}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right).$$

16.10. Descomposición en suma de productos de raíces

Se consideran n elementos $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$ de un cuerpo $\mathbb{K}$ y un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado menor o igual que n. Se desea estudiar la existencia y unicidad de unos coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_n(x-x_1)\ldots(x-x_n) \quad (*)$$

1. Demostrar la unicidad de c_0 y a continuación la de c_1.
2. Demostrar la unicidad de todos los c_i.
3. Demostrar la existencia de los c_i.
4. Encontrar un algoritmo que permita el cálculo sucesivo de los c_i mediante operaciones racionales.
5. Aplicación al caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $p(x) = x^5 + 32$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Supongamos que se verifica la igualdad $(*)$. Entonces, $p(x_1) = c_0$ lo cual implica que c_0 está unívocamente determinado. Queda por tanto:

$$p(x) - p(x_1) = c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Consideremos el polinomio

$$p_1(x) = \frac{p(x) - p(x_1)}{x - x_1} = c_1 + c_2(x-x_2) + \ldots + c_n(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Entonces, $p_1(x_2) = c_1$ lo cual implica que c_1 está unívocamente determinado.

2. Tenemos

$$p_1(x) - c_1 = p_1(x) - p_1(x_2) = c_2(x-x_2) + \ldots + c_n(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Consideremos el polinomio

$$p_2(x) = \frac{p_1(x) - p_1(x_2)}{x - x_2} = c_2 + c_3(x-x_3) + \ldots + c_n(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

Entonces, $p_2(x_2) = c_2$ lo cual implica que c_2 está unívocamente determinado. Reiterando, obtenemos los polinomios $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ con

$$p_k(x) = \frac{p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x_k)}{x - x_k}$$

$$= c_k + c_{k+1}(x - x_{k+1}) + \ldots + c_n(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)$$

Por tanto, $p_k(x_{k+1}) = c_k$ lo cual implica que c_k está unívocamente determinado, siendo $c_n = a_n$ (el coeficiente de x^n en $p(x)$).

3. La existencia de los c_i se deduce inmediatamente del apartado anterior, ya que estos se han ido construyendo recursivamente. Otra forma de demostrarlo es considerar la aplicación lineal $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}_n[x]$:

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n) \to c_0 + c_1(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

Es fácil demostrar que es inyectiva, y por ser los espacios inicial y final de la misma dimensión, también es biyectiva.

4. De la construcción de los coeficientes c_i deducimos:

$$\begin{aligned} c_0 &: \text{ resto de la división de } p(x) \text{ entre } x - x_1 \\ c_1 &: \text{ resto de la división de } p_1(x) \text{ entre } x - x_2 \\ c_2 &: \text{ resto de la división de } p_2(x) \text{ entre } x - x_3 \end{aligned}$$

$$\ldots$$

$$c_n = a_n$$

5. Combinando los apartados primero segundo y cuarto obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow c_0 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ -1 & & -1 & 3 & -7 & 15 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -15 & 31 \end{array} \quad \Rightarrow c_1 = 31$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 7 & -15 \\ 1 & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & -10 \end{array} \quad \Rightarrow c_2 = -10$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 5 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow c_3 = 4$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & -1 \\ 2 & & 2 \\ \hline & 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow c_4 = 1,\ c_5 = 1$$

Podemos por tanto expresar:

$$\begin{aligned} x^5 + 32 = 31(x+2) - 10(x+2)(x+1) + 4(x+2)(x+1)(x-1) \\ +(x+2)(x+1)(x-1)^2 + (x+2)(x+1)(x-1)^2(x-2). \end{aligned}$$

16.11. Seno de 72 grados

Se considera la ecuación $z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$.
1) Multiplicar por $z-1$ dicha ecuación.
2) Efectuar un cambio $w=z+\dfrac{1}{z}$ en la citada ecuación reduciéndola a otra cuya única variable sea w.
3) Aplicar lo anterior a obtener razonadamente $\sin 72^0$ en la forma

$$\sin 72^0=\frac{p}{q}\sqrt[m]{e+f\sqrt[n]{g}}+i(1-\beta)$$

determinando el número real β y los enteros $p,\ q,\ m,\ e,\ f,\ n,\ g$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1) Multiplicando ambos miembros por $z-1$:

$$(z-1)\left(z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)=\ldots=z^3-\frac{1}{z^2}=0.$$

Ecuación equivalente a la dada salvo por la raíz $z=1$.

2) Tenemos $w^2=(z+1/z)^2=z^2+2+1/z^2$ por consiguiente

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1$$

$$=w^2-2+w+1=w^2+w-1=0.$$

3) La ecuación $z^3-1/z^2=0$ es equivalente a $z^5-1=0$. Hallemos sus raíces

$$z_k=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1(\cos 0^0+i\sin 0^0)}=\cos\frac{360^0k}{5}+i\sin\frac{360^0k}{5}\quad (k=0,1,2,3,4).$$

Para $k=1$ obtenemos la raíz $z_1=\cos 72^0+i\sin 72^0=a+bi$. Las raíces de $w^2+w-1=0$ son $w=(-1\pm\sqrt{5})/2=z+1/z$. Entonces

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=a+\frac{a}{a^2+b^2}+b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)i.$$

Como la parte imaginaria es nula obtenemos $b=0$ o $a^2+b^2=1$. Si $b=0$ entonces $a=\pm 1$ y no coinciden las partes reales, por tanto ha de ser $a^2+b^2=1$. Igualando partes reales obtenemos $(-1\pm\sqrt{5})/2=2a$. Es decir

$a = \cos 72^0 = (-1+\sqrt{5})/4$ (elegimos el signo + pues $\cos 72^0 > 0$). Hallemos $\sin 72^0$:

$$b = \sin 72^0 = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Además, $p = 1, q = 4, m = 2, e = 10, f = 2, n = 2, g = 5, \beta = 1$.

16.12. Familia de polinomios $p(x^2) = p(x)p(x+1)$

Se considera el conjunto

$$E = \{\ p(x) \in \mathbb{R}[x] - \{0\}\ :\ p(x^2) = p(x)p(x+1)\}.$$

1. Demostrar que todo polinomio de E es normalizado, es decir el coeficiente de mayor grado es 1. 2. Demostrar que toda constante de E es igual a 1.
3. Demostrar que si $a \in \mathbb{C}$ es raíz de un polinomio $p(x) \in E$ entonces también lo son a^2 y $(a-1)^2$.
4. Calcular las posibles raíces complejas de cualquier $p(x) \in E$.
5. Aplicando el resultado anterior, determinar el conjunto E.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1. Todo polinomio $p(x) \in E$ es de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$. Además

$$p(x^2) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_nx^{2n}, p(x+1)$$

$$= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \ldots + a_n(x+1)^n.$$

Si $p(x^2) = p(x)p(x+1)$ entonces (igualando los coeficientes de x^2) se verifica $a_n = a_n^2$ o de forma equivalente $a_n(a_n - 1) = 0$. Se deduce que $a_n = 0$ o $a_n = 1$. Como $a_n \neq 0$, ha de ser $a_n = 1$, es decir todo polinomio de E es mónico o normalizado.

2. Si $p(x) \in E$ es constante entonces es de la forma $p(x) = a_0$. Como $p(x)$ es normalizado, ha de ser necesariamente $a_0 = 1$.

3. Si a es raíz de $p(x)$ entonces $p(a) = 0$. Usando $p(x^2) = p(x)p(x+1)$ obtenemos

$$p(a^2) = p(a)p(a-1) = 0 \cdot p(a+1) = 0,$$

$$p\left((a-1)^2\right) = p(a-1)p(a) = p(a-1) \cdot 0 = 0.$$

es decir, a^2 y $(a-1)^2$ son también raíces de $p(x)$.

4. Del apartado anterior deducimos que si a es raíz de $p(x)$ entonces: (i) $a^2, a^4, a^8, \ldots$ son también raíces de $p(x)$. (ii) $(a-1)^2, (a-1)^4, (a-1)^8, \ldots$ son también raíces de $p(x)$. Como el número de raíces de un polinomio no nulo es finito, se ha de verificar

$$(a = 0 \ \vee \ |a| = 1) \ \wedge \ (a = 1 \ \vee \ |a-1| = 1).$$

Es decir, $a = 0, \ a = 1$ o a cumple $|a| = 1$ y $|a-1| = 1$. Llamando $a = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ las condiciones $|a| = 1$ y $|a-1| = 1$ equivalen al sistema

$$\begin{cases} \quad x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos las soluciones $x = 1/2, \ y = \pm\sqrt{3}$. Podemos concluir que las únicas posibles raíces de cualquier polinomio $p(x) \in E$ son 0 o 1 o $1/2 \pm \sqrt{3}i$.

5. Sea $p(x)$ un elemento de E. De los apartados 1. y 4. se deduce que $p(x)$ es de la forma $p(x) = x^\alpha (x-1)^\beta \left[\left(x^2 - 1/2 - \sqrt{3}i\right) \left(x^2 - 1/2 + \sqrt{3}i\right) \right]^\gamma$ con α, β y γ enteros no negativos. Operando obtenemos $p(x) = x^\alpha (x-1)^\beta (x^2 - x + 1)^\gamma$. Por otra parte

$$\begin{aligned} p(x)p(x+1) &= x^\alpha (x-1)^\beta (x^2 - x + 1)^\gamma (x+1)^\alpha x^\beta (x^2 + x + 1)^\gamma \\ &= x^{\alpha+\beta} (x-1)^\beta (x+1)^\alpha (x^2 - x + 1)^\gamma (x^2 + x + 1)^\gamma, \\ p(x^2) &= x^{2\alpha} (x+1)^\beta (x-1)^\beta (x^4 - x^2 + 1)^\gamma. \end{aligned}$$

El polinomio $p(x)p(x+1)$ lo tenemos expresado como producto de irreducibles. Para expresar $p(x^2)$ en la misma forma, vamos a factorizar $x^4 - x^2 + 1$ en producto de irreducibles

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Ahora la igualdad $p(x^2) = p(x)p(x+1)$ la podemos expresar:

$$\begin{aligned} &x^{\alpha+\beta} (x-1)^\beta (x+1)^\alpha (x^2 - x + 1)^\gamma (x^2 + x + 1)^\gamma \\ &= x^{2\alpha} (x+1)^\beta (x-1)^\beta (x^2 + \sqrt{3}x + 1)^\gamma (x^2 - \sqrt{3}x + 1)^\gamma. \end{aligned}$$

Todos los polinomios que aparecen en la última igualdad son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Como $\mathbb{R}[x]$ es dominio de factorización única se deduce que $\gamma = 0, \alpha = \beta$ y $\alpha + \beta = 2\alpha$, o de manera equivalente $\beta = \alpha$ y $\gamma = 0$.

Podemos pues concluir que los polinomios de E son exactamente los del tipo $p(x) = x^\alpha (x-1)^\alpha$ o bien $p(x) = (x^2 - x)^\alpha$ con α entero no negativo.

16.13. Cotas de las raíces de un polinomio

Sea $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ con $a_n \neq 0$ y c una raíz de $f(z)$. Demostrar que $|c| \leq M$ siendo

$$M = \text{máx} \left\{ \left(n \left| \frac{a_{i-1}}{a_n} \right| \right)^{1/i} : i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Solución. Supongamos que $|z| > M$, entonces

$$|z| > \left(n \left| \frac{a_{i-1}}{a_n} \right| \right)^{\frac{1}{i}} \ (\forall i = 1, \ldots, n) \Rightarrow |z|^i > n \frac{|a_{i-1}|}{|a_n|} \ (\forall i = 1, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow |a_{n-i}| < \frac{|a_n| \, |z|^i}{n} \ (\forall i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \left| a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \right|$$

$$\leq |a_{n-1}| \, |z|^{n-1} + \ldots + |a_1| \, |z| + |a_0| < \frac{|a_n| \, |z|^n}{n} + \ldots + \frac{|a_n| \, |z|^n}{n} = |a_n z^n| \, .$$

Es decir, si $|z| > M$ tendríamos $\left| a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \right| < |-a_n z^n|$ y por tanto z no puede ser raíz de $f(z)$.

16.14. Raíces de $f(x) = x^3 + \beta x^2 - \overline{\beta} x - 1$

Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\quad f(x) = x^3 + \dfrac{1 + \sqrt{7} i}{2} x^2 - \dfrac{1 - \sqrt{7} i}{2} x - 1.$
1) Comprobar que $f(x^2) = -f(x) f(-x)$.
2) Demostrar que si a es un cero de $f(x)$, entonces $|a| = 1$.
3) Demostrar que si $1, j, j^2$ son las raíces cúbicas de la unidad, dichas raíces no son ceros de $f(x)$
4) Demostrar que si a es un cero de $f(x)$ entonces, $a^7 = 1$.
5) Determinar las raíces de $f(x)$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. Industriales, UPM).

Solución. 1) Podemos escribir

$$f(x) = x^3 + \beta x^2 - \overline{\beta} x - 1 \text{ con } \beta = \frac{1 + \sqrt{7} i}{2}.$$

Entonces,

$$-f(x) f(-x) = -\left((x^3 + \beta x^2 - \overline{\beta} x - 1\right) \left(-x^3 + \beta x^2 + \overline{\beta} x - 1 \right)$$

$$= \ldots = x^6 - \left(\beta^2 + 2\overline{\beta} \right) x^4 + \left(\overline{\beta}^2 + 2\beta \right) x^2 - 1.$$

Por otra parte,

$$\beta^2+2\overline{\beta}=\frac{1-7+2\sqrt{7}i}{4}+2\frac{1-\sqrt{7}i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i=-\beta.$$

$$\overline{\beta}^2+2\beta=\frac{1-7-2\sqrt{7}i}{4}+2\frac{1+\sqrt{7}i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i=-\overline{\beta}.$$

Por tanto, $-f(x)f(-x)=x^6+\beta x^4-\overline{\beta}x^2-1=f(x^2)$.

2) El número de raíces de $f(x)$ es finito, por tanto

$$a \text{ es cero de } f \Rightarrow f(a)=0 \Rightarrow f(a^2)=-f(a)f(a)=0 \Rightarrow a^2 \text{ es cero de } f$$

$$\Rightarrow a,a^2,a^4,a^8,\ldots \text{ son ceros de } f \Rightarrow |a|=0 \vee |a|=1.$$

Como 0 no es raíz de $f(x)$, ha de ser necesariamente $|a|=1$.

3) Las raíces cúbicas de la unidad son

$$1,\quad j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad j^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

y fácilmente comprobamos que no anulan a $f(x)$.

4) Si a es un cero de $f(x)$ entonces a, a^2, a^4 y a^8 son ceros de $f(x)$ según vimos, por tanto hay dos repetidos entre ellos. Tenemos:

$$a=a^2\underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 0}a=1 \text{ (absurdo)},\quad a=a^4\underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 0}a^3=1 \text{ (absurdo)}.$$

$$a^2=a^4\underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 0}a^2=1\qquad\underbrace{\Rightarrow}_{a^2 \text{ cero de } f(x)}\qquad \text{(absurdo)}.$$

$$a^2=a^8\underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 0}\left(a^2\right)^3=1\qquad\underbrace{\Rightarrow}_{a^2 \text{ cero de } f(x)}\qquad \text{(absurdo)}.$$

$$a^4=a^8\underbrace{\Rightarrow}_{a\neq 0}a^4=1\qquad\underbrace{\Rightarrow}_{a^4 \text{ cero de } f(x)}\qquad \text{(absurdo)}.$$

Necesariamente, $a=a^8$, y al ser $a\neq 0$, queda $a^7=1$.

5) Si a es cero de $f(x)$, cumple $a^7=1$ por tanto las raíces de $f(x)$ han de ser tres del conjunto

$$\left\{1,w,w^2,w^3,w^4,w^5,w^6\right\} \text{ siendo } w=e^{2\pi i/7}.$$

Como 1 no es raíz de $f(x)$ han de ser o bien w, w^2 y w^4, o bien w^3, w^5 y w^6 (pues si a es raíz de $f(x)$, también lo es a^2). Si a, b, c son las raíces de $f(x)$ se verifica por la fórmulas de Cardano-Vieta

$$a + b + c = -\frac{1 + \sqrt{7}i}{2}, \text{ por tanto, Im } (a + b + c) = -\frac{\sqrt{7}}{2} < 0.$$

Por otra parte, Im $(w + w^2 + w^4) > 0$, en consecuencia las raíces de $f(x)$ son

$$w^3 = e^{6\pi i/7}, \quad w^5 = e^{10\pi i/7}, \quad w^6 = e^{12\pi i/7}.$$

Capítulo 17

Cónicas

17.1. Clasificación de cónicas

1. Determinar la naturaleza de las siguientes cónicas sin usar el cuadro de clasificación.
1) $x^2 + y^2 = 9$.
2) $4x^2 + 9y^2 = 36$.
3) $4x^2 - 9y^2 = 36$.
4) $y - x^2 = 0$.
5) $4x^2 + 9y^2 = -36$.
6) $x^2 + y^2 = 0$.
7) $x^2 - y^2 = 0$.
8) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
9) $y^2 = 0$.
10) $x^2 + 1 = 0$.

2. Clasificar las cónicas
a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.
b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$.

3. Clasificar las cónicas
a) $x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.
b) $2x^2 + 3xy + y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$.
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$.

4. Clasificar las cónicas
a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$.
b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

c) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$.

Solución. 1. 1) La cónica es $x^2 + y^2 = 3^2$. Tenemos por tanto una circunferencia, o bien, una elipse degenerada.
2) Dividiendo entre 36 queda $x/3^2 + y^2/2^2 = 1$. Tenemos por tanto una elipse.
3) Dividiendo entre 36 queda $x/3^2 - y^2/2^2 = 1$. Tenemos por tanto una hipérbola.
4) Es una parábola.
5) Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $4x^2 + 9y^2 \geq 0$, por tanto la cónica es el conjunto vacío de puntos. Dada la similitud con la cónica $4x^2 - 9y^2 = 36$, también decimos que se trata de una elipse imaginaria.
6) El único punto que satisface la ecuación es el $(0, 0)$. Ahora bien, usando números complejos,

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (iy)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + iy)(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + iy = 0 \ \vee \ x - iy = 0.$$

Se trata pues de un par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real.
7) Tenemos las equivalencias

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \ \vee \ x - y = 0.$$

Se trata pues de un par de rectas reales secantes.
8) Tenemos las equivalencias

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 3.$$

Se trata pues de un par de rectas paralelas reales.
9) La ecuación $y^2 = 0$ equivale a $y = 0 \vee y = 0$. Se trata pues de un par de rectas confundidas.
10) Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $x^2 + 1 \neq 0$, por tanto la cónica es el conjunto vacío de puntos. Ahora bien, usando números complejos, $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i$. Se trata pues de un par de rectas paralelas imaginarias.

2. Recordamos los resultados teóricos que conducen a la clasificación de cónicas. Sea la cónica

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

y sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \ \Delta = \det A, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ s = a_{11} + a_{22}.$$

Tenemos entonces:

A. Cónicas de tipo elíptico.

$$\delta > 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \begin{cases} s\Delta < 0 & \text{Elipse real.} \\ s\Delta > 0 & \text{Elipse imaginaria.} \end{cases} \\ \Delta = 0 \;\; \text{Par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real.} \end{cases}$$

B. Cónicas de tipo hiperbólico.

$$\delta < 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{Hipérbola.} \\ \Delta = 0 & \text{Par de rectas reales secantes.} \end{cases}$$

C. Cónicas de tipo parabólico.

$$\delta = 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \;\; \text{Parábola.} \\ \Delta = 0 \;\; \text{Par de rectas paralelas} \begin{cases} \text{Reales si } A_{11} + A_{22} < 0 \\ \text{Imaginarias si } A_{11} + A_{22} > 0 \\ \text{Confundidas si } A_{11} + A_{22} = 0 \end{cases} \end{cases} \square$$

a) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta = -3 \neq 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \ s = 3 + 3 = 6.$$

Dado que $s\Delta = -18 < 0$, se trata de una elipse real.

b) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ \Delta = 5 \neq 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \ s = 3 + 3 = 6.$$

Dado que $s\Delta = 30 > 0$, se trata de una elipse imaginaria.

c) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real.

3. *a*) Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -3\end{bmatrix},\ \Delta=13\neq 0,\ \delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-2<0.$$

Se trata de una hipérbola.

b) Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3/2 & 5/2\\ 3/2 & 1 & 1\\ 5/2 & 1 & -3\end{bmatrix},\ \Delta=0,\ \delta=\begin{vmatrix}2 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{vmatrix}=-1/4<0.$$

Se trata de un par de rectas reales secantes.

c) Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix},\ \Delta=-1\neq 0,\ \delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Se trata de una parábola.

4. *a*) Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix},\ \Delta=0,\ \delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Se trata de un par de rectas paralelas. Además,

$$A_{11}+A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-4-8=-12<0,$$

luego es un par de rectas paralelas reales.

b) Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\ \Delta=0,\ \delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0.$$

Se trata de un par de rectas paralelas. Además,

$$A_{11}+A_{22}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

luego es un par de rectas confundidas.

c) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \Delta = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se trata de un par de rectas paralelas. Además,

$$A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 > 0,$$

luego es un par de rectas paralelas imaginarias.

17.2. Rectas que componen las cónicas degeneradas

1. Las siguientes cónicas son degeneradas. Hallar las rectas que la componen.
a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$.
b) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$.

2. Hallar las rectas en las que degeneran las cónicas
a) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$.

Solución. 1. *a*) Podemos expresar la cónica en la forma $x^2 + (4y - 2)x + 4y^2 - 4y - 3 = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado en x

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 - 4y \pm \sqrt{16y^2 - 16y + 4 - 16y^2 + 16y + 12}}{2} \\ &= \frac{2 - 4y \pm 4}{2} = \{3 - 2y, -1 - 2y\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = (x + 2y - 3)(x + 2y + 1),$$

y la cónica está compuesta por las rectas paralelas $x + 2y - 3 = 0$ y $x + 2y + 1 = 0$.

b) Podemos expresar la cónica en la forma $x^2 + (3y + 2)x + 2y^2 + 5y - 3 = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado en x

$$x = \frac{-3y - 2 \pm \sqrt{9y^2 + 12y + 4 - 8y^2 - 20y + 12}}{2}$$

$$= \frac{-3y-2 \pm \sqrt{y^2-8y+16}}{2} = \frac{-3y-2 \pm \sqrt{(y-4)^2}}{2}$$
$$= \frac{-3y-2 \pm (y-4)}{2} = \{-y-3, -2y+1\}\,.$$

Es decir,

$$x^2+3xy+2y^2+2x+5y-3=(x+y+3)(x+2y-1),$$

y la cónica está compuesta por las rectas secantes $x+y+3=0$ y $x+2y-1=0$.

2. *a*) La cónica es $x^2+(4y+2)x+4y^2+4y+2=0$. Entonces,

$$x = \frac{-4y-2 \pm \sqrt{16y^2+16y+4-16y^2-16y-8}}{2}$$
$$= \frac{-4y-2 \pm 2i}{2} = \{-1+i-2y, -1-i-2y\}\,.$$

Es decir,

$$x^2+4xy+4y^2+2x+4y+2=(x+2y+1-i)(x+2y+1+i),$$

y la cónica está compuesta por las rectas paralelas imaginarias $x+2y+1-i=0$ y $x+2y+1+i=0$.

b) Tenemos,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4y^4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2iy}{2} = \{-1+iy, -1-iy\}\,.$$

Es decir,

$$x^2+y^2+2x+1=(x-iy+1)(x+iy+1),$$

y la cónica está compuesta por las rectas paralelas imaginarias $x-iy+1=0$ y $x+iy+1=0$, que se cortan en el punto real $(-1,0)$.

17.3. Ecuaciones reducidas de las cónicas

1. Hallar las ecuaciones reducidas de las cónicas
a) $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0$.
b) $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+2=0$.
c) $x^2+y^2+2y+1=0$.

2. Hallar las ecuaciones reducidas de las cónicas
a) $x^2-2xy-y^2+4x-6y-3=0$.

b) $2x^2 + 3xy + y^2 + 5x + 2y - 3 = 0.$
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 4y + 1 = 0.$

3. Hallar las ecuaciones reducidas de las cónicas
a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0.$
b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$
c) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0.$

Solución. 1. Recordamos los resultados teóricos que conducen al cálculo de las ecuaciones reducidas de las cónicas. Sea la cónica

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \ \Delta = \det A, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

y λ_1 y λ_2 los valores propios de la matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Entonces,

Caso 1. $\delta \neq 0$. La ecuación reducida es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0.$
Caso 2. $\delta = 0$. En este caso un valor propio es cero. Supongamos $\lambda_1 = 0$. Entonces,

i) Si $\Delta \neq 0$ la ecuación reducida es $\lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{\lambda_2}}x = 0.$

ii) Si $\Delta = 0$ la ecuación reducida es $y^2 + \dfrac{A_{11} + A_{22}}{(a_{11} + a_{22})^2} = 0.$ □

a) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta = -3, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4.$$

La ecuación reducida es por tanto $2x^2 + 4y^2 - \dfrac{3}{8} = 0.$

b) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ \Delta = 5, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4.$$

La ecuación reducida es por tanto $2x^2 + 4y^2 + \dfrac{5}{8} = 0$.

c) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \Delta = 0,\ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 1.$$

La ecuación reducida es por tanto $x^2 + y^2 = 0$.

2. *a*) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix},\ \Delta = 13,\ \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}.$$

La ecuación reducida es por tanto $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \dfrac{13}{2} = 0$.

b) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 5/2 \\ 3/2 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1 & -3 \end{bmatrix},\ \Delta = 0,\ \delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix} = 1/4.$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 17/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3\sqrt{2}}{2}.$$

La ecuación reducida es por tanto $(1+3\sqrt{2})x^2 + (1-3\sqrt{2})y^2 = 0$.

c) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta = -1, \ \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2.$$

La ecuación reducida es por tanto $2y^2 \pm 2\sqrt{1/2}\, x = 0$. o bien $y^2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} x = 0$.

3. *a*) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \Delta = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 8 = -12.$$

La ecuación reducida es por tanto

$$y^2 + \frac{A_{11} + A_{22}}{(a_{11} + a_{22})^2} = 0, \text{ es decir } y^2 - \frac{12}{25} = 0.$$

b) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación reducida es $y^2 = 0$.

c) Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \Delta = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5.$$

La ecuación reducida $y^2 + \dfrac{1}{5} = 0$.

17.4. Centro y ejes de las cónicas

1. Hallar el centro de cada una de las cónicas:
a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$
b) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$
c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0.$

2. Hallar los ejes de las siguientes cónicas:
a) $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$
b) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

3. Hallar el véritce de la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

Solución. 1. Recordamos que si la cónica de ecuación $f(x, y) = 0$ tiene centro, sus coordenadas son la solución (o soluciones) del sistema lineal

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

a) Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y + 2 = 0 \\ -2x + 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8} \right).$$

b) Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ -2x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

El sistema es incompatible, luego la cónica no tiene centro.

c) Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 2 = 0 \\ 4x + 8y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x + 2y - 1 = 0. \right.$$

Cada punto de la recta $x + 2y - 1 = 0$ es un centro de la cónica. Tenemos pues una recta de centros.

2. Recordamos los resultados teóricos que conducen al cálculo de los ejes de una cónica.
1. *Caso elipse o hipérbola.* Los ejes son

$$y - y_0 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}(x - x_0), \quad y - y_0 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}(x - x_0) \quad (\lambda_2 \neq 0).$$

en donde (x_0, y_0) es el centro de la cónica. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ la cónica es una circunferencia y cualquier recta que pasa por el centro es eje de la cónica. Si $a_{12} = 0$, los ejes de la cónica son $x = x_0$ e $y = y_0$.
2. *Caso parábola.* La ecuación del eje es

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si $a_{12} = 0$, el eje es $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

$a)$ Fácilmente comprobamos que la cónica es una hipérbola. Su centro es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}.$$

Los ejes son por tanto

$$y - \frac{5}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y - \frac{5}{2} = -\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$b)$ Fácilmente comprobamos que la cónica es una parábola. Valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2.$$

El eje es por tanto

$$2x - 2y + 4 - (-2x + 2y - 6) = 0, \text{ o bien } 2x - 2y + 5 = 0.$$

3. Vimos en el apartado anterior que el eje es $2x - 2y + 5 = 0$. El vértice es la intersección de del eje con la parábola, es decir la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y + 5 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo $x = y - 5/2$ en la segunda ecuación y simplificando obtenemos $y = -11/8$ con lo cual $x = -11/8 - 5/2 = -31/8$. El vértice es por tanto

$$\left(-\frac{31}{8}, -\frac{11}{8}\right).$$

17.5. Giros y traslaciones en las cónicas

1. Se considera la cónica de ecuación $f(x, y) = 0$, en donde

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1.$$

a) Descomponer $f(x, y)$ en suma de una forma cuadrática $q(x, y)$ y un polinomio de primer grado $p(x, y)$.
b) Encontrar una base ortonormal y de vectores propios de $\mathbb{R}^2$ para la matriz simétrica que representa a q.
c) Expresar la cónica dada en coordenadas con respecto a la base hallada en el apartado anterior, lo cual permitirá eliminar el término en xy.
d) Interpretar geométricamente el movimiento de ejes realizado.
e) Efectuar una traslación de ejes que permita eliminar los términos de primer grado en la ecuación de la cónica obtenida en el apartado *c*).

2. Hallar el centro y ejes de la cónica del apartado anterior, basándose en los movimientos de ejes realizados.

Solución. 1. *a*) Podemos expresar

$$f(x, y) = \underbrace{3x^2 - 2xy + 3y^2}_{q(x,y)} + \underbrace{2x - 4y + 1}_{p(x,y)},$$

en donde $q(x, y)$ es una forma cuadrática y $p(x, y)$ es un polinomio de primer grado.

b) La expresión matricial de q es

$$q(x.y) = (x, y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos a M el teorema espectral. Valores propios

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4.$$

Bases de los subespacios propios

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. , \quad B_{V_2} = \{(1,1)\}$$

$$V_4 \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \right. , \quad B_{V_4} = \{(-1,1)\}$$

Una base ortonormal y de vectores de $\mathbb{R}^2$ es por tanto

$$B' = \{e_1, e_2\} \text{ con } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1).$$

c) La matriz de P de cambio de la base canónica $B = \{(1,0),(0,1)\}$ a la B' es

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ortogonal)},$$

y la expresión del cambio es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{array} \right.$$

Entonces

$$f(x,y) = q(x,y) + p(x,y) = (x,y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2x - 4y + 1$$

$$= (x',y')P^tMP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{4}{\sqrt{2}}(x' + y') + 1$$

$$= (x',y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 1$$

$$= 2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 1.$$

La ecuación de la cónica en los nuevos ejes $x'y'$ es por tanto

$$2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0.$$

d) Como P es ortogonal, $P^{-1} = P^t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\operatorname{sen}(-\pi/4) \\ \operatorname{sen}(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es decir, los ejes $x'y'$ es han obtenido girando los xy un ángulo de $-\pi/4$.

e) Consideremos la traslación de ejes

$$\begin{cases} x' = x'' + \alpha \\ y' = y'' + \beta. \end{cases}$$

Sustituyendo en $2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0.$,

$$2\left(x'' + \alpha\right)^2 + 4\left(y'' + \beta\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(x'' + \alpha\right) - \frac{6}{\sqrt{2}}\left(y'' + \beta\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x''\right)^2 + 4\left(y''\right)^2 + \left(4\alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)x'' + \left(8\beta - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)y''$$

$$+2\alpha^2 + 4\beta^2 - \frac{2\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{6\beta}{\sqrt{2}} + 1 = 0. \qquad (1)$$

Obligando a que los coeficientes de x'' e y'' sean nulos

$$\begin{cases} 4\alpha - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 0 \\ 8\beta - \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) obtenemos la ecuación

$$2\left(x''\right)^2 + 4\left(y''\right)^2 - \frac{3}{8} = 0,$$

que es una ecuación reducida de la cónica.

2. La cónica en los ejes $x''y''$ es $2\left(x''\right)^2 + 4\left(y''\right)^2 - 3/8 = 0$. Entonces

$$2\left(x''\right)^2 + 4\left(y''\right)^2 - \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x''\right)^2 + 4\left(y''\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x''\right)^2}{3/16} + \frac{\left(y''\right)^2}{3/32} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(x''\right)^2}{(\sqrt{3}/4)^2} + \frac{\left(y''\right)^2}{(\sqrt{3/32})^2} = 1 \ \text{ (elipse)}.$$

El centro de la cónica es el punto $(x'', y'') = (0, 0)$. Entonces,

$$(x'', y'') = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + \alpha \\ y' = y'' + \beta. \end{cases} \Rightarrow (x', y') = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

Los ejes de la cónica son $x'' = 0$ e $y'' = 0$. Entonces,

$$x'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y' = t + \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - t - \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + t + \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{sumando}} \; 2x + 2y - 1 = 0.$$

De manera totalmente análoga se halla el otro eje.

17.6. Familia uniparamétrica de cónicas

Clasificar las siguientes cónicas según los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda x^2 + y^2 + 2xy + 2\lambda x + y = 0.$$

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. La matriz correspondiente a la familia de cónicas dada es:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1/2 \\ \lambda & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los invariantes lineal, cuadrático y cúbico son:

$$s = a_{11} + a_{22} = \lambda + 1,\ \delta = A_{33} = \lambda - 1,\ \Delta = \det A = -\lambda\left(\lambda - \tfrac{3}{4}\right).$$

Primer caso: $\delta > 0$. Esto ocurre cuando $\lambda > 1$. La cónica es de tipo elíptico. Dado que en este caso $\delta > 0$ y $\Delta < 0$, se verifica $s\Delta < 0$ y por tanto la cónica es una elipse real. Veamos si alguna de estas elipses es circunferencia. Los valores propios asociados a la cónica son las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 1 \\ 1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - (\lambda+1)\alpha + \lambda - 1 = 0.$$

Existe un valor propio doble si y sólo si el discriminante $(\lambda+1)^2 - 4(\lambda-1)$ es nulo. Esto equivale a $\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$, ecuación que no tiene soluciones reales, es decir no hay circunferencias.

Segundo caso: $\delta < 0$. Esto ocurre cuando $\lambda < 1$. La cónica es de tipo hiperbólico. Es una hipérbola salvo cuando Δ se anula ($\lambda = 0$ o $\lambda = 3/4$), en los que tenemos pares de rectas reales secantes.

Tercer caso: $\delta = 0$. Esto ocurre cuando $\lambda = 1$. La cónica es de tipo parabólico. Además en este caso $\Delta \neq 0$, con lo cual se trata de una parábola.

Agrupando los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} &\text{Hipérbola} : \lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 3/4) \cup (3/4, 1) \\ &\text{Rectas reales secantes} : \lambda = 0 \ \vee \lambda = 3/4 \\ &\text{Parábola} : \lambda = 1 \\ &\text{Elipse real} : \lambda \in (1, +\infty). \end{aligned}$$

17.7. Circunferencia, cónica y forma cuadrática

Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la cónica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = a^2$$

y la forma cuadrática

$$Q(x, y) = (a_{11} - 1)x^2 + (a_{22} - 1)y^2 + 2a_{12}xy.$$

1. Demostrar que si la forma cuadrática $Q(x, y)$ es definida positiva, entonces la circunferencia y la cónica no se cortan. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dar una demostración en caso afirmativo o construir un contraejemplo en caso negativo.
2. Estudiar y describir geométricamente las cónicas

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = a^2$$

para las cuales la forma cuadrática $Q(x, y)$ es definida positiva.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. 1. Supongamos que existiera un punto (α, β) que perteneciera a la circunferencia y cónica dadas. Entonces se verificaría

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = a^2 \\ a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\alpha\beta = a^2. \end{cases}$$

Restando a la segunda ecuación la primera obtenemos

$$(a_{11} - 1)\alpha^2 + (a_{22} - 1)\beta^2 + 2a_{12}\alpha\beta = 0,$$

o de forma equivalente $Q(\alpha, \beta) = 0$. Como Q definida positiva, ha de ser necesariamente $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, pero esto es absurdo pues $(0, 0)$ no satisface la ecuación de la circunferencia. Concluimos pues que si Q es definida positiva, la circunferencia y la cónica no se cortan.
Veamos que el recíproco es falso. En efecto, consideremos la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ y la cónica $x^2/2+y^2/2 = 1$. Es claro que no se cortan y la forma cuadrática Q es

$$Q(x, y) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2,$$

que no es definida positiva.

2. Sea (x, y) un punto de la cónica. Este punto no puede ser el origen pues $a \neq 0$. Si Q es definida positiva:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= (a_{11} - 1)x^2 + (a_{22} - 1)y^2 + 2a_{12}xy \\ &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy - x^2 - y^2 = a^2 - (x^2 + y^2) > 0. \end{aligned}$$

Es decir, todo punto de la cónica ha de estar en el círculo $D \equiv 0 < x^2+y^2 < a^2$ y recíprocamente, si la cónica está contenida en D, la forma cuadrática Q es definida positiva. Concluimos que las cónicas para las cuales Q es definida positiva son aquellas contenidas en el disco abierto D.

17.8. Ejes de una cónica por diagonalización simultanea

Un plano euclídeo E está referido a unos ejes oblicuos XOY, de ángulo $\pi/3$ y vectores de referencia respectivos $\vec{I}$, $\vec{J}$ ambos con módulo 1. Las coordenadas (x, y) de un punto M cualquiera del plano quedan por tanto definidos mediante $\overrightarrow{OM} = x\vec{I} + y\vec{J}$. Hallar los ejes de simetría de la cónica de E

$$C : x^2 + 3y^2 + xy - 4 = 0.$$

Solución. La matriz de Gram del producto escalar usual en la base $\mathcal{B} = \{\vec{I}, \vec{J}\}$ es

$$B = \begin{pmatrix} \langle \vec{I}, \vec{I} \rangle & \langle \vec{I}, \vec{J} \rangle \\ \langle \vec{J}, \vec{I} \rangle & \langle \vec{J}, \vec{J} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de la cónica en coordenadas en la base $\mathcal{B}$ es $x^2 + 3y^2 + xy = 4$, que podemos expresar matricialmente en la forma

$$(x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4.$$

Diagonalicemos simultaneamente. Valores propios generalizados:

$$|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 - \lambda/2 \\ 1/2 - \lambda/2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{11}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2 - 14\lambda + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{14 \pm 8}{6} = \{11/3, 1\} \text{ (simples)}.$$

Subespacios propios generalizados y base de cada uno de ellos:

$$V_{11/3} \equiv \begin{cases} -\dfrac{8}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}x_2 = 0 \\ -\dfrac{4}{3}x_1 - \dfrac{2}{3}x_2 = 0 \end{cases}, \quad B_{11/3} = \{(1, -2)\}$$

$$V_1 \equiv \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}, \quad B_1 = \{(1, 0)\}.$$

Los vectores $u_1 = (1, -2)$ y $u_2 = (1, 0)$ son B-ortogonales pues corresponden a valores propios generalizados distintos. La B-norma de cada uno de estos vectores es

$$\|u_1\|^2 = (1, -2)B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3, \quad \|u_2\|^2 = (1, 0)B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Una base de E, B-ortonormal y de vectores propios generalizados es por tanto

$$\mathcal{B}' = \left\{ e_1 = \left(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}\right),\ e_2 = (1, 0) \right\}.$$

En consecuencia,

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 \\ -2/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T A P = \begin{pmatrix} 11/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^T B P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean $(x'y')$ las coordenadas del punto M en la base $\mathcal{B}'$, esto es, $\overrightarrow{OM} = x'e_1 + y'e_2$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 \\ -2/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Tenemos,

$$x^2 + 3y^2 + xy - 4 = 0 \Leftrightarrow (x, y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \Leftrightarrow (x', y')P^T AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4$$

$$\Leftrightarrow (x', y') \begin{pmatrix} 11/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4 \Leftrightarrow \frac{11}{3}(x')^2 + (y')^2 = 4,$$

y la matriz de Gram en $\mathcal{B}'$ es $P^T BP = I$ es decir, la cónica está ahora expresada en una base ortonormal. Se trata claramente de una elipse de ejes $x' = 0$, $y' = 0$. De las relaciones $(*)$ obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{\sqrt{3}} + y' = x \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x' = y \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = x + \dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

Los ejes de la cónica en las coordenadas originales son por tanto $y = 0$, y $2x + y = 0$.

Capítulo 18

Superficies

18.1. Superficies regladas

1. Hallar la ecuación cartesiana del cilindro S de generatrices paralelas al vector $(1,1,1)$ y cuya directriz es la curva

$$C: \ x = \frac{t}{t-1}, \ y = \frac{t^2}{t-1}, \ z = \frac{t^3}{t-1}.$$

2. Hallar la ecuación del cilindro cuya sección recta (perpendicular a las generatrices) viene dada por la curva

$$\begin{cases} x = z \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

3. Hallar la ecuación cartesiana del cono de vértice $V(0,0,0)$ y directriz la curva

$$C : x = t, \ y = t^2, \quad z = t^3.$$

4. Hallar la ecuación cartesiana del cono de vértice $V(1,0,0)$ y directriz la curva

$$\begin{cases} x = z \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Solución. 1. Recordamos que la ecuaciones paramétricas de una superficie reglada S de directriz la curva C de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ con generatrices en cada punto $P\,(x(t), y(t), z(t))$ paralelas al vector $V_P = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ son

$$S : \begin{cases} X = x(t) + \lambda v_x(t) \\ Y = y(t) + \lambda v_y(t) \\ Z = z(t) + \lambda v_z(t). \end{cases}$$

En nuestro caso,
$$S : \begin{cases} X = \dfrac{t}{t-1} + \lambda \\ Y = \dfrac{t^2}{t-1} + \lambda \\ Z = \dfrac{t^3}{t-1} + \lambda. \end{cases}$$
Eliminemos los parámetros,
$$Y - X = \frac{t^2 - t}{t-1} = \frac{t(t-1)}{t-1} = t, \quad Z - Y = \frac{t^3 - t^2}{t-1} = \frac{t^2(t-1)}{t-1} = t^2.$$
La ecuación pedida es $Z - Y = (Y - X)^2$. Operando queda
$$S : X^2 + Y^2 - 2XY + Y - Z = 0.$$
2. Describimos el método general para hallar la ecuación de un cilindro cuando la directriz C viene dada por la intersección de dos superficies
$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$
Si (a, b, c) es vector paralelo a las generatrices, dividiendo entre c, obtenemos un vector de la forma $(m, n, 1)$. Eligiendo un punto de cada generatriz de la forma $(p, q, 0)$, las ecuaciones de las generatrices son
$$\begin{cases} X = p + \lambda m \\ Y = q + \lambda n \\ Z = \lambda \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} X = p + mZ \\ Y = q + nZ. \end{cases}$$
Obligando a que corten a la directriz obtenemos
$$\begin{cases} f(p + mZ, p + nZ, Z) = 0 \\ g(p + mZ, q + nZ, Z) = 0. \end{cases}$$
Eliminando Z de entre las relaciones anteriores, obtenemos una relación $R(p, q) = 0$, que sustituida por sus valores, proporciona la ecuación de la superficie
$$R\,(X - mZ, Y - nZ) = 0. \qquad \square$$
En nuestro caso, la directriz está contenida en el plano $x - z = 0$ y un vector normal es el $(-1, 0, 1)$. Las generatrices son por tanto de la forma
$$\begin{cases} X = p - Z \\ Y = q. \end{cases}$$

Obligando a que corten a la directriz,

$$\begin{cases} p - Z = Z \\ (p - Z)^2 + 2q^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Eliminando Z de entre las relaciones anteriores, obtenemos la relación $p^2 + 8q^2 - 4 = 0$. Sustituyendo por sus valores, obtenemos la ecuación del cilindro,

$$(X + Z)^2 + 8Y^2 - 4 = 0.$$

3. En general, toda generatriz de un cono S de vértice $V(x_0, y_0, z_0)$ y directriz $C : x = x(t),\ y(t),\ z = z(t)$, pasa por V y por un punto $P(x(t), y(t), z(t))$ de la directriz. Las ecuaciones paramétricas del cono son por tanto

$$S : \begin{cases} X = x_0 + \lambda\,(x(t) - x_0) \\ Y = y_0 + \lambda\,(y(t) - y_0) \\ Z = z_0 + \lambda\,(z(t) - z_0)\,. \end{cases}$$

En nuestro caso, $S : X = \lambda t,\ Y = \lambda t^2,\ Z = \lambda t^3$. Eliminando parámetros

$$\frac{Y}{X} = t,\ \frac{Z}{Y} = t \Rightarrow \frac{Z}{Y} = \frac{Y}{X}.$$

La ecuación cartesiana del cono es por tanto $Y^2 - ZX = 0$.

4. En general, sea S un cono de vértice $V(x_0, y_0, z_0)$ y directriz la curva

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Sea $(a, b.c)$ un vector de dirección de una generatriz. Dividiendo entre entre c obtenemos un vector de la forma $(\lambda, \mu, 1)$. Las ecuaciones de las generatrices son

$$\frac{X - x_0}{\lambda} = \frac{Y - y_0}{\mu} = Z - z_0, \text{ o bien } \begin{cases} X = x_0 + \lambda(Z - z_0) \\ Y = y_0 + \mu(Z - z_0). \end{cases}$$

Obligando a que corten a la directriz obtenemos

$$\begin{cases} f\,(x_0 + \lambda(Z - z_0), y_0 + \mu(Z - z_0), Z) = 0 \\ g\,(x_0 + \lambda(Z - z_0), y_0 + \mu(Z - z_0), Z) = 0. \end{cases}$$

Eliminando Z de entre las relaciones anteriores, obtenemos una relación $R(\lambda, \mu) = 0$, que sustituida por sus valores, proporciona la ecuación del cono

$$R\left(\frac{X - x_0}{Z - z_0}, \frac{Y - y_0}{Z - z_0}\right) = 0. \qquad \square$$

En nuestro caso, las generatrices son de la forma

$$\begin{cases} X = 1 + \lambda Z \\ Y = \mu Z. \end{cases}$$

Obligando a que corten a la directriz,

$$\begin{cases} 1 + \lambda Z = Z \\ (1 + \lambda Z)^2 + 2\mu^2 Z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Eliminando Z de entre las relaciones anteriores, obtenemos la relación $\lambda^2 - 2\mu^2 - 2\lambda = 0$. Sustituyendo por sus valores y simplificando obtenemos la ecuación del cono,

$$X^2 - 2Y^2 - 2Z^2 - 2X + 2Z + 1 = 0.$$

18.2. Superficies de revolución

1. Hallar la ecuación de la superficie de revolución obtenida a girar la recta $x = z$, $y = z$ alrededor del eje OZ.

2. Hallar la ecuación cartesiana de la superficie obtenida al girar la recta $C : x = 1$, $y = 2$ alrededor del eje $r : x = y = z$.

Solución. 1. Recordamos que una superficie de revolución es la superficie S obtenida al girar una curva C llamada generatriz alrededor de una recta fija r llamada eje. Supongamos que

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Las esferas con centro (x_0, y_0, z_0) tienen por ecuación

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = \lambda,$$

y las circunferencias con centro un punto del eje y que son perpendiculares al eje son de la forma

$$\begin{cases} (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = \lambda \\ aX + bY + cZ = \mu. \end{cases}$$

La superficie S está formada por las circunferencias anteriores y que además cortan a la curva generatriz C. Obligando a que esto ocurra, obtendremos una relación entre λ y μ, que sustituidos por sus valores, nos dará la ecuación de S. $\square$

En nuestro caso, las circunferencias con centro un punto del eje y que son perpendiculares al eje son de la forma

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=\lambda \\ Z=\mu. \end{cases}$$

Obligando a que corten a la generatriz

$$\begin{cases} 3Z^2=\lambda \\ Z=\mu, \end{cases}$$

y eliminando Z obtenemos $\lambda-3\mu^2=0$. La ecuación de la superficie pedida es por tanto

$$X^2+Y^2-2Z^2=0.$$

2. Las circunferencias con centro un punto del eje y perpendiculares al eje son

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=\lambda \\ X+Y+Z=\mu. \end{cases}$$

Obligando a que corten a la generatriz

$$\begin{cases} 5+Z^2=\lambda \\ 3+Z=\mu, \end{cases}$$

y eliminando Z obtenemos $\lambda-5=(\mu-3)^2$. La ecuación de la superficie de revolución pedida es pedida es por tanto

$$X^2+Y^2+Z^2-5=(X+Y+Z-3)^2,$$

y operando queda $XY+XZ+YZ-3X-3Y-3Z+7=0$.

18.3. Superficie de revolución y cónica

Se consideran las rectas $r: x=y=z$. $s: -x+z=0,\ x+4y+z-6=0$. Se pide:
1) Obtener la ecuación de la superficie que engendra la recta s al girar alrededor de la recta r.
2) Se corta la superficie anterior por el plano $z=1$. Clasificar la cónica resultante, indicando los elementos notables (centro, ejes y asíntotas si las tiene), si no es degenerada o calcular las rectas que la forman si es degenerada.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Caminos, UPM).

Solución. 1) La superficie de revolución R pedida está formada por las circunferencias que son perpendiculares al eje r, con centro un punto de este eje y que además cortan a s. Las circunferencias C perpendiculares al eje r con centro un punto del eje se obtienen por la intersección de todas las esferas con centro un punto del eje (por ejemplo el origen) con todos los planos perpendiculares al eje. Es decir

$$C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda_1 \\ x+y+z=\lambda_2. \end{cases}$$

La recta s la podemos expresar en la forma $z=x,\ y=3/2-x/2$. Obliguemos a que la circunferencias C corten a s

$$\begin{cases} x^2+(3/2-x/2)^2+x^2=\lambda_1 \\ x+3/2-x/2+x=\lambda_2. \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la relación que han de cumplir λ_1 y λ_2 para que las circunferencias C pertenezcan a la superficie R

$$\lambda_2^2+2\lambda_2-\lambda_1+6=0.$$

Sustituyendo λ_1 y λ_2 por sus valores en C

$$(x+y+z)^2+2(x+y+z)-x^2-y^2-z^2+6=0.$$

Simplificando obtenemos la ecuación de la superficie pedida

$$R \equiv\ xy+xz+yz+x+y+z+6=0.$$

2) Para $z=1$ obtenemos la cónica $xy+2x+2y+7=0$, su matriz es

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tenemos $\Delta=\det A=-3/4\neq 0$ y $\delta=A_{33}=-1/4<0$. Se trata pues de una hipérbola. Hallando las parciales respecto de x e y obtenemos el centro de la cónica

$$\begin{cases} y+2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2. \end{cases}$$

El centro es por tanto el punto $(-2,-2)$. Las ecuaciones de los ejes de una cónica $f(x,y)=0$ en el caso elipse o hipérbola no degenerada con $a_{12}\neq 0$ sabemos que son

$$y-y_0=\frac{\alpha_i-a_{11}}{a_{12}}(x-x_0)\ \ (i=1,2), \qquad (*)$$

siendo (x_0, y_0) el centro de la cónica y α_i $(i = 1, 2)$ los valores propios de la matriz correspondiente a A_{33}

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 1/2 \\ 1/2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1/4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1/2.$$

Sustituyendo en $(*)$ obtenemos las ecuaciones de los ejes: $x - y = 0,\ x + y + 4 = 0$. Para hallar las asíntotas homogeneizamos la ecuación $xy + 2xt + 2yt + 7t^2 = 0$. Si $t = 0$, entonces $xy = 0$. Es decir los puntos del infinito de la cónica son $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Las ecuaciones de las asíntotas son por tanto $x = -2$ e $y = -2$. Teniendo en cuenta que la cónica está contenida en el plano $z = 1$ podemos concluir:

Centro: $(-2, -2, 1)$.

Ejes: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$

Asíntotas: $\begin{cases} x = -2 \\ z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} y = -2 \\ z = 1. \end{cases}$

18.4. Superficies de traslación

1. Hallar la superficie de traslación de la dos siguientes parábolas

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 = 2qx \\ y = 0. \end{cases}$$

2. Hallar la ecuación de la superficie de traslación obtenida al desplazarse la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

sobre la recta $x - 2 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Solución. 1. Recordamos que si C y C^* son curvas del espacio de ecuaciones paramétricas

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases} \quad C^* : \begin{cases} x = x^*(u) \\ y = y^*(u) \\ z = z^*(u) \end{cases}$$

que se cortan en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie S obtenida al trasladarse una de ellas paralelamente a lo largo de la otra, son

$$S : \begin{cases} x = x(t) + x^*(u) - x_0 \\ y = y(t) + y^*(u) - y_0 \\ z = z(t) + z^*(u) - z_0. \end{cases}$$

En nuestro caso, tenemos las curvas

$$C : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \\ z = 0, \end{cases} \quad C^* : \begin{cases} x = \dfrac{u^2}{2q} \\ y = 0 \\ z = u \end{cases}$$

que se cortan en el punto $P_0(0, 0, 0)$. La superficie pedida es por tanto

$$S : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} + \dfrac{u^2}{2q} \\ y = t \\ z = u. \end{cases}$$

Eliminando parámetros obtenemos

$$S : \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} - x = 0.$$

2. Las curvas dadas son

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \\ z = 0, \end{cases} \quad C^* : \begin{cases} x = 2 + u \\ y = 2u \\ z = 3u \end{cases}$$

que se cortan en el punto $P_0(2, 0, 0)$. La superficie pedida es por tanto

$$S : \begin{cases} x = u + 2\cos t \\ y = 2u + 3\operatorname{sen} t \\ z = 3u. \end{cases}$$

Eliminemos parámetros. De $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ obtenemos

$$S : \left(\frac{y - 2z/3}{3} \right)^2 + \left(\frac{x - z/3}{2} \right)^2 = 1.$$

18.5. Una cuádrica como lugar geométrico

Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del espacio tales que la razón de sus distancias al plano $x+y+z=9$ y al punto $(1,1,1)$ es $\sqrt{3}$. Comprobar que se trata de una cuádrica (ecuación de segundo grado), clasificarla y hallar su ecuación reducida.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. Llamemos P_0 al punto $(1,1,1)$, π al plano $x+y+z=9$, $P(x,y,z)$ a cualquier punto del espacio, y $\mathcal{L}$ al lugar geométrico pedido. Entonces:

$$P \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \frac{d(P,\pi)}{d(P,P_0)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow d(P,\pi) = \sqrt{3}\, d(P,P_0)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x+y+z-9}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3}\, \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad:

$$(x+y+z-9)^2 = 9[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2].$$

Operando y simplificando obtenemos el lugar geométrico pedido:

$$\mathcal{L} \equiv 4x^2+4y^2+4z^2-xy-xz-yz-27=0.$$

Escribamos ahora la matriz A de la cuádrica. Podemos multiplicar ambos miembros de la ecuación por 2 para evitar fracciones, obteniendo:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -54 \end{bmatrix}.$$

Hallemos los valores propios asociados a la cuádrica, para ello restamos a la segunda y tercera fila la primera y a continuación, a la primera columna le sumamos las demás:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 8-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 & -1 \\ -9+\lambda & 9-\lambda & 0 \\ -9+\lambda & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)(9-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ (simple)} \ \vee \ \lambda = 9 \text{ (doble)}.$$

Para $\delta = A_{44}$ y $\Delta = \det(A)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los valores propios asociados a la cuádrica, sabemos que una ecuación reducida de la misma es:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (\text{si } \delta \neq 0).$$

Dado que $\Delta = -54\delta$, una ecuación reducida de $\mathcal{L}$ es $6X^2+9Y^2+9Z^2-54=0$, que la podemos escribir en la forma $X^2/9+Y^2/6+9Z^2/6=1$. En consecuencia:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{Z^2}{(\sqrt{6})^2}=1.$$

Se trata de un elipsoide de semiejes $3, \sqrt{6}, \sqrt{6}$.

18.6. Cuádrica, giro y traslación

Se considera la cuádrica

$$\mathcal{C} : 2x^2-7y^2+2z^2-10xy-8xz-10yz+6x+12y-6z+5=0.$$

Efectuar un giro y traslación de ejes que permita hallar la ecuación reducida de $\mathcal{C}$. Clasificar la cuádrica.

Solución. Podemos escribir $\mathcal{C}$ en la forma

$$(x,y,z)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -5 & -7 & -5 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+2(x,y,z)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}+5=0.$$

Valores propios de A :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ -5 & -7-\lambda & -5 \\ -4 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_3-F_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ -5 & -7-\lambda & -5 \\ -6+\lambda & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{C_1+C_3} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 & -4 \\ -10 & -7-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ -10 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(6-\lambda)(\lambda^2+9\lambda-36)=0 \Leftrightarrow (6-\lambda)(\lambda+12)(\lambda-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-12 \ \vee \ \lambda=3 \ \vee \ \lambda=6 \quad \text{(simples)}.$$

Subespacios propios de A y correspondientes bases

$$V_{-12} \equiv \begin{cases} \ \ 14x_1-5x_2-4x_3=0 \\ -5x_1+5x_2-5x_3=0 \\ -4x_1-5x_2+14x_3=0, \end{cases} \qquad B_{-12}=\{(1,2,1)\},$$

$$V_3 \equiv \begin{cases} -x_1-5x_2-4x_3=0 \\ -5x_1-10x_2-5x_3=0 \\ -4x_1-5x_2-x_3=0, \end{cases} \qquad B_3=\{(1,-1,1)\},$$

$$V_6 \equiv \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 - 13x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \quad B_3 = \{(1, 0, -1)\}.$$

Los tres vectores anteriores son ortogonales dos a dos, como era de esperar, al ser vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz simétrica. Dividiendo cada vector entre su norma y transponiendo, obtenemos una matriz P ortogonal tal que $P^tAP = D$ con D diagonal de vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

El determinante de P es 1, y determina un giro en el espacio. Efectuando la transformación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la ecuación de la cuádrica,

$$(u, v, w)P^tAP \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + 2(u, v, w)P^t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 = 0,$$

$$(u, v, w) \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + 2(u, v, w) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 = 0,$$

$$-12u^2 + 3v^2 + 6w^2 + 4\sqrt{6}u - 4\sqrt{3}v + 6\sqrt{2}w + 5 = 0.$$

Completando cuadrados,

$$-12\left(u - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3\left(v - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(w + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.$$

Con la traslación de ejes

$$X = v - \frac{2}{\sqrt{3}}, \;\; Y = w + \frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; Z = u - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

obtenemos la ecuación reducida de la cuádrica $\mathcal{C}$:

$$3X^2 + 6Y^2 - 12Z^2 = 0, \text{ o bien } X^2 + 2Y^2 - 4Z^2 = 0.$$

Se trata de un cono.

18.7. Una curva plana

Averiguar si es plana la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = t,\ y = \frac{t^2 + t + 2}{t},\ z = \frac{-t^2 - t + 3}{t} \quad (t > 0).$$

En caso afirmativo, hallar la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS de Ing. de Montes, UPM).

Solución. La curva es plana si y sólo si y existe un plano que la contiene es decir, si y sólo si existe un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ tal que

$$At + B\left(\frac{t^2 + t + 2}{t}\right) + \left(\frac{-t^2 - t + 3}{t}\right) + D = 0 \quad (\forall t > 0).$$

Multiplicando por t y agrupando términos semejantes obtenemos equivalentemente

$$(A + B - C)t^2 + (B - C + D)t + 2B + 3C = 0 \quad (\forall t > 0).$$

Las funciones $t^2, t, 1$ son linealmente independientes en el espacio de las funciones reales en $(0, +\infty)$ como fácilmente se puede demostrar, en consecuencia la igualdad anterior se verifica exclusivamente para los A, B, C, D que satisfacen el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} A + B - C = 0 \\ B - C + D = 0 \\ 2B + 3C = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $A = D,\ B = -3D/5,\ C = 2D/5,\ D = D$. Entonces, para todo $D \in \mathbb{R}$ se verifica $Dx - (3D/5)y + (2D/5)z + Dz = 0$. Si $D = 0$ no obtenemos ningún plano, si $D \neq 0$, dividiendo entre D y multiplicando por 5 obtenemos el plano

$$5x - 3y + 2z + 5 = 0.$$

Podemos por tanto concluir que la curva es plana y el plano que la contiene es $\pi \equiv 5x - 3y + 2z + 5 = 0$.

18.8. Miscelánea de superficies

1. Hallar la ecuación de la superficie que proyecta la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

desde el punto $V(0,0,c)$.

2. Dada la curva $C: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, determinar la superficie engendrada por las rectas tangentes en cada punto.

3. Hallar las ecuaciones de los cilindros que proyectan la hélice

$$C : x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t$$

paralelamente a los ejes de coordenadas.

4. Hallar la ecuación de la superficie reglada formada por todas las rectas que cortan ortogonalmente al eje OZ y se apoyan en la circunferencia

$$C : y^2 + z^2 = 1,\ x = 1.$$

5. Hallar la ecuación de un cono de revolución de vértice $V(1,1,1)$, eje $x = 2z - 1$, $y = z$ y ángulo de cada generatriz con el cono igual a $\pi/3$.

6. Una recta se mueve manteniéndose paralela al plano XOY y apoyándose en las rectas

$$r : \begin{cases} y = 2z \\ x = 3, \end{cases} \quad s : \begin{cases} y = -2z \\ x = 3. \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la superficie que engendra.

7. Determinar la superficie de traslación obtenida al desplazarse la recta $r :$ $x = y = z$ a lo largo de la curva $C : y = x^2$, $y = x^3$.

8. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la recta que se mueve apoyándose en las tres rectas

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -2 \\ z = -4 \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} y = -3 \\ z = 4. \end{cases}$$

Solución. 1. Las ecuaciones de las generatrices son

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = Z - c, \text{ o bien } \begin{cases} X = \lambda(Z - c) \\ Y = \mu(Z - c). \end{cases}$$

Obligando a que corten a la directriz,

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda^2(Z-c)^2}{a^2} + \dfrac{\mu^2(Z-c)^2}{b^2} = 1 \\ Z = 0. \end{cases}$$

Eliminando Z de entre las relaciones anteriores, obtenemos $\lambda^2 c^2/a^2+\mu^2 c^2/b^2 = 1$. Sustituyendo por sus valores y simplificando obtenemos la ecuación del cono,

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{(Z-c)^2}{c^2}=0.$$

2. El vector tangente a la curva en cada punto $P\left(t,t^2,t^3\right)$ es $v=\left(1,2t,3t^2\right)$. Las ecuaciones paramétricas de la superficie S pedida son

$$\begin{cases} X=t+\lambda \\ Y=t^2+2\lambda t \\ Z=t^3+3\lambda t^2. \end{cases}$$

3. Un vector paralelo al eje OZ es $(0,0,1)$, por tanto, las ecuaciones paramétricas del cilindro que proyecta C sobre el eje OZ son

$$\begin{cases} X=\cos t \\ Y=\operatorname{sen} t \\ Z=t+\lambda. \end{cases}$$

Eliminando t y λ, obtenemos $X^2+Y^2=1$.

Un vector paralelo al eje OY es $(0,1,0)$, por tanto, las ecuaciones paramétricas del cilindro que proyecta C sobre el eje OY son

$$\begin{cases} X=\cos t \\ Y=\lambda+\operatorname{sen} t \\ Z=t. \end{cases}$$

Eliminando t y λ, obtenemos $X-\cos Z=0$. De manera análoga obtenemos el tercer cilindro: $Y-\cos Z=0$.

4. Las rectas que cortan ortogonalmente al eje OZ son $Y=\lambda X,\ Z=\mu$. Obligando a que corten a C,

$$\begin{cases} \lambda^2X^2+\mu^2=1 \\ X=1. \end{cases}$$

Eliminando X obtenemos la relación $\lambda^2+\mu^2=1$ y sustituyendo por sus valores $\lambda=Y/X$ y $\mu=Z$ obtenemos la superficie pedida,

$$Y^2+X^2\left(Z^2-1\right)=0.$$

5. Las rectas que pasan por $V(1,1,1)$ son de la forma

$$\frac{X-1}{\lambda}=\frac{Y-1}{\mu}=\frac{Z-1}{1}.$$

Un vector de dirección del eje es $u=(2,1,1)$ y uno de las generatrices, $v=(\lambda,\mu,1)$. Obligando a que formen un ángulo de $\pi/3$,

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2\lambda+\mu+1}{\sqrt{6}\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando,

$$5\lambda^2-\mu^2+8\lambda\mu+8\lambda+4\mu-1=0.$$

Sustituyendo $\lambda=(X-1)/(Z-1)$, $\mu=(Y-1)/(Z-1)$ y simplificando obtenemos la ecuación del cono:

$$5X^2-Y^2-Z^2+8XY+8XZ+4YZ-26X-10Y-10Z+23=0.$$

6. Las ecuaciones de las rectas paralelas al plano XOY y que se apoyan en r son

$$\begin{cases}Z=\lambda\\X-3+\mu(Y-2Z)=0.\end{cases}$$

Obligando a que corten a s,

$$\begin{cases}Z=\lambda\\-6-4\mu Z=0.\end{cases}$$

Eliminando Z queda $2\lambda\mu+3=0$. Sustituyendo $\lambda=Z$ y $\mu=(X-3)/(2Z-Y)$ queda

$$2XZ-3Y=0.$$

7. Las ecuaciones paramétricas de r y C son

$$r:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t,\end{cases}\qquad C:\begin{cases}x=u\\y=u^2\\z=u^3.\end{cases}$$

Un punto común es el origen, por tanto la superficie de traslación pedida es

$$S:\begin{cases}X=t+u\\Y=t+u^2\\Z=t+u^3.\end{cases}$$

Eliminemos parámetros. Tenemos

$$\begin{cases} Y - X = u^2 - u = u(u-1) \\ Z - Y = u^3 - u^2 = u^2(u-1) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{Z-Y}{Y-X}.$$

Usando que $t = X - u$ y sustituyendo en la segunda ecuación de $S:$

$$Y = X - \frac{Z-Y}{Y-X} + \frac{(Z-Y)^2}{(Y-X)^2},$$

y simplificando obtenemos

$$S : (Y-X)^2(Z-X) - (Z-Y)^2 = 0.$$

8. Rectas que se apoyan en r_1 y r_2

$$r : \begin{cases} X - 2 + \lambda(Y-3) = 0 \\ X + 2 + \mu(Z+4) = 0 \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Obliguemos a que corten a r_3. Sustituyendo $Y = -3$, $Z = 4$,

$$\begin{cases} X - 2 - 6\lambda = 0 \\ X + 2 + 8\mu = 0. \end{cases}$$

Eliminando X obtenemos $3\lambda + 4\mu + 2 = 0$, que es la relación que han de cumplir las rectas r para que pertenezcan a la superficie. Sustituyendo en esta relación λ y μ por sus valores,

$$-3 \cdot \frac{X-2}{Y-3} - 4 \cdot \frac{X+2}{Z+4} + 2 = 0.$$

Operando, obtenemos la ecuación de la superficie pedida:

$$2(Y-3)(Z+4) - 3(X-2)(Z+4) - 4(X+2)(Y-3) = 0.$$

Capítulo 19

Programación lineal

19.1. Método del simplex

1. Hallar el máximo de la función $z = 2x_1 + x_2$ con las restricciones

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Hallar el máximo de la función $z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3$ con las restricciones

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

3. Hallar el mínimo de la función $z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3$ con las restricciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

4. Minimizar la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4$ bajo las restricciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 6 \\ x_i \geq 0\ \ (i = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

Solución. 1. Introducimos las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 3, 4)$ y expresamos el problema en forma estándar:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + z = 0 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

Expresemos el problema en forma matricial escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_4, z$ y los términos constantes

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 0, 10, 5)^t$, para la cual $z = 0$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i correspondientes a la última fila. Eliminemos el menor coeficiente negativo es decir, -2. Como $3/10 > 1/5$ elegimos como pivote $a_{11} = 3$ y fabricamos ceros en la primera columna:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|c} \boxed{1} & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 10/3 \\ 1 & 3 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|c} \boxed{1} & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 10/3 \\ 0 & 7/3 & -1/3 & \boxed{1} & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1 & 20/3 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (10/3, 0, 0, 5/3)^t$, para la cual $z = 20/3$. La solución es máxima al no existir coeficientes negativos para las x_i correspondientes a la última fila. Por tanto,

$$z_{\max}\left(\frac{10}{3}, 0\right) = \frac{20}{3}.$$

2. ntroducimos las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 4, 5, 6)$ y expresamos el problema en forma estándar, escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_6, z$ y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 3 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 15 \\ -8 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0,0,0,7,6,15)^t$, para la cual $z = 0$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el menor coeficiente negativo es decir, -8. Como $2/7 > 1/6 > 2/45$, elegimos como pivote $a_{11} = 2$ y fabricamos ceros es la primera columna:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 7/2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 15 \\ -8 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (7/2,0,0,0,5/2,8)^t$, para la cual $z = 28$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el único coeficiente negativo es decir, -2. Como $3/5 > 2/8 > 1/7$, elegimos como pivote $a_{23} = 3/2$ y fabricamos ceros es la tercera columna:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & -1/3 & \boxed{1} & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 5/3 & 0 & 1/2 & 2/3 & 0 & 0 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & \boxed{1} & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -1/3 & -4/3 & \boxed{1} & 0 & 14/3 \\ 0 & 22/3 & 0 & 10/3 & 4/3 & 0 & 1 & 94/3 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (8/3,0,5/3,0,0,14/3)^t$, para la cual $z = 94/3$. La solución es máxima al no existir coeficientes negativos para las x_i en la última fila. Por tanto,

$$z_{\max}\left(\frac{8}{3},0,\frac{5}{3}\right) = \frac{94}{3}.$$

3. Hallemos el máximo de la función $z' = -z = -4x_1 - 8x_2 - 3x_3$. Introducimos las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 4,5)$ y expresamos el problema en forma estándar, escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_5, z'$ y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Encontremos una solución factible básica. Elegimos como pivote el elemento $a_{11} = 1$ y fabricamos ceros en la primera columna

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right].$$

Tomamos ahora como pivote el elemento $a_{33} = 1$ y fabricamos ceros en la tercera columna

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 3 & 1 & -23 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (2, 0, 5, 0, 0)^t$, para la cual $z' = -23$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el coeficiente negativo de la última fila. Como $1/2 > 2/5$, tomamos el elemento $a_{12} = 1$ como pivote y fabricamos ceros en la segunda columna

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -19 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 2, 1, 0, 0)^t$, para la cual $z' = -19$. La solución es máxima al no existir coeficiente negativos para las x_i en la última fila. En consecuencia,

$$z'_{\max}(0, 2, 1) = -19, \text{ o bien } z_{\min}(0, 2, 1) = 19.$$

4. Hallemos el máximo de la función $z = -f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Introducimos las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 5, 6, 7)$ y expresamos el problema en forma estándar, escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_7, z$ y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 0, 0, 0, 8, 5, 6)^t$, para la cual $z = 0$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el coeficiente negativo de la última fila. Como

$3/5 > 1/6$, tomamos el elemento $a_{22} = 6$ como pivote y fabricamos ceros en la segunda columna

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 2/3 & \boxed{1} & -1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 7/3 & 0 & 1/3 & 13/3 & \boxed{1} & 2/3 & 0 & 0 & 34/3 \\ 2/3 & \boxed{1} & -1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 5/3 \\ 1/3 & 0 & -8/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & \boxed{1} & 0 & 13/3 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 5/3, 0, 0, 34/3, 0, 13/3)^t$, para la cual $z = 10$. La solución es máxima al no existir coeficientes negativos para las x_i en la última fila. Por tanto,

$$z_{\max}\left(0, \frac{5}{3}, 0, 0\right) = 10. \text{ o bien } \ f_{\min}\left(0, \frac{5}{3}, 0, 0\right) = -10.$$

19.2. Máximo de una integral por el método del simplex

Hallar el valor máximo de la integral

$$I = \int_0^1 x^2 p\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

entre todos los polinomios de grado menor o igual que 2 de coeficientes no negativos y que cumplen $p(1) \leq 2$ y $p'(1) \leq 3$.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. Todo polinomio de grado menor o igual que dos es de la forma $p(x) = x_1 + x_2 x + x_3 x^2$ con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Hallemos explícitamente la integral:

$$I = \int_0^1 x^2 \left(x_1 + \frac{x_1}{x} + \frac{x_3}{x^2}\right) dx = \int_0^1 (x_1 x^2 + x_2 x + x_3) dx$$

$$= \left[\frac{x_1 x^3}{3} + \frac{x_2 x^2}{2} + x_3 x\right]_0^1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3.$$

La condición $p(1) \leq 2$ equivale a $x_1+x_2+x_3 \leq 2$ y $p'(1) \leq 3$ a $x_2+2x_3 \leq 3$. Queda pues planteado el problema de programación lineal consistente en maximizar la función $I = x_1/3 + x_2/3 + x_3$ sometida a las restricciones

$$\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{matrix}\right.$$

Introducimos las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 4, 5)$ y expresamos el problema en forma estándar:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, 5) \end{matrix}\right.$$

Expresemos el problema en forma matricial escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_5, I$ y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -1/3 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 0, 0, 2, 3)$, para la cual $I = 0$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i. Eliminemos el menor coeficiente negativo es decir, -1. Como $2/3 > 1/2$, elegimos como pivote $a_{23} = 2$ y fabricamos ceros es la tercera columna:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/3 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1/2 & 0 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 0, 3/2, 1/2, 0)$, para la cual $I = 3/2$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i. Eliminemos el único coeficiente negativo es decir, $-1/3$. Como $1/(1/2) > 0/(3/2)$ elegimos como pivote $a_{11} = 1$ y fabricamos ceros es la primera columna:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} \boxed{1} & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 & 5/3 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (1/2, 0, 3/2, 0, 0)$, para la cual $I = 5/3$. La solución es máxima al no existir coeficientes negativos para las x_i. Es decir,

$$I_{\text{máx}}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2\right)=\frac{5}{3}.$$

19.3. Método del simplex. Aplicación

En el proceso semanal de fabricación de una empresa se producen $43, 46$ y 42 Tm de unas substancias S_1, S_2, S_3 que no se pueden venderse directamente al mercado, pero permiten obtener unos productos P_1, P_2, P_3 que reportan unos beneficios unitarios de $3, 5, 2$ respectivamente. Para cada Tm de P_1 se necesitan $1, 3$ y 1 Tm de S_1, S_2, S_3 respectivamente y análogamente $1, 2, 0$ por Tm de P_2 y $2, 0, 4$ por Tm de P_3. Se pide:

(a) Plantear y resolver un problema de programación lineal para organizar la producción de P_1, P_2, P_3 de manera que se maximicen los beneficios.
(b) Para evitar la contaminación existen disposiciones legales que obligan a consumir cada semana la totalidad de la substancia S_3 producida. Calcular la pérdida de beneficios que el cumplimiento de dichas disposiciones supone para la empresa.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Expresemos el problema en forma matricial escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de $x_1, \ldots, x_6, z$ y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 43 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 46 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 42 \\ -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 0, 0, 43, 46, 42)^t$, para la cual $z = 0$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el menor coeficiente negativo es decir, -5. Como $2/46 > 1/46 > 0/42$ elegimos como pivote $a_{22} = 2$ y fabricamos ceros es la segunda columna:

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 43 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 23 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 42 \\ -3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1/2 & 0 & 2 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 0 & 20 \\ 3/2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 23 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 42 \\ 9/2 & 0 & -2 & 0 & 5/2 & 0 & 1 & 115 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 23, 0, 20, 0, 42)^t$, para la cual $z = 115$. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las x_i en la última fila. Eliminemos el único coeficiente negativo es decir, -2. Como $2/20 > 4/42 > 0/23$ elegimos como pivote $a_{13} = 2$ y fabricamos ceros es la primera columna:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1/4 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 & 10 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 23 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 42 \\ 9/2 & 0 & -2 & 0 & 5/2 & 0 & 1 & 115 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1/4 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 & 10 \\ 3/2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 23 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 135 \end{array}\right].$$

Una solución factible básica es $x = (0, 23, 10, 0, 0, 2)^t$, para la cual $z = 135$. La solución es máxima al no existir coeficientes negativos para las x_i en la última fila. En consecuencia, se optimizan los beneficios fabricando 0 Tm de P_1 , 23 Tm de P_2 y 10 Tm de P_3, siendo el beneficio máximo de 135.

(b) Basta imponer que $2x_1 + 4x_3 = 42$. Despejando obtenemos $x_1 = 21 - 2x_3$ con lo cual el problema se reduce a usar el método gráfico en el plano x_2x_3.

19.4. Aprovechamiento de un monte

Un monte de 100 Has se puede destinar a producción maderera y/o ganadera. La producción maderera se puede realizar con chopos que producen 10000 u.m. (unidades monetarias)/Ha año. La producción ganadera se basa en el aprovechamiento de la hierba y las hojas de los fresnos. La hierba de las zonas sin arbolado puede mantener 50 cabezas de ganado/Ha salvo en los meses de Julio y Agosto que no pueden mantener ninguna.

Las zonas arboladas sólo pueden mantener un 80 por ciento de dicho número de cabezas en cuanto a hierba. En los meses de Julio y Agosto las hojas de una Ha de fresnos pueden alimentar 100 cabezas de ganado. La alimentación del ganado, sólo puede realizarse con los recursos indicados.

La cabeza de ganado produce una renta de 1,000 u.m./año. Se desea plantear el aprovechamiento del monte de manera que la renta anual sea máxima. Para ello:

(a) Designar las variables del problema. Plantear las condiciones del sistema y la función objetivo.
(b) Expresar el problema en forma estándar o normalizado, añadiendo las variables de holgura necesarias. Encontrar una solución factible básica con variables básicas las de holgura y la superficie poblada por chopos.
(c) Proseguir por el método del simplex hasta encontrar la solución óptima.

(Propuesto en examen, Álgebra, ETS Ing. de Montes, UPM).

Solución. (a) Denotemos por

$$\begin{aligned} H &: \text{ superficie de hierba sin arbolado.} \\ C &: \text{ superficie de chopos.} \\ F &: \text{ superficie de fresnos.} \\ G &: \text{ número de cabezas de ganado.} \end{aligned}$$

De las condiciones dadas,

$$\begin{cases} G \leq 50H + 40C + 40F \\ G \leq 100F \quad \text{(Julio y Agosto)} \\ H + C + F \leq 100 \\ H \geq 0,\ C \geq 0,\ F \geq 0,\ G \geq 0, \end{cases}$$

y la función objetivo a maximizar es $z = 10{,}000C + 1{,}000G$.

(b) Añadiendo las variables de holgura $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$,

$$\begin{cases} C + F + H + x_1 = 100 \\ -40C - 40F - 50H + x_2 = 0 \\ -100F + G + x_3 = 0 \\ -10{,}000C - 1{,}000G + z = 0. \end{cases}$$

Expresemos el problema en forma matricial escribiendo ordenadamente en filas los coeficientes de C, F, H, G, x_1, x_2, x_3, z y los términos constantes:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} C & F & H & G & x_1 & x_2 & x_3 & z & b \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ -40 & -40 & -50 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -10{,}000 & 0 & 0 & -1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 + 40F_1 \\ F_4 + 10{,}000F_1 \end{array}$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccccccc|c}
C & F & H & G & x_1 & x_2 & x_3 & z & b \\
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & -10 & 1 & 40 & \boxed{1} & 0 & 0 & 4{,}000 \\
0 & -100 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
0 & 10{,}000 & 10{,}000 & -1{,}000 & 10{,}000 & 0 & 0 & 1 & 1{,}000{,}000
\end{array}\right]
$$

Una solución factible básica es $(100, 0, 0, 0, 0, 4{,}000, 0)^t$, para la cual $z =$ 1,000,000. La solución no es máxima al existir algún coeficiente negativo para las variables en la última fila.

(c) Seguimos con el método del simplex. Fabricando ceros en la columna de G,

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
C & F & H & G & x_1 & x_2 & x_3 & z & b \\
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 100 & -10 & 0 & 40 & \boxed{1} & -1 & 0 & 4{,}000 \\
0 & -100 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -90{,}000 & 10{,}000 & 0 & 10{,}000 & 0 & 1{,}000 & 1 & 1{,}000{,}000
\end{array}\right]
$$

Multiplicando por 1/100 a la segunda fila,

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
C & F & H & G & x_1 & x_2 & x_3 & z & b \\
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & \boxed{1} & -1/10 & 0 & 2/5 & 1/100 & -1/100 & 0 & 40 \\
0 & -100 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -90{,}000 & 10{,}000 & 0 & 10{,}000 & 0 & 1{,}000 & 1 & 1{,}000{,}000
\end{array}\right]
$$

Fabricando ceros en la columna de F,

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
C & F & H & G & x_1 & x_2 & x_3 & z & b \\
\boxed{1} & 0 & 11/10 & 0 & 3/5 & -1/100 & 1/100 & 0 & 60 \\
0 & \boxed{1} & -1/10 & 0 & 2/5 & 1/100 & -1/100 & 0 & 40 \\
0 & 0 & -10 & \boxed{1} & 40 & 1 & 0 & 0 & 4{,}000 \\
0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 46{,}000 & 900 & 100 & 1 & 4{,}600{,}000
\end{array}\right]
$$

Una solución factible básica es

$$(C, F, H, G, x_1, x_2, x_3)^t = (60, 40, 0, 4{,}000, 0, 0, 0)^t.$$

para la cual $z = 4{,}600{,}000$. La solución es máxima debido a la ausencia de coeficientes negativos para las variables en la última fila. Es decir, el mejor aprovechamiento del monte se obtiene con 60 Has de chopos, 40 Has de fresnos y con 4,000 cabezas de ganado, siendo el beneficio máximo de 4,600,000 u.m.