

# PROBLEMAS RESUELTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

**Fernando Revilla Jiménez**  
<http://www.fernandorevilla.es>

© PROBLEMAS RESUELTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO por Fernando Revilla Jiménez se distribuye bajo la licencia:  
Creative Commons [Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

# Prólogo

Los contenidos de éste libro corresponden a parte de mi labor docente hasta el curso académico 2008/2009 como

- (a) Profesor de Álgebra, Cálculo, Variable compleja y Ecuaciones diferenciales para Ingenierías y Facultades del distrito universitario de Madrid y que fueron impartidos en academias de enseñanza universitaria
- (b) Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de Madrid.
- (c) Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Madrid.

Dado que todos los problemas vienen resueltos, y en aras a la efectividad en el trabajo, se recomienda al lector que los trabaje previamente.

Madrid, a 24 de agosto de 2015.



# Índice de problemas

<b>1. Método de inducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del método . . . . .	1
1.2. Derivada enésima de la función seno . . . . .	5
1.3. Desigualdad de Bernoulli . . . . .	6
1.4. Binomio de Newton . . . . .	7
<b>2. Sucesiones de números reales</b>	<b>9</b>
2.1. Concepto de sucesión . . . . .	9
2.2. Límite de una sucesión . . . . .	10
2.3. Propiedades de los límites (1) . . . . .	13
2.4. Propiedades de los límites (2) . . . . .	16
2.5. Subsucesiones . . . . .	20
2.6. Sucesiones monótonas . . . . .	21
2.7. Límites infinitos . . . . .	23
2.8. Criterios de Stolz y de las medias aritmética y geométrica . .	25
2.9. Miscelánea de sucesiones (1) . . . . .	27
2.10. Miscelánea de sucesiones (2) . . . . .	30
2.11. Familia de sucesiones recurrentes . . . . .	32
2.12. Sucesión recurrente con límite raíz de 2 . . . . .	34
<b>3. Continuidad en una variable</b>	<b>37</b>
3.1. Concepto de continuidad, primeras propiedades . . . . .	37
3.2. Continuidad de las funciones elementales . . . . .	38
3.3. Continuidad de las funciones no elementales . . . . .	40
3.4. Continuidad en intervalos . . . . .	43
3.5. Continuidad uniforme . . . . .	46
3.6. Miscelánea de continuidad . . . . .	48
3.7. Funciones $f$ -continuas . . . . .	51
<b>4. Derivadas</b>	<b>53</b>
4.1. Concepto de derivada . . . . .	53

4.2.	Álgebra de derivadas . . . . .	56
4.3.	Derivación de funciones algebraicas . . . . .	59
4.4.	Derivación de funciones trigonométricas y circulares inversas . . . . .	60
4.5.	Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas . . . . .	62
4.6.	Derivación de funciones hiperbólicas . . . . .	63
4.7.	Derivación de funciones hiperbólicas inversas . . . . .	64
4.8.	Derivación de funciones compuestas, regla de la cadena . . . . .	65
4.9.	Derivación por fórmulas . . . . .	66
4.10.	Teorema de la función inversa . . . . .	69
4.11.	Derivada de $(g \circ f^{-1})'(6)$ . . . . .	72
4.12.	Derivada logarítmica . . . . .	73
4.13.	Derivadas de órdenes superiores . . . . .	75
4.14.	Fórmula de Leibniz de la derivada enésima . . . . .	79
4.15.	Aplicaciones geométricas de la derivada . . . . .	82
4.16.	Aplicaciones físicas de la derivada . . . . .	84
4.17.	Derivadas infinitas y laterales . . . . .	84
4.18.	Derivación de funciones implícitas . . . . .	88
4.19.	Diferencial de una función . . . . .	89
4.20.	Derivabilidad según parámetros . . . . .	91
4.21.	Familia de funciones de clase 1 . . . . .	93
4.22.	Desigualdad y número de raíces . . . . .	94
4.23.	Derivada simétrica . . . . .	95
4.24.	Derivabilidad absoluta . . . . .	97
4.25.	Ecuación diferencial y fórmula de Leibniz . . . . .	99
<b>5.</b>	<b>Teoremas del valor medio</b> . . . . .	<b>101</b>
5.1.	Teorema de Rolle . . . . .	101
5.2.	Teorema de Lagrange . . . . .	104
5.3.	Teorema del valor medio de Cauchy . . . . .	108
5.4.	Una aplicación del teorema de Rolle . . . . .	109
5.5.	Diámetro de un subconjunto de $\mathbb{R}$ . . . . .	110
5.6.	Límite de las raíces de $p_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1$ . . . . .	111
<b>6.</b>	<b>Fórmula de Taylor</b> . . . . .	<b>115</b>
6.1.	Polinomio de Taylor . . . . .	115
6.2.	Fórmula de Taylor . . . . .	117
6.3.	Aproximación de funciones por polinomios . . . . .	119
6.4.	La notación $o$ minúscula de Landau . . . . .	125
6.5.	Fórmula de Taylor con $o$ minúscula, cálculo de límites . . . . .	126
6.6.	Una aplicación de la fórmula de Taylor . . . . .	128
6.7.	Una aproximación racional de la raíz de 5 . . . . .	130

<b>7. Regla de L'Hôpital</b>	<b>133</b>
7.1. Límites de funciones por la definición . . . . .	133
7.2. Concepto de indeterminación . . . . .	136
7.3. Regla de L'Hôpital para $0/0$ . . . . .	137
7.4. Distintas formas indeterminadas . . . . .	139
7.5. Problemas diversos (1) . . . . .	140
7.6. Problemas diversos (2) . . . . .	142
<b>8. Integrales indefinidas</b>	<b>145</b>
8.1. Integral de la función potencial . . . . .	145
8.2. Integrales inmediatas . . . . .	147
8.3. Integrales por sustitución o cambio de variable . . . . .	149
8.4. Integración por partes . . . . .	151
8.5. Integración de funciones racionales (1) . . . . .	156
8.6. Integración de funciones racionales (2) . . . . .	159
8.7. Integración de funciones racionales (3) . . . . .	160
8.8. Integración de funciones racionales, método de Hermite (4) . . . . .	162
8.9. Integración de funciones irracionales (1) . . . . .	166
8.10. Integración de funciones irracionales (2) . . . . .	167
8.11. Integración de funciones irracionales (3) . . . . .	170
8.12. Integración de funciones irracionales (4) . . . . .	173
8.13. Integración de diferenciales binomias . . . . .	174
8.14. Integración de funciones trigonométricas (1) . . . . .	176
8.15. Integración de funciones trigonométricas (2) . . . . .	178
8.16. Integración de funciones trigonométricas (3) . . . . .	180
8.17. Integración de funciones trigonométricas (4) . . . . .	182
8.18. Integración de funciones hiperbólicas . . . . .	184
8.19. Miscelánea (1) . . . . .	186
8.20. Miscelánea (2) . . . . .	189
<b>9. Integrales definidas</b>	<b>193</b>
9.1. Integral definida como límite de sumas . . . . .	193
9.2. Cálculo de límites de sucesiones mediante integrales . . . . .	195
9.3. Teorema fundamental del Cálculo . . . . .	197
9.4. Regla de Barrow . . . . .	198
9.5. Miscelánea . . . . .	200
9.6. Cotas de la longitud de una elipse . . . . .	202
9.7. Pi es irracional . . . . .	205
9.8. Fórmula de Wallis . . . . .	207
9.9. Concepto de integral impropia en intervalos infinitos . . . . .	208
9.10. Criterios de convergencia . . . . .	216

9.11. Criterio de Cauchy para integrales impropias en intervalos infinitos . . . . .	221
9.12. Convergencia de las integrales de Fresnel . . . . .	221
9.13. Convergencia absoluta en intervalos infinitos . . . . .	222
9.14. Valor principal de Cauchy de una integral impropia . . . . .	224
9.15. Integrales impropias en intervalos finitos . . . . .	225
9.16. Función Gamma de Euler . . . . .	230
9.17. Integral mediante las Gamma y Beta de Euler . . . . .	233
9.18. Convolución de dos campanas de Gauss . . . . .	234
9.19. Integral de Euler-Poisson . . . . .	236
9.20. Una integral por derivación paramétrica (1) . . . . .	238
9.21. Una integral por derivación paramétrica (2) . . . . .	239
9.22. Integral de Gauss o de probabilidades . . . . .	240
9.23. Derivación paramétrica y límite . . . . .	242
<b>10. Series numéricas reales</b>	<b>245</b>
10.1. Concepto de serie numérica real . . . . .	245
10.2. Convergencia y divergencia de series numéricas . . . . .	246
10.3. Esquemas de asociación de series . . . . .	249
10.4. Serie geométrica . . . . .	250
10.5. Álgebra de series . . . . .	252
10.6. Series de términos positivos . . . . .	252
10.7. Series absolutamente convergentes . . . . .	256
10.8. Criterios de la raíz, cociente y Raabe . . . . .	257
10.9. Criterio integral . . . . .	263
10.10. Convergencia de las series de Riemann . . . . .	265
10.11. Series alternadas, criterio de Leibniz . . . . .	266
10.12. Series telescópicas . . . . .	270
10.13. Series hipergeométricas . . . . .	276
10.14. Series aritmético-geométricas . . . . .	279
10.15. Series con factoriales en el denominador . . . . .	281
10.16. Suma de series numéricas por desarrollos en serie de funciones	283
10.17. El número $e$ es irracional . . . . .	285
10.18. Suma de una serie a partir de la de Basilea . . . . .	287
10.19. Producto de Cauchy de series, contraejemplo . . . . .	288
<b>11. Series funcionales</b>	<b>291</b>
11.1. Límite puntual . . . . .	291
11.2. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones . . . . .	292
11.3. Teorema de Dini . . . . .	297
11.4. Series uniformemente convergentes. Criterio de Weierstrass .	298
11.5. Series enteras o de potencias, radio de convergencia . . . . .	301



11.6. Derivación e integración de series enteras . . . . .	305
11.7. Suma de series enteras por derivación o integración . . . . .	307
11.8. Serie de Maclaurin . . . . .	310
11.9. Desarrollos en serie de Maclaurin de las funciones habituales . . . . .	311
11.10. Función suave pero no analítica . . . . .	317
11.11. Convergencia uniforme en un intervalo no acotado . . . . .	319
11.12. Sucesión de Fibonacci . . . . .	321
11.13. Función exponencial real . . . . .	323
11.14. Sucesión funcional con límite $\Gamma(x)$ . . . . .	325

**12. Análisis multivariable 329**

12.1. Límites reiterados, contraejemplo . . . . .	329
12.2. Continuidad y derivadas direccionales . . . . .	329
12.3. Diferenciabilidad en varias variables . . . . .	330
12.4. Una derivada direccional máxima . . . . .	337
12.5. Diferencial de una composición . . . . .	337
12.6. Puntos de discontinuidad, compacidad . . . . .	339
12.7. Funciones homogéneas, teorema de Euler . . . . .	340
12.8. Invertibilidad local y teorema fundamental del Cálculo . . . . .	341
12.9. Invertibilidad local con series de potencias . . . . .	342
12.10. Teorema de la función implícita (en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) . . . . .	344
12.11. Función implícita con teorema fundamental del Cálculo . . . . .	346
12.12. Teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . . . . .	346
12.13. Puntos críticos: casos dudosos . . . . .	350
12.14. Puntos críticos de $f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$ . . . . .	353
12.15. Máximos y mínimos condicionados, multiplicadores de Lagrange . . . . .	354
12.16. Paralelepípedo inscrito en un elipsoide . . . . .	358
12.17. Extremos absolutos sobre compactos . . . . .	359
12.18. Puntos críticos de $g(x, y) = p(f(x)) + p(f(y))$ . . . . .	362
12.19. Extremos locales de una integral biparamétrica . . . . .	365
12.20. Continuidad uniforme y teorema de Tychonoff . . . . .	366
12.21. Integral doble como producto de simples . . . . .	367
12.22. Integral en el cubo unidad . . . . .	369
12.23. Integral de superficie de una función homogénea . . . . .	369
12.24. Integral doble impropia por un cambio ortogonal . . . . .	371
12.25. Integral doble impropia con parámetros . . . . .	372
12.26. Teoremas de Stokes y Gauss: comprobación . . . . .	374
12.27. Flujo y circulación de un campo . . . . .	376
12.28. Centro de gravedad de una esfera . . . . .	378
12.29. Móviles sobre dos circunferencias . . . . .	380
12.30. Circulación de un campo y producto mixto . . . . .	381

12.31. Potencial de un campo con función homogénea . . . . .	382
12.32. Un campo gradiente . . . . .	384
<b>13. Espacios normados</b>	<b>387</b>
13.1. Norma, espacio normado . . . . .	387
13.2. Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski . . . . .	391
13.3. Normas $p$ . . . . .	393
13.4. Distancia inducida por la norma . . . . .	394
13.5. La distancia es uniformemente continua . . . . .	397
13.6. Series en espacios normados . . . . .	398
13.7. Normas equivalentes . . . . .	400
13.8. Normas no equivalentes . . . . .	402
13.9. Propiedades topológicas en los espacios normados . . . . .	403
13.10. Aplicaciones lineales continuas entre espacios normados . . .	406
13.11. Una aplicación lineal discontinua . . . . .	408
13.12. Espacios normados de dimensión finita . . . . .	409
13.13. Teorema de Riesz . . . . .	411
13.14. Norma de una aplicación lineal y continua . . . . .	413
13.15. Diferenciabilidad entre espacios de Banach . . . . .	416
13.16. Criterio de Dirichlet para la convergencia de series . . . . .	418
13.17. Criterio de Abel para la convergencia de series . . . . .	419
13.18. Espacio de funciones completo y no compacto . . . . .	421
13.19. Espacio de Banach con la norma del supremo . . . . .	422
13.20. Espacio de Banach $l^1(\mathbb{N})$ . . . . .	423
<b>14. Análisis complejo</b>	<b>425</b>
14.1. Proyección estereográfica . . . . .	425
14.2. Derivada compleja . . . . .	427
14.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	429
14.4. Función exponencial compleja . . . . .	430
14.5. Funciones trigonométricas complejas . . . . .	431
14.6. Funciones hiperbólicas complejas . . . . .	435
14.7. Logaritmo complejo . . . . .	439
14.8. Funciones armónicas . . . . .	442
14.9. Función armónica conjugada . . . . .	443
14.10. Familia de funciones armónicas . . . . .	444
14.11. Polinomio de Hurwitz . . . . .	445
14.12. Funciones holomorfas $f$ con $\operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = 1$ . . . . .	445
14.13. Principio del módulo máximo . . . . .	446
14.14. Lema de Schwarz . . . . .	448
14.15. Fórmulas integrales de Cauchy . . . . .	449
14.16. Teorema de Liouville, demostración . . . . .	450

14.17. Integral de $(\log z)^3 dz/z$ en un arco de circunferencia . . . . .	451
14.18. Integral $\int_T \bar{z}^2 dz$ sobre una curva de Jordan . . . . .	452
14.19. Integral $\int_0^{+\infty} (\cos x / \cosh x) dx$ por residuos . . . . .	453
14.20. Función holomorfa biperiódica . . . . .	455
14.21. Principio del argumento: ceros en $\operatorname{Re}(z) > 0$ . . . . .	457
14.22. Una integral con residuo en el punto del infinito . . . . .	458
14.23. Ceros de las funciones analíticas . . . . .	459
14.24. Series complejas: conceptos básicos . . . . .	462
14.25. Series complejas: criterios de la raíz y del cociente . . . . .	464
14.26. Series complejas enteras, radio de convergencia . . . . .	468
14.27. Fórmula de Cauchy-Hadamard . . . . .	470
14.28. Teorema de Pitágoras trigonométrico por series de potencias . . . . .	472
14.29. Ecuación funcional compleja . . . . .	474
14.30. Desarrollo en serie de Laurent . . . . .	475
14.31. Serie de Laurent con parámetros . . . . .	478
14.32. Recurrente compleja por serie de potencias . . . . .	481
14.33. Suma de series por residuos . . . . .	484
14.34. Familia de racionales complejas . . . . .	489
14.35. Teorema de Rouché . . . . .	491
14.36. Función holomorfa: representación integral . . . . .	493
14.37. Integral $\int_0^{+\infty} x dx / ((1+x)^n - (1-x)^n)$ por residuos . . . . .	494
14.38. Una aplicación de las desigualdades de Cauchy . . . . .	497
14.39. Un problema de Dirichlet . . . . .	498
14.40. Integrales de Fresnel . . . . .	500
14.41. Límite de promedios en un polígono regular . . . . .	501
14.42. Fórmula integral de Cauchy y matriz exponencial . . . . .	504
14.43. Polinomio de Lagrange-Sylvester, representación integral . . . . .	505
14.44. Transformado de un polinomio complejo . . . . .	507
14.45. Área de una imagen del círculo unidad . . . . .	509
14.46. Relación entre dos integrales por residuos . . . . .	510
14.47. Una integral trigonométrica en $[0, \pi]$ . . . . .	512
14.48. Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{1-2a \cos t+a^2} dt$ . . . . .	514
14.49. Función entera y polinomio . . . . .	516
14.50. Integral $\int_0^{+\infty} x^n dx / (x^{2n+1} + 1)$ . . . . .	517
<b>15. Ecuaciones diferenciales de primer orden y grado</b> . . . . .	<b>521</b>
15.1. Concepto de ecuación diferencial ordinaria . . . . .	521
15.2. Construcción de ecuaciones diferenciales . . . . .	524
15.3. Ecuación diferencial de variables separadas . . . . .	526
15.4. Ecuación diferencial homogénea . . . . .	529
15.5. Ecuación diferencial con coeficientes lineales . . . . .	530
15.6. Ecuación diferencial exacta . . . . .	532

15.7. Factores integrantes . . . . .	534
15.8. Ecuación diferencial lineal . . . . .	539
15.9. Ecuación diferencial de Bernoulli . . . . .	544
15.10. Ecuación diferencial de Riccati . . . . .	546
15.11. Cambios de variable en las ecuaciones diferenciales . . . . .	548
15.12. Ecuación diferencial con paso a polares . . . . .	551
15.13. Máquina quitanieves . . . . .	552
15.14. Lineal, Bernoulli y Riccati . . . . .	553
<b>16. Transformadas de Laplace</b>	<b>557</b>
16.1. Concepto de transformada de Laplace . . . . .	557
16.2. Funciones de orden exponencial . . . . .	559
16.3. Existencia y linealidad de la transformada de Laplace . . . . .	559
16.4. Transformada de Laplace de las derivadas . . . . .	561
16.5. Propiedades de traslación de las transformadas de Laplace . . . . .	563
16.6. Derivadas de las transformadas de Laplace . . . . .	564
16.7. Transformada inversa de Laplace . . . . .	565
16.8. Convolución de dos funciones . . . . .	568
16.9. Resolución de ecuaciones y sistemas mediante transformadas de Laplace . . . . .	569
16.10. Miscelánea de transformadas de Laplace . . . . .	571
<b>17. Miscelánea de ecuaciones diferenciales</b>	<b>575</b>
17.1. Trayectorias ortogonales y oblicuas . . . . .	575
17.2. Ecuación de Clairaut . . . . .	576
17.3. Ecuación de Lagrange . . . . .	577
17.4. Ec. dif. lineal homogénea con coef. constantes (orden $n$ ) . . . . .	579
17.5. Ec. dif. lineal no homogénea con coef. constantes (orden $n$ ) . . . . .	582
17.6. Ecuación diferencial equivalente a un sistema . . . . .	585
17.7. Ecuación de Euler . . . . .	586
17.8. Independencia funcional . . . . .	588
17.9. Cálculo de la matriz exponencial . . . . .	589
17.10. Matriz exponencial e inversa de $I + tA$ . . . . .	593
17.11. Tres propiedades de la matriz exponencial . . . . .	595
17.12. Forma de Jordan asociada a una ecuación diferencial . . . . .	596
17.13. Sistemas diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes . . . . .	598
17.14. Sistemas diferenciales lineales no homogéneos con coeficientes constantes . . . . .	599
17.15. Soluciones acotadas de un sistema diferencial . . . . .	602
17.16. Polinomio de Taylor de una solución de una ecuación diferencial	603
17.17. Una ecuación en diferencias finitas . . . . .	604

17.18. Un sistema en diferencias finitas . . . . .	605
17.19. Ecuación diferencial por serie de potencias . . . . .	606
17.20. Teorema de existencia y unicidad de soluciones . . . . .	608
<b>18. Sistemas autónomos</b>	<b>611</b>
18.1. Concepto de sistema autónomo . . . . .	611
18.2. Concepto de solución de un sistema autónomo . . . . .	612
18.3. Resolución de sistemas diferenciales autónomos . . . . .	613
18.4. Sistema autónomo con paso a polares . . . . .	618
18.5. Sistema autónomo con paso a cilíndricas . . . . .	619
18.6. Sistema autónomo con paso a esféricas . . . . .	619
18.7. Cálculo de un difeomorfismo enderezante . . . . .	621
18.8. Estabilidad: método directo de Lyapunov . . . . .	623
18.9. Función de Liapunov y teorema de Poincaré . . . . .	624
18.10. Sistema autónomo: dibujo de una órbita . . . . .	626
18.11. Órbita con paso a polares . . . . .	627
18.12. Soluciones periódicas y órbita . . . . .	628
18.13. Tres órbitas en un conjunto de nivel . . . . .	629
18.14. Integral primera y órbita circular . . . . .	630
18.15. Estabilidad en el interior de una elipse . . . . .	631
18.16. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	632
18.17. Teorema de Bendixson-Dulac, órbitas cerradas . . . . .	635
18.18. Ecuación diferencial compleja . . . . .	636
18.19. Sistema autónomo: prolongación en el tiempo a un conjunto	638
18.20. Sistema gradiente y factor integrante . . . . .	639
18.21. Puntos atraídos por el origen en un sistema diferencial . . .	641



# Capítulo 1

## Método de inducción

### 1.1. Descripción del método

1. Demostrar por inducción:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Demostrar por inducción:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Demostrar por inducción:

$$1^2 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Demostrar por inducción:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1).$$

5. Demostrar por inducción:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

6. Demostrar por inducción:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

7. Demostrar por inducción que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

8. Demostrar por inducción que si  $u_n$  es la sucesión definida por

$$u_1 = 3, u_2 = 5, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

entonces,  $u_n = 2^n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Solución.** Recordamos que la inducción matemática es un método para demostrar que todos los números naturales  $1, 2, 3, \dots$  cumplen una determinada propiedad. Consta de dos pasos:

*Paso base.* Consiste en demostrar que el número 1 cumple la propiedad.

*Paso de inducción.* Se supone que la propiedad es verdadera para un cierto número  $n$  número natural arbitrario (hipótesis de inducción), y se demuestra que la propiedad es válida para el número siguiente  $n + 1$ .

Si se efectúan los dos pasos anteriores, se ha demostrado que la propiedad es válida para todos los números naturales  $1, 2, 3, \dots$ .

Un ejemplo comprensivo del método consiste en considerar una fila de fichas de dominó. Si demostramos: que se cae la primera ficha, y que si se cae una ficha (la ficha  $n$ ) se cae la siguiente (la ficha  $n + 1$ ), entonces hemos demostrado que se caen todas las fichas  $1, 2, 3, \dots$ .

1. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es 1 y el segundo,  $1(1+1)/2 = 1$ . Por tanto, la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea la fórmula cierta para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)[(n + 1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

2. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y el segundo,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Por tanto, la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea la fórmula cierta para  $n$ . Entonces:



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

3. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $1^2 = 1$  y el segundo:

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1.$$

Por tanto, la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea la fórmula cierta para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \quad (1) \end{aligned}$$

Nos interesa expresar el numerador como producto de tres factores, para ello factorizamos  $2n^2 + 7n + 6$ :

$$2n^2 + 7n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{4} = \{-3/2, -2\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2n^2 + 7n + 6 &= 2(n+2) \left( n + \frac{3}{2} \right) = (n+2)(2n+3) \\ &= [(n+1)+1][2(n+1)+1]. \quad (2) \end{aligned}$$

Combinando (1) y (2):

$$1^2 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

4. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $1 + r$  y el segundo:

$$\frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1+r)(1-r)}{1-r} = 1+r,$$

por tanto la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea cierta la fórmula para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

5. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1(1+1) = 2,$$

y el segundo:

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2,$$

por tanto la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea cierta la fórmula para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+1)(n+3)}{3} \\ &= \frac{[n+1][(n+1)+1][(n+1)+2]}{3}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

6. *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ , y el segundo

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1, \text{ por tanto la fórmula es cierta para } n = 1.$$

*Paso de inducción.* Sea cierta la fórmula para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \\ &= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

7. *Paso base.* Si  $n = 1$  el primer miembro de la desigualdad es  $1 + \frac{1}{2^1} = 1 + \frac{1}{2}$  y el segundo es  $1 + \frac{1}{2}$  de lo cual se deduce trivialmente que la desigualdad es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Supongamos que la fórmula es cierta para  $n$ . Veamos que es cierta para  $n + 1$ . Para  $n + 1$  el primer miembro es:

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Por hipótesis de inducción tenemos  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . Por otra parte

$$B = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (*)$$

En el segundo miembro de (\*) tenemos  $2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$  sumandos, en consecuencia  $B \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ . Es decir

$$A \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Por tanto, la desigualdad es válida para  $n + 1$ .

8. Claramente la fórmula es cierta para  $n = 1, 2$ . Si es cierta para todo  $k \leq n$ , entonces

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^n - 2^n + 1 = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1, \end{aligned}$$

lo cual implica que la fórmula es cierta para  $n + 1$ .

## 1.2. Derivada enésima de la función seno

Demostrar por inducción que si  $f(x) = \text{sen } x$  entonces

$$f^{(n)}(x) = \text{sen} \left( x + \frac{n\pi}{2} \right),$$

en donde  $f^{(n)}(x)$  representa la derivada enésima de  $f(x)$ .

**Solución.** Recordemos las fórmulas de trigonometría:

$$\begin{aligned} \text{sen}(a + b) &= \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b, \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b. \end{aligned}$$

De éstas fórmulas deducimos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ &= (\operatorname{sen}\alpha) \cdot 0 + (\cos\alpha) \cdot 1 = \cos\alpha. \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ &= (\cos\alpha) \cdot 0 + (\operatorname{sen}\alpha) \cdot 1 = \operatorname{sen}\alpha. \quad (2)\end{aligned}$$

Demostremos ahora la fórmula del enunciado:

*Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$ . Aplicando (1), obtenemos el segundo miembro:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{1 \cdot \pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Por tanto, la fórmula es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea cierta la fórmula para  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' \\ &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Aplicando (2) queda:

$$f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Es decir, la fórmula es válida para  $n + 1$ .

### 1.3. Desigualdad de Bernoulli

Demostrar por inducción que para cualquier número real  $x \geq -1$  y para todo entero  $n \geq 1$  se verifica  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (*Desigualdad de Bernoulli*).

**Solución.** *Paso base.* Para  $n = 1$ , el primer miembro es  $(1+x)^1 = 1+x$  y el segundo  $1+1x = 1+x$ , por tanto la desigualdad es cierta para  $n = 1$ .

*Paso de inducción.* Sea cierta la fórmula para  $n$  es decir, supongamos que

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ si } x \geq -1. \quad (*)$$

La condición  $x \geq -1$  equivale a  $1+x \geq 0$  así que podemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad de (\*) por  $1+x$  sin que cambie el sentido de ésta. Queda:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Dado que  $nx^2 \geq 0$ , se verifica  $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ , luego la fórmula es cierta para  $n+1$ .

## 1.4. Binomio de Newton

Sean  $a$  y  $b$  dos números reales. Demostrar por inducción que para todo  $n \geq 1$  entero, se verifica la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

**Solución.** *Paso base.* La fórmula es cierta para  $n=1$ . En efecto,

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k.$$

*Paso de inducción.* Supongamos que la fórmula es cierta para  $n$ , y veamos que es cierta para  $n+1$ . Se verifica:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \quad (*) \end{aligned}$$

El primer sumando de la línea (\*) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k. \end{aligned}$$

El segundo sumando de la línea (\*) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\ &\text{(haciendo el cambio } k = j-1 \text{):} \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $(a + b)^{n+1}$  es igual a:

$$\binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}.$$

Usando la conocida fórmula de combinatoria  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$  :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para  $n + 1$ .

## Capítulo 2

# Sucesiones de números reales

### 2.1. Concepto de sucesión

1. Dadas las sucesiones

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{3n - 2}, \quad b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{7 + (-1)^n},$$

hallar  $a_5$  y  $b_{12}$ .

2. Determinar en cada caso una sucesión  $a_n$  cuyos primeros términos son los que se indican:

$$(i) \frac{2}{-3}, \frac{7}{1}, \frac{12}{5}, \frac{17}{9}, \dots \quad (ii) -\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, -\frac{7}{13}, \frac{9}{17}, \dots$$

3. Determinar en cada caso una sucesión  $a_n$  cuyos primeros términos son los que se indican:

$$(i) 6, 12, 24, 48, \dots \quad (ii) 7, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{7}{8}, \dots$$

4. Determinar en cada caso una sucesión  $a_n$  cuyos primeros términos son los que se indican:

$$(i) 1, 3, 7, 15, 31, \dots \quad (ii) 3, 5, 9, 17, 33, \dots \quad (iii) 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

5. Una sucesión  $\{a_n\}$  satisface  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$  y la relación de recurrencia  $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$  para todo  $n \geq 3$ . Calcular  $a_4$ .

**Solución.** 1. Sustituyendo  $n = 5$  y  $n = 12$  en las correspondientes sucesiones:

$$a_5 = (-1)^6 \frac{5^2 + 1}{3 \cdot 5 - 2} = \frac{26}{13} = 2, \quad b_{12} = \frac{\sqrt{13}}{7 + (-1)^{12}} = \frac{\sqrt{13}}{8}.$$

2. (i) Los numeradores 2, 7, 12, 17 forma una progresión aritmética de diferencia  $d = 5$ , por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a'_n = 2 + 5(n - 1) = 5n - 3$ . Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia 4, por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a''_n = -3 + 4(n - 1) = 4n - 7$ . Es decir,

$$a_n = \frac{a'_n}{a''_n} = \frac{5n - 3}{4n - 7}.$$

(ii) Sin considerar el signo, los numeradores 3, 5, 7, 9 forma una progresión aritmética de diferencia  $d = 2$ , por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a'_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$ . Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia 3, por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a''_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4$ . Para ajustar el signo, multiplicamos por  $(-1)^n$ , es decir,

$$a_n = (-1)^n \frac{a'_n}{a''_n} = (-1)^n \frac{2n + 1}{3n + 4}.$$

3. (i) Los números 6, 12, 24, 48 forma una progresión geométrica de razón  $r = 2$ , por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$ .

(ii) Los números dados forma una progresión geométrica de razón  $r = -1/2$ , por tanto su término  $n$ -ésimo es  $a_n = 7 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1)^n \frac{7}{2^n}$ .

4. (i) Tenemos  $1 = 2^1 - 1$ ,  $3 = 2^2 - 1$ ,  $7 = 2^3 - 1$ ,  $15 = 2^4 - 1$ ,  $31 = 2^5 - 1$ . Por tanto, una sucesión cuyos primeros términos son los indicados es  $a_n = 2^n - 1$ .

(ii) Análogamente,  $3 = 2^1 + 1$ ,  $5 = 2^2 + 1$ ,  $9 = 2^3 + 1$ ,  $17 = 2^4 + 1$ ,  $33 = 2^5 + 1$ . Es decir,  $a_n = 2^n + 1$ .

(iii) Claramente, una sucesión cuyos primeros términos son los indicados es

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

5. Para  $n = 3$ , tenemos  $a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$ , es decir  $a_3 = 2a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$ .

Para  $n = 4$ , tenemos  $a_4 - 2a_3 + a_2 = 0$ , es decir  $a_4 = 2a_3 - a_2 = 10 - 3 = 7$ .

## 2.2. Límite de una sucesión

1. (i) Sea la sucesión  $a_n = \frac{3n}{2n + 1}$ . Demostrar que  $\lim a_n = \frac{3}{2}$ .

(ii) Hallar a partir de qué término la diferencia  $|a_n - 3/2|$  es menor que 0,001.

2. Demostrar que  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

3. Demostrar que  $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ .



4. Demostrar que  $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ .
5. Demostrar que  $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ .
6. Demostrar que si  $|q| < 1$ , entonces  $\lim q^n = 0$ .
7. Demostrar que la sucesión  $a_n = (-1)^n$  no tiene límite.
8. Demostrar que si una sucesión es convergente, tiene único límite.

**Solución.** En todo lo que sigue,  $n$  representa un número natural aunque no se diga de manera explícita. Recordemos que se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es *límite* de la sucesión de números reales  $\{a_n\}$  si, y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  con  $n$  natural, entonces  $|a_n - a| < \epsilon$ .

El que  $a$  sea límite de la sucesión  $\{a_n\}$  significa que los términos de la sucesión se aproximan al número  $a$ , *todo lo que queramos*. Esto es claro, pues por muy pequeño que sea  $\epsilon$ , siempre existe un número natural  $n_0$  a partir del cual todos los términos de la sucesión distan de  $a$  menos que  $\epsilon$ . Recuérdese que el valor absoluto de la diferencia de dos números representa la distancia entre ambos.

1. (i) Tenemos:

$$|a_n - 3/2| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3n}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{6n - 6n - 3}{4n+2} \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4n+2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < 4n+2 \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 2 < 4n \Leftrightarrow \frac{3}{4\epsilon} - \frac{1}{2} < n.$$

Es decir, para cualquier  $\epsilon > 0$ , si elegimos  $n_0$  número natural tal que  $n_0 > \frac{3}{4\epsilon} - \frac{1}{2}$ , entonces  $|a_n - 3/2| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ , por tanto  $\lim a_n = 3/2$ .

(ii) Para  $\epsilon = 0,001$  :

$$\frac{3}{4\epsilon} - \frac{1}{2} = \frac{3}{0,004} - 0,5 = 749,5$$

luego a partir del del término  $a_{750}$  ocurre  $|a_n - 3/2| < 0,001$ .

2. Tenemos

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n.$$

Es decir, para cualquier  $\epsilon > 0$ , si elegimos  $n_0$  número natural tal que  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ , entonces  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ . Hemos demostrado pues que  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

3. Si  $n \geq 1$ , entonces  $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ . Por el apartado anterior,  $\frac{1}{n} < \epsilon$  si  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , en consecuencia también ocurre  $\frac{1}{n^2} < \epsilon$  si  $n > \frac{1}{\epsilon}$ . Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .

También podríamos haber trabajado directamente sobre la sucesión dada:

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < n.$$

Es decir, para cualquier  $\epsilon > 0$ , si elegimos  $n_0$  número natural tal que  $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ , entonces  $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ , y por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .

4. Tenemos

$$\begin{aligned} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Entonces, para que ocurra  $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| < \epsilon$  basta que ocurra  $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$ , y esto último sucede para  $n > \frac{1}{4\epsilon^2}$ .

Elijiendo pues  $n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2}$ , se verifica  $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ .

5. Dado que  $3^n > n$ , para todo  $n \geq 1$  se verifica:

$$\left| \left( \frac{1}{3} \right)^n - 0 \right| = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}.$$

Elijamos un número natural  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ . Entonces, para todo  $n \geq n_0$ :

$$\left| \left( \frac{1}{3} \right)^n - 0 \right| = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon,$$

lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$ .

6. Sea  $\epsilon > 0$ . Si  $q = 0$ , el resultado es trivial. Sea pues  $|q| \neq 0$  y  $\epsilon > 0$ , entonces:

$$|q^n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \log |q| < \log \epsilon. \quad (*)$$

Dado que  $0 < |q| < 1$ , se verifica  $\log |q| < 0$  con lo cual la última desigualdad de (\*) equivale a  $n > \frac{\log \epsilon}{\log |q|}$ . Hemos demostrado que  $\lim q^n = 0$ .

7. Supongamos que  $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ . Entonces, tomando  $\epsilon = 1$ , existe un número natural  $n_0$  tal que  $|(-1)^n - L| < 1$ . Para  $n = 2n_0$  obtenemos  $|1 - L| < 1$ , lo cual implica que  $L > 0$ .

Para  $n = 2n_0 + 1$ , obtenemos  $|-1 - L| = |1 + L| < 1$ , lo cual implica que  $L < 0$ . Llegamos a una contradicción, en consecuencia la sucesión dada no tiene límite.

8. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión convergente y supongamos  $a, b \in \mathbb{R}$  fueran límites de la misma. Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $\epsilon/2$  es también mayor que cero y usando la definición de límite:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{si } n \geq n_0 \text{ entonces } |a_n - a| < \epsilon/2,$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \text{si } n \geq n_1 \text{ entonces } |a_n - b| < \epsilon/2.$$

Si  $m = \max\{n_0, n_1\}$ , se verifica:

$$|a - b| = |a - a_m + a_m - b| \leq |a - a_m| + |a_m - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por tanto, el número  $|a - b|$  es menor o igual que todos los números positivos  $\epsilon$ . Como  $|a - b| \geq 0$ , ha de ser necesariamente  $|a - b| = 0$ , es decir  $a = b$ . Concluimos que si una sucesión es convergente, entonces su límite es único.

### 2.3. Propiedades de los límites (1)

1. Demostrar que toda sucesión convergente está acotada.
2. Dar un ejemplo de una sucesión acotada y no convergente.
3. Demostrar que toda sucesión constante  $\{a_n\} = \{k\}$  converge a  $k$ .
4. Demostrar que si dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son convergentes, entonces  $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ , es decir que el límite de la suma es la suma de los límites.
5. Demostrar que el producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es también un infinitésimo.
6. Demostrar que si dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son convergentes, entonces  $\lim a_n b_n = (\lim a_n) (\lim b_n)$ , es decir que el límite del producto es el producto de los límites.
7. Sea  $\{a_n\} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{R}$ . Demostrar que  $\{ka_n\} \rightarrow ka$ , es decir que el límite de una constante por una sucesión es la constante por el límite de la sucesión.
8. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión con  $a_n \neq 0$  para todo  $n$ . Demostrar que si  $\{a_n\} \rightarrow a$

con  $a$  número real no nulo, entonces  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \rightarrow \frac{1}{a}$ .

9. Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones convergentes tales que  $\{a_n\} \rightarrow a$  con  $a \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$  para todo  $n$ , y  $\{b_n\} \rightarrow b$ . Demostrar que  $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} \rightarrow \frac{b}{a}$ . En otras palabras, que el límite del cociente es el cociente de los límites si el límite del denominador es no nulo.

10. Sean  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  y  $\{d_n\}$  sucesiones tales que:

$$\lim a_n = 3, \quad \lim b_n = -5, \quad \lim c_n = 4, \quad \lim d_n = 0.$$

Calcular  $L = \lim \frac{2a_n + b_n^2}{3c_n - 8d_n}$ .

**Solución.** 1. Sea  $(a_n)$  una sucesión convergente de límite  $a \in \mathbb{R}$ . Elijamos  $\epsilon = 1$ . Existe  $n_0$  número natural tal que si  $n \geq n_0$  se verifica  $|a_n - a| < 1$ . Entonces,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Por otra parte, el conjunto finito  $\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$  está acotado por el número  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$ , lo cual implica que  $|a_n| \leq 1 + |a| + M$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ , y por tanto la sucesión  $(a_n)$  está acotada.

2. Hemos visto que la sucesión  $a_n = (-1)^n$  no es convergente, sin embargo  $|(-1)^n| = 1$  para todo  $n$ , luego está acotada.

3. Sea  $\{a_n\} = \{k\}$  una sucesión constante, es decir que para todo  $n$  verifica  $a_n = k \in \mathbb{R}$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces, para todo  $n \geq 1$  se cumple

$$|a_n - k| = |k - k| = 0 < \epsilon,$$

por tanto  $\lim a_n = k$ .

4. En efecto, supongamos que  $\lim a_n = a$  y  $\lim b_n = b$ . Si  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  natural tal que  $|a_n - a| < \epsilon/2$  si  $n \geq n_0$ , y existe  $n_1$  natural tal que  $|b_n - b| < \epsilon/2$  si  $n \geq n_1$ . Entonces, para todo  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  se verifica:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir,  $\lim (a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$ .

5. Sea  $\{b_n\}$  una sucesión acotada, es decir existe  $K > 0$  tal que  $b_n \leq K$  para todo  $n$ . Sea  $\{a_n\}$  un infinitésimo, es decir  $\{a_n\} \rightarrow 0$ . Entonces, para todo

$\epsilon > 0$  existe  $n_0$  natural tal que si  $n \geq n_0$ , se verifica  $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon/K$ .  
Tenemos:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon,$$

para todo  $n \geq n_0$ , lo cual implica que  $\lim a_n b_n = 0$ , es decir  $\{a_n b_n\}$  es un infinitésimo.

6. Supongamos que  $\lim a_n = a$  y  $\lim b_n = b$ . Para todo  $n$  se verifica:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b).$$

Dado que  $\{a_n - a\} \rightarrow 0$  y que  $\{b_n\}$  está acotada (por ser convergente),  $\{(a_n - a)b_n\} \rightarrow 0$ . Análogamente,  $\{a(b_n - b)\} \rightarrow 0$ .

Esto implica  $\{a_n b_n - ab\} \rightarrow 0$  o equivalentemente:

$$\lim a_n b_n = ab = (\lim a_n) (\lim b_n).$$

7. Usando que el límite de una sucesión constante es la propia constante y que el límite del producto es el producto de los límites:

$$\lim k a_n = \lim k \cdot \lim a_n = k a = k \lim a_n.$$

8. Para todo  $n$  se verifica:

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_n}{a_n a} = \frac{a - a_n}{a} \cdot \frac{1}{a_n}.$$

Por hipótesis  $\{a_n\} \rightarrow a$ , por tanto

$$\left\{ \frac{a - a_n}{a} \right\} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{a} = 0.$$

Si demostramos que  $\{1/a_n\}$  está acotada, entonces  $\{1/a_n - 1/a\} \rightarrow 0$ , pues sería el producto de una acotada por un infinitésimo.

Veamos en efecto que  $\{1/a_n\}$  está acotada. Tomando  $\epsilon = |a|/2$ , existe  $n_0$  natural tal que  $|a_n - a| < |a|/2$  para todo  $n \geq n_0$ , con lo cual:

$$|a_n| = |a - (a - a_n)| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - |a|/2 = |a|/2.$$

Esto implica que  $\{1/a_n\} \leq 2/|a|$  si  $n \geq n_0$ , es decir  $\{1/a_n\}$  está acotada. Hemos demostrado que  $\{1/a_n - 1/a\} \rightarrow 0$ , o equivalentemente que  $\{1/a_n\} \rightarrow 1/a$ .

9. Usando el problema anterior y que el límite del producto es el producto de los límites:

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim b_n \cdot \frac{1}{a_n} = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}$$

10. Usando conocidas propiedades de los límites de las sucesiones convergentes:

$$L = \frac{2 \cdot 3 + (-5)^2}{3 \cdot 4 - 8 \cdot 0} = \frac{31}{12}.$$

## 2.4. Propiedades de los límites (2)

1. a) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} = 0$  para cualquier  $m$  entero positivo.  
 b) Usando el apartado anterior, calcular

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - n + 3}{5n^3 + 7n - 4}.$$

2. a) Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ , siendo  $P, Q$  polinomios del mismo grado.  
 b) Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ , siendo  $P, Q$  polinomios con grado  $P < \text{grado } Q$ .  
 c) Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7n^2 + 8n - 5}{2n^2 + n + 1}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 3}{4n^2 + 2n - 1}$ .

3. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , siendo:

$$a) x_n = \frac{2 + \frac{2n}{n+1}}{9 + \frac{n}{n^2+1}}. \quad b) x_n = \frac{4 + (1/2)^n}{(1/5)^n + 6}. \quad c) x_n = \left( \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4.$$

4. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , siendo:

$$a) x_n = \frac{3n^2 + 2}{6n + 1} - \frac{n^2 + 2}{2n + 3}. \quad b) x_n = \frac{\text{sen } n}{n}. \quad c) x_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}.$$

5. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \right)$ .

6. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{0.999 \dots 9}_n$ .

7. Demostrar que si  $\{a_n\}$  es convergente con límite  $a$ , entonces  $\{|a_n|\} \rightarrow |a|$ .  
 ¿Es cierto el recíproco?

8. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{-3n^2 + 8n + 1}{5n^2 + n + 1} \right|$ .

9. Demostrar el teorema del Sandwich o de las tres sucesiones:

Supongamos existe  $n_0$  número natural tal que para todo  $n \geq n_0$  se verifica  $x_n \leq a_n \leq y_n$ . Supongamos además que  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  son convergentes y

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

10. Si  $a_n = \frac{7^n}{n^n}$ , demostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  usando el teorema del Sandwich.

11. Demostrar que si  $\{|a_n|\} \rightarrow 0$ , entonces  $\{a_n\} \rightarrow 0$ .

**Solución.** 1. a) Para todo  $n \geq 1$ ,

$$\left| \frac{1}{n^m} - 0 \right| = \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n}.$$

Se verifica  $\frac{1}{n} < \epsilon$  si  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , en consecuencia también ocurre  $\frac{1}{n^m} < \epsilon$  si  $n > \frac{1}{\epsilon}$ .

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} = 0$ .

b) Dividiendo numerador y denominador entre  $n^3$  :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 3 \cdot \frac{1}{n^3}}{5 + 7 \cdot \frac{1}{n^2} - 4 \cdot \frac{1}{n^3}}.$$

Usando el apartado anterior y conocidas propiedades de los límites:

$$L = \frac{2 + 0 - 0 + 3 \cdot 0}{5 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot 0} = \frac{2}{5}.$$

2. a) Tenemos:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

con  $a_k$  y  $b_k$  no nulos. Dividiendo numerador y denominador entre  $n^k$  :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k + a_{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^k}}{b_k + b_{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^k}} \\ &= \frac{a_k + a_{k-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_k + b_{k-1} \cdot 0 + \dots + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = \frac{a_k}{b_k}. \end{aligned}$$

Es decir, el límite es el cociente entre el coeficiente de mayor grado del numerador y el de mayor grado del denominador.

b) Siendo el grado del numerador menor que el del denominador, podemos escribir:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0n^k + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

con  $b_k$  no nulo. Dividendo numerador y denominador entre  $n^k$  :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0 + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^k}}{b_k + b_{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{n^k}} \\ &= \frac{0 + \cdots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_k + b_{k-1} \cdot 0 + \cdots + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = \frac{0}{b_k} = 0. \end{aligned}$$

c) Usando los apartados anteriores, podemos escribir directamente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7n^2 + 8n - 5}{2n^2 + n + 1} = -\frac{7}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 3}{4n^2 + 2n - 1} = 0.$$

3. Usando conocidas propiedades:

$$a) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2n}{n+1}}{9 + \frac{n}{n^2+1}} = \frac{2+2}{9+0} = \frac{4}{9}.$$

$$b) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + (1/2)^n}{(1/5)^n + 6} = \frac{4+0}{0+6} = \frac{2}{3}.$$

$$c) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^4 = \left( \frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{81}.$$

4. a) Usando conocidas propiedades:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n^2 + 2)(2n + 3) - (6n + 1)(n^2 + 2)}{(6n + 1)(2n + 3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n^2 - 8n + 4}{12n^2 + 8n + 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) Podemos escribir  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \text{sen } n$ , siendo  $\{1/n\}$  un infinitésimo y  $\{\text{sen } n\}$  acotada, en consecuencia  $L = 0$ .

c) Usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n,$$

$$\text{por tanto } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Multiplicando y dividiendo por  $\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}$  :

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \frac{(n^2+n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}.$$



Dividiendo numerador y denominador entre  $n$  :

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Por tanto,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

6. El término enésimo  $x_n$  de la sucesión es:

$$\begin{aligned} x_n &= 0.\underbrace{999\dots 9}_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots + \frac{9}{10^n} \\ &= \frac{9}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \\ &= \frac{9}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1\left(\frac{1}{10^n} - 1\right)}{\frac{1}{10} - 1}.$$

Usando que si  $|q| < 1$ , entonces  $\lim q^n = 0$  :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{-1}{-\frac{9}{10}} = 1.$$

7. Si  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  natural tal que  $|a_n - a| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Entonces,

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

lo cual implica que  $\{|a_n|\} \rightarrow |a|$ . El recíproco no es cierto, basta elegir la sucesión  $\{(-1)^n\}$ . Se verifica  $\{|(-1)^n|\} \rightarrow 1$ , sin embargo  $\{(-1)^n\}$  no es convergente.

8. Tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{-3n^2 + 8n + 1}{5n^2 + n + 1} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^2 + 8n + 1}{5n^2 + n + 1} \right| = \left| \frac{-3}{5} \right| = \frac{3}{5}.$$

9. Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L$ , dado  $\epsilon > 0$  existen  $n_1, n_2$  números naturales tales que

$$|x_n - L| < \epsilon, \quad |y_n - L| < \epsilon$$

Sea  $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ . Para todo  $n \geq n_3$  se verifica:

$$L - \epsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < L + \epsilon,$$

lo cual implica que  $|a_n - L| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_3$ , es decir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

10. Se verifica  $7/n \leq 1/2 \Leftrightarrow 14 \leq n$ . Es decir, si  $n \geq 14$ :

$$0 \leq \frac{7^n}{n^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Por otra parte, y teniendo en cuenta que  $|1/2| < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

11. Para todo  $n$  se verifica  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ . Por otra parte:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-|a_n|) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = -0 = 0.$$

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-|a_n|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ , lo cual implica (por el teorema del Sandwich), que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

## 2.5. Subsucesiones

1. Usando subsucesiones, demostrar que la sucesión  $\{(-1)^n\}$  no es convergente.
2. Demostrar que si una sucesión  $\{x_n\}$  converge hacia  $x$ , entonces toda subsucesión de  $\{x_n\}$  converge hacia  $x$ .

**Solución.** 1. Elijamos las subsucesiones de  $\{(-1)^n\}$ :

$$\{x_{2n-1}\} = \{(-1)^{2n-1}\} = \{-1\}, \quad \{x_{2n}\} = \{(-1)^{2n}\} = \{1\}.$$

Entonces,  $\{x_{2n-1}\} \rightarrow -1$  y  $\{x_{2n}\} \rightarrow 1$ . No todas las subsucesiones de  $\{(-1)^n\}$  tienen el mismo límite, por tanto no es convergente.

2. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  número natural tal que  $|x_n - x| < \epsilon$ . Elijamos  $n_K$  tal que  $n_K \geq n_0$ . Entonces, para todo  $n_k \geq n_K$  se verifica  $n_k \geq n_0$ , y por tanto  $|x_{n_k} - x| < \epsilon$ , lo cual implica que  $\{x_{n_k}\} \rightarrow x$ .

## 2.6. Sucesiones monótonas

1. Estudiar la monotonía de las sucesiones:

$$x_n = \frac{2n}{n+1}, \quad y_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad z_n = \frac{n+1}{3n-11}.$$

2. Estudiar la monotonía de las sucesiones:  $a_n = \frac{7^n}{n!}$ ,  $b_n = \frac{7^n}{(n+5)!}$ .

3. Se considera la sucesión  $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ .

a) Demostrar que es monótona creciente.

b) Demostrar que  $K = 3$  es cota superior de la sucesión.

c) Concluir que es convergente.

4. Se considera la sucesión  $\{a_n\}$  definida por  $a_1 = 0$  y  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ .

a) Demostrar por inducción que  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ .

b) Demostrar que  $\{a_n\}$  es monótona creciente.

c) Demostrar que  $\{a_n\}$  está acotada superiormente.

d) Calcular el límite de  $\{a_n\}$  caso de ser convergente.

5. Demostrar que toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente, es convergente, y que su límite es el extremo superior del conjunto de los términos de la sucesión.

**Solución.** 1. Tenemos:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)},$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{-n^2-n+1}{[(n+1)^2+1](n^2+1)},$$

$$z_{n+1} - z_n = \frac{(n+1)+1}{3(n+1)-11} - \frac{n+1}{3n-11} = \frac{-14}{(3n-8)(3n-11)}.$$

Dado que  $x_{n+1} - x_n \geq 0 \forall n$ , la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona creciente.

Como  $y_{n+1} - y_n \leq 0 \forall n$ , la sucesión  $\{y_n\}$  es monótona decreciente.

Por último, para  $n = 2$  tenemos  $z_3 - z_2 = -7/5 \leq 0$ , y para  $n = 3$ ,  $z_4 - z_3 = 7 \geq 0$ , por tanto  $\{z_n\}$  no es monótona.

2. Tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{7^n} = \frac{7}{n+1},$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{n+1}}{(n+6)!} \cdot \frac{(n+5)!}{7^n} = \frac{7}{n+6}.$$

Ambas sucesiones son de términos positivos. Como  $a_6/a_5 = 7/6 > 1$  y  $a_8/a_7 = 7/8 < 1$ , la sucesión  $\{a_n\}$  no es monótona.

Sin embargo,  $b_{n+1}/b_n \leq 1$  para todo  $n$ , por tanto  $\{b_n\}$  es monótona decreciente.

3. a) Para todo  $n$  se verifica

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \geq 0,$$

por tanto  $\{a_n\}$  es monótona creciente.

b) Para todo  $n$  se verifica

$$3 - a_n = 3 - \frac{2n}{n+1} = \frac{3n+3-2n}{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \geq 0,$$

es decir  $a_n \leq 3$  para todo  $n$ , luego  $K = 3$  es cota superior de  $\{a_n\}$ .

c) Se concluye de los apartados anteriores y de un conocido teorema.

4. a) Se verifica para  $n = 1$  por hipótesis. Si  $a_n \geq 0$ , entonces  $6 + a_n \geq 0$ , por tanto existe  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  y es  $\geq 0$ .

b) Tenemos que demostrar que  $a_{n+1} \geq a_n$  para todo  $n$ . Usemos el método de inducción. Para  $n = 1$  tenemos  $a_2 = \sqrt{6} \geq 0 = a_1$ . Supongamos que  $a_{n+1} \geq a_n$ , entonces,

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} \geq \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

c) Como  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \geq a_n \geq 0$ , se cumple  $6 + a_n \geq a_n^2$ , o de forma equivalente  $-a_n^2 + a_n + 6 \geq 0$ . Podemos expresar

$$-a_n^2 + a_n + 6 = (3 - a_n)(2 + a_n) \geq 0 \text{ para todo } n.$$

Dado que  $2 + a_n \geq 0$  para todo  $n$ , se verifica  $3 - a_n \geq 0$  para todo  $n$ , lo cual implica que 3 es cota superior de  $\{a_n\}$ .

d) La sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, en consecuencia es convergente. Sea  $L$  su límite. Tomando límites en la relación  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ :

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L = 3 \vee L = -2.$$

Pero  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ , por tanto  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$ .

5. Sea  $\{a_n\}$  monótona creciente, es decir  $a_{n+1} \geq a_n$  para todo  $n$ . Si además está acotada, el conjunto  $A$  de los términos de la sucesión tiene extremo

superior  $S$  (axioma del extremo superior). Veamos que  $a_{n+1} \rightarrow S$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  número natural tal que

$$S - \epsilon < a_{n_0} \leq S,$$

pues en otro caso,  $S$  no sería extremo superior de  $A$ . Como  $\{a_n\}$  es monótona creciente, y  $S$  es cota superior de  $A$ ,  $n \geq n_0$  implica que

$$S - \epsilon < a_n \leq S,$$

que a su vez implica  $|a_n - S| < \epsilon$ . Esto demuestra simultáneamente que  $\{a_n\}$  es convergente con límite  $S$ .

## 2.7. Límites infinitos

1. Demostrar que  $\lim (2n + 11) = +\infty$ , y que  $\lim (-3n + 7) = -\infty$ .
2. Sea  $\{x_n\}$  convergente con límite no nulo, e  $\{y_n\}$  divergente. Hallar el límite de la sucesión  $\{x_n y_n\}$
3. Siendo  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ , calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ .
4. Sean  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  divergentes. Demostrar que con esas hipótesis no se puede asegurar cual es el límite de  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ , caso de existir tal límite.

*Nota.* Abreviadamente decimos que las expresiones  $\frac{+\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$ , y  $\frac{-\infty}{-\infty}$ , son indeterminadas.

5. Sean  $\{x_n\} \rightarrow 0$  e  $\{y_n\} \rightarrow 0$  con  $y_n \neq 0$  para todo  $n$ . Demostrar que con esas hipótesis no se puede asegurar cual es el límite de  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ , caso de existir tal límite.

*Nota.* Abreviadamente decimos que la expresión  $\frac{0}{0}$  es indeterminada.

6. Sean  $\{x_n\} \rightarrow 0$  e  $\{y_n\}$  divergente. Demostrar que con esas hipótesis no se puede asegurar cual es el límite de  $\{x_n y_n\}$ , caso de existir tal límite.

*Nota.* Abreviadamente decimos que las expresiones  $0 \cdot (+\infty)$  y  $0 \cdot (-\infty)$  son indeterminadas.

7. Sean  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  e  $\{y_n\} \rightarrow -\infty$ . Demostrar que con esas hipótesis no se puede asegurar cual es el límite de  $\{x_n + y_n\}$ , caso de existir tal límite.

*Nota.* Abreviadamente decimos que la expresión  $(+\infty) + (-\infty)$  es indeterminada.

8. Demostrar que la sucesión  $a_n = \cos n\pi$  es oscilante.

**Solución.** 1. Sea  $K > 0$ . Entonces,

$$2n + 11 > K \Leftrightarrow 2n > K - 11 \Leftrightarrow n > \frac{K - 11}{2}.$$

Eligiendo  $n_0$  natural tal que  $n_0 > \frac{K-11}{2}$ , se verifica  $2n + 11 > K$  para todo  $n \geq n_0$ , por tanto  $\lim (2n + 11) = +\infty$ . Por otra parte,

$$-3n + 7 < -K \Leftrightarrow -3n < -K - 7 \Leftrightarrow n > \frac{K+7}{3}.$$

Eligiendo  $n_0$  natural tal que  $n_0 > \frac{K+7}{3}$ , se verifica  $-3n + 7 < -K$  para todo  $n \geq n_0$ , por tanto  $\lim (-3n + 7) = -\infty$ .

2. Dado  $K > 0$ , el número  $2K/x$  es también positivo, y supongamos que  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ , existe  $n_1$  natural tal que  $y_n > K$  si  $n \geq n_1$ . Llamemos  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ , entonces si  $n \geq n_2$ :

$$x_n y_n > \frac{x}{2} \cdot \frac{2K}{x} = K,$$

lo cual implica que  $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$ .

*Nota.* Una forma abreviada de escribir el resultado demostrado es  $x \cdot (+\infty) = +\infty$  si  $x > 0$ .

Razonando de manera análoga en los restantes casos, podemos concluir:

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (+\infty) = +\infty \\ x \cdot (-\infty) = -\infty, \end{cases} \quad x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (+\infty) = -\infty \\ x \cdot (-\infty) = +\infty. \end{cases}$$

3. Sea  $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Si  $P(x)$  es un polinomio constante, es decir  $P(x) = a_0$ , entonces  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 = a_0$ . Si  $P(x)$  es de grado mayor o igual que 1, podemos escribir:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^m \left( a_m + a_{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{n^m} \right). \end{aligned}$$

El primer factor tiene límite  $+\infty$  y el segundo,  $a_m$ . Por tanto,  $L = +\infty$  si  $a_m > 0$  y  $L = -\infty$  si  $a_m < 0$ .

4. Elijamos las sucesiones  $x_n = n$ ,  $y_n = n$ ,  $y'_n = 2n$ . Tenemos  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ ,  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ ,  $\{y'_n\} \rightarrow +\infty$ . Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Con cambios de signo adecuados, demostramos que las tres restantes expresiones son indeterminadas.

5. Elijamos las sucesiones  $x_n = 1/n$ ,  $y_n = 1/n$ ,  $y'_n = 2/n$ . Tenemos  $\{x_n\} \rightarrow 0$ ,  $\{y_n\} \rightarrow 0$ ,  $\{y'_n\} \rightarrow 0$ . Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/(2n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2.$$

6. Elijamos las sucesiones  $x_n = 1/n$ ,  $y_n = n$ ,  $y'_n = 2/n$ . Tenemos  $\{x_n\} \rightarrow 0$ ,  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ ,  $\{y'_n\} \rightarrow +\infty$ . Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2.$$

Análogamente, y eligiendo  $x_n = 1/n$ ,  $y_n = -n$ ,  $y'_n = -2/n$  demostramos que  $0 \cdot (-\infty)$  es expresión indeterminada.

7. Elijamos las sucesiones  $x_n = n$ ,  $y_n = -n$ ,  $y'_n = -n - 1$ . Tenemos  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ ,  $\{y_n\} \rightarrow -\infty$ ,  $\{y'_n\} \rightarrow -\infty$ . Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1.$$

8. La sucesión está acotada, en consecuencia no puede ser divergente. Por otra parte,  $a_{2n} = \cos 2n\pi = 1$  y  $a_{2n+1} = \cos(2n+1)\pi = -1$ , es decir existen dos subsucesiones con límites distintos, lo cual implica que  $\{a_n\}$  no es convergente.

## 2.8. Criterios de Stolz y de las medias aritmética y geométrica

1. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ .

2. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3n} + \dots + \frac{n+1}{n^2} \right)$ .

3. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{n^2+1}{n^2}}$ .

4. A partir del criterio de Stolz, demostrar el criterio de la media aritmética.

**Solución.** 1. Recordemos el criterio de Stolz:

Sea  $\{y_n\}$  una sucesión de números reales positivos estrictamente creciente, es decir  $0 < y_1 < y_2 < \dots$ , con  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ . Entonces, para toda sucesión  $\{x_n\}$  y para todo  $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

La sucesión  $y_n = n^3$  es estrictamente creciente y tiene límite  $+\infty$ . Sea  $x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

Por el criterio de Stolz,  $L = \frac{1}{3}$ .

2. Recordemos el criterio de la media aritmética:

Sea  $\{a_n\}$  sucesión de números reales y  $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L.$$

Podemos escribir:

$$\frac{2}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3n} + \dots + \frac{n+1}{n^2} = \frac{1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n}}{n}.$$

Ahora bien, como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$  deducimos del criterio de la media aritmética que  $L = 1$ .

3. Recordamos el criterio de la media geométrica:

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales positivos y  $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L.$$

Se verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1$ , por tanto  $L = 1$  como consecuencia del criterio de la media geométrica.

4. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión con límite  $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , y consideremos las sucesiones

$$x_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad y_n = n.$$



Es claro que se satisfacen para estas sucesiones las hipótesis del criterio de Stolz. Tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L,$$

lo cual implica que

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

## 2.9. Miscelánea de sucesiones (1)

1. Sea la sucesión  $a_n = \frac{2n+1}{7n+5}$ . Usando la definición de límite, demostrar que  $\{a_n\} \rightarrow \frac{2}{7}$  y hallar a partir de qué término la diferencia  $|a_n - 2/7|$  es menor que 0,002.

2. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n \right)$ .

*Sugerencia:* usar la identidad  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ .

3. Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

4. Demostrar que la sucesión  $a_n = \left[ \frac{(-1)^n}{n} \right]$  no es convergente, en donde  $[x]$  representa la parte entera de  $x$ .

5. Sin usar el criterio de Stolz, calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$ .

6. Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

7. Usando el criterio de Stolz, calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ .

8. Demostrar que para todo  $p \in \mathbb{N}$  se verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1}$ .

9. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{5n} + \frac{5}{10n} + \frac{7}{15n} + \cdots + \frac{2n+1}{5n^2} \right)$ .

10. Demostrar que la implicación que aparece en el criterio de la media aritmética no es reversible.

**Solución.** 1. Tenemos las equivalencias:

$$\begin{aligned} |a_n - 2/7| < \epsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{7n+5} - \frac{2}{7} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{14n+7-49n-10}{49n+35} \right| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \left| \frac{-3}{49n+35} \right| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{3}{49n+35} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < 49n+35 \Leftrightarrow \frac{3-35\epsilon}{49\epsilon} < n. \end{aligned}$$

Es decir, para cualquier  $\epsilon > 0$ , si elegimos  $n_0$  número natural tal que  $n_0 > (3 - 35\epsilon)/49\epsilon$ , entonces  $|a_n - 2/7| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ , por tanto  $2/7$  es límite de la sucesión  $\{a_n\}$ . Eligiendo  $\epsilon = 0,002$ :

$$n > \frac{3 - 35\epsilon}{49\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{3 - 35 \cdot 0,002}{49 \cdot 0,002} = 29,89 \dots,$$

luego a partir del término  $a_{30}$  ocurre  $|a_n - 2/7| < 0,002$ .

2. Para  $A \neq B$  se verifica:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}.$$

Llamando  $A = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$  y  $B = n$  queda:

$$\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n = \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre  $n^2$ :

$$\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{(n^3 + 2n^2)^2}{n^6}} + \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2n^2}{n^3}} + 1}.$$

Por tanto,  $L = \frac{2}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$ .

3. Se verifica  $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 \leq n$ , por tanto si  $n \geq 4$ :

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dado que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{32}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , se concluye del teorema del

Sandwich que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

4. Tenemos:  $a_{2n} = \lfloor 1/2n \rfloor = 0$  y  $a_{2n+1} = \lfloor -1/(2n+1) \rfloor = -1$  lo cual implica  $\{a_{2n}\} \rightarrow 0$  y  $\{a_{2n+1}\} \rightarrow -1$ . La sucesión no es convergente por tener dos subsucesiones con distintos límites.

5. Habíamos demostrado que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

6. Descompongamos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)}.$$

Igualando  $1 = A(k+1) + Bk$  e identificando coeficientes, obtenemos  $A = 1$  y  $B = -1$ , por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &+ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1.$$

7. La sucesión  $y_n = 2^n$  es estrictamente creciente y tiene límite  $+\infty$ . Sea  $x_n = n$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Por el criterio de Stolz,  $L = 0$ .

8. Llamemos  $x_n = \sum_{k=1}^n k^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ . Claramente la sucesión  $\{y_n\}$  satisface las hipótesis del criterio de Stolz. Usando la fórmula del binomio de Newton:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{n^p + pn^{p-1} + \dots + 1}{(p+1)n^p + \dots + 1}$$

Tenemos el cociente de dos polinomios en  $n$  con el mismo grado, por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Como consecuencia del criterio de Stolz,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1}$ .

9. Podemos escribir:

$$\frac{3}{5n} + \frac{5}{10n} + \frac{7}{15n} + \cdots + \frac{2n+1}{5n^2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \frac{7}{15} + \cdots + \frac{2n+1}{5n}}{n}.$$

Ahora bien, como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{5n} = \frac{2}{5}$  deducimos del criterio de la media aritmética que  $L = \frac{2}{5}$ .

10. Consideremos como contraejemplo la sucesión no convergente  $a_n = (-1)^n$ , y sea  $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$  la sucesión de sus medias aritméticas. Las subsucesiones de las medias aritméticas para términos pares e impares son:

$$b_{2n} = \frac{-1 + 1 - 1 + \cdots + 1}{2n} = 0,$$

$$b_{2n-1} = \frac{-1 + 1 - 1 + \cdots - 1}{2n-1} = \frac{-1}{2n-1}.$$

Se verifica  $\{b_{2n}\} \rightarrow 0$  y  $b_{2n-1} \rightarrow 0$  de lo cual se deduce que  $\{b_n\} \rightarrow 0$ . Es decir, la sucesión  $\{a_n\}$  no es convergente, pero si lo es la de sus medias aritméticas.

## 2.10. Miscelánea de sucesiones (2)

1. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{7}{3} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{11}{9} \cdot \cdots \cdot \frac{2n+5}{3n}}$ .
2. Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
3. Sabiendo que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+3n}$ .
4. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión tal que  $x_n \geq -1$  para todo  $n$ , y  $\{x_n\} \rightarrow 0$ . Demostrar que para todo  $p$  entero positivo se verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1$ .
5. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ .
6. Sea  $a > 1$ . Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ .
7. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n!}{\log n^n}$ .

**Solución.** 1. Se verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}$ , por tanto  $L = \frac{2}{3}$  como consecuencia del criterio de la media geométrica.

2. Llamemos  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ . Se verifica  $x_n \geq 0$ , y por la fórmula del binomio de Newton,

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Por tanto,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

La sucesión de la derecha tiene límite 0, luego  $\{x_n\} \rightarrow 0$  por el teorema del Sandwich, lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

3. Usaremos el teorema del Sandwich. Por una parte  $n \leq 1 + 3n$  para todo  $n$ . Por otra,  $n^2 - (1 + 3n) = n^2 - 3n - 1 = n(n-3) - 1 \geq 0$  si  $n \geq 4$ . Es decir,  $1 + 3n \leq n^2$  si  $n \geq 4$ , con lo cual

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+3n} \leq \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2.$$

El límite de la sucesión de la izquierda es 1 y el de la derecha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1,$$

en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+3n} = 1$ . Otra forma de hallar el límite sería:

$$\sqrt[n]{1+3n} = \sqrt[n]{\frac{1+3n}{n}} \cdot \sqrt[n]{n} = \left(\frac{1}{n} + 3\right)^{1/n} \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow 3^0 \cdot 1 = 1.$$

4. Si  $x_n \geq 0$  se verifica

$$1 \leq \sqrt[p]{1+x_n} \leq (\sqrt[p]{1+x_n})^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|.$$

Si  $-1 \leq x_n < 1$  se verifica

$$1 \geq \sqrt[p]{1+x_n} \geq (\sqrt[p]{1+x_n})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Las desigualdades anteriores implican

$$1 - |x_n| \leq \sqrt[p]{1+x_n} \leq 1 + |x_n|.$$

Como  $\{x_n\} \rightarrow 0$ , también  $\{|x_n|\} \rightarrow 0$ , por tanto  $\{1 - |x_n|\} \rightarrow 1$  y  $\{1 + |x_n|\} \rightarrow 1$ , y usando el teorema del Sandwich concluimos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1$ .

5. Llamemos  $S(n) = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ . Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S(n) \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2}}.$$

Sumando las correspondientes fracciones:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq S(n) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1.$$

Tomando límites en la igualdad anterior,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) \leq 1.$$

Ahora bien, el límite de la izquierda es

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{1} = 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

6. Como  $a - 1 > 0$ , y usando la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} a^n &= (1 + a - 1)^n \geq \binom{n}{2} 1^{n-2} (a-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{2}{(a-1)^2(n-1)}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(a-1)^2(n-1)} = 0,$$

lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ .

7. Usando la aproximación de Stirling  $\log n! \sim n \log n - n$  para  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n!}{\log n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log n - n}{n \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{\log n} \right) = 1 - 0 = 1.$$

## 2.11. Familia de sucesiones recurrentes

Se consideran las sucesiones de números reales  $(x_n)$  de la forma

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{b}{x_n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Se pide:

(a) Si  $a = 3$  y  $b = 9$ , estudiar razonadamente si la sucesión  $(x_n)$  es convergente y en su caso, hallar el límite.

(b) Comprobar que para  $a, b$  fijos mayores que cero, la sucesión  $(x_n)$  está acotada inferiormente por  $+\sqrt{b}$ .

(c) Comprobar que para  $a, b$  fijos mayores que cero, la sucesión  $(x_n)$  es convergente. Hallar su límite.

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Para  $a = 3, b = 9$  tenemos

$$x_0 = 3, \quad x_1 = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{9}{3} \right) = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{9}{3} \right) = 3.$$

lo cual permite conjeturar que  $x_n = 3$  para todo  $n \geq 0$  natural. Demostremos por inducción que la conjetura es cierta. Es cierta para  $n = 0$  por la propia construcción de la sucesión. Supongamos que es cierta para  $n$ , entonces

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{9}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{9}{3} \right) = 3.$$

es decir, también es cierta para  $n + 1$ . Concluimos pues que  $(x_n) = (3)$ , y por tanto la sucesión es convergente con límite 3.

(b) Si  $x_n > 0$  entonces,  $x_n \geq +\sqrt{b} \Leftrightarrow x_n^2 \geq b$ . Demostremos que  $x_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ . Efectivamente  $x_0 = a > 0$  por hipótesis. Supongamos que  $x_n > 0$ , entonces  $x_{n+1} = (1/2)(x_n + b/x_n)$  es el producto de dos números positivos y por tanto positivo.

Veamos ahora que para todo  $n \geq 0$  se verifica  $x_{n+1}^2 \geq b$ . Efectivamente

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{b^2}{x_n^2} + 2b \right) = \frac{x_n^4 + b^2 + 2bx_n^2}{4x_n^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 \geq b &\Leftrightarrow \frac{x_n^4 + b^2 + 2bx_n^2}{4x_n^2} \geq b \Leftrightarrow x_n^4 + b^2 + 2bx_n^2 \geq 4bx_n^2 \\ &\Leftrightarrow x_n^4 + b^2 - 2bx_n^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_n^2 - b)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

igualdad esta última que es trivialmente cierta. Hemos demostrado pues que para todo  $n \geq 1$  se verifica  $x_n \geq +\sqrt{b}$ . Por supuesto que el término  $x_0 = a$  podría no cumplir la relación anterior.

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq x_n &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{b}{x_n} \right) \leq x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^2 + b}{2x_n} \leq x_n \\ &\Leftrightarrow x_n^2 + b \leq 2x_n^2 \Leftrightarrow -x_n^2 + b \leq 0 \Leftrightarrow b \leq x_n^2, \end{aligned}$$

y esta última desigualdad ya la habíamos demostrado en el apartado (b) para todo  $n \geq 1$ . Observemos que  $x_0 = a$  queda excluido, lo cual es irrelevante para la existencia de límite. Tenemos una sucesión  $x_1, x_2, \dots$  monótona decreciente y acotada inferiormente y por tanto, convergente. Llamemos  $L$  a su límite. Tomando límites en la igualdad

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{b}{x_n} \right).$$

Obtenemos  $L = (1/2)(L + b/L)$  o equivalentemente  $L^2 = b$ . Entonces,  $L = +\sqrt{b}$  o  $L = -\sqrt{b}$ . Ahora bien, como  $x_n > 0$  para todo  $n$  se deduce que  $\lim x_n = +\sqrt{b}$ .

## 2.12. Sucesión recurrente con límite raíz de 2

Se considera la sucesión  $u_n$  tal que:

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) \quad a > 0.$$

Demostrar que  $u_n$  es convergente y hallar su límite.

**Solución.** La sucesión  $u_n$  es de términos positivos. En efecto,  $u_0 > 0$  por hipótesis y si  $u_n > 0$ , entonces:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) > 0, \quad \text{al ser } a > 0.$$

Supongamos que la sucesión  $u_n$  tiene límite  $U \in \mathbb{R}$ . Tomando límites en la relación de recurrencia dada:

$$U = \frac{1}{2} \left( U + \frac{a}{U} \right) \quad \text{ó} \quad 2U^2 = U^2 + a \quad \text{ó} \quad U^2 = a.$$

Como la sucesión es de términos positivos, si es convergente, su límite es  $\sqrt{a}$ . Demostremos que  $(u_n)_{n \geq 1}$  está acotada inferiormente por  $\sqrt{a}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left( u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left( u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}} - 2\sqrt{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_{n-1}^2 + a - 2\sqrt{a} u_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{(u_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2u_{n-1}} \geq 0 \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

por tanto  $u_n \geq \sqrt{a}$  para todo  $n \geq 1$ . Demostremos ahora que la sucesión es monótona decreciente. En efecto para todo  $n$  tenemos:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) - u_n$$



$$= \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} - 2u_n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{u_n} - u_n \right) = \frac{a - u_n^2}{2u_n}.$$

Ahora bien, al ser  $u_n \geq \sqrt{a}$ , se verifica  $u_n^2 \geq a$ , y por tanto  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , o equivalentemente  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Por un conocido teorema, la sucesión es convergente, y según lo ya visto su límite es  $\sqrt{2}$ .



## Capítulo 3

# Continuidad en una variable

### 3.1. Concepto de continuidad, primeras propiedades

1. Demostrar que cualquier función constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = k$  es continua en  $\mathbb{R}$ .
2. Demostrar que la función identidad  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  es continua en  $\mathbb{R}$ .
3. Demostrar que cualquier función polinómica es continua en  $\mathbb{R}$ .
4. Demostrar que cualquier función racional es continua en todos los valores reales que no anulan al denominador.

**Solución.** 1. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Veamos que  $f$  es continua en  $x_0$ .

(i) Existe  $f(x_0) = k$ .

(ii) Sabemos por conocidos teoremas de límites que el límite de una función constante es la propia constante, es decir  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$  (finito).

(iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Concluimos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

2. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Veamos que  $f$  es continua en  $x_0$ .

(i) Existe  $f(x_0) = x_0$ .

(ii) Sabemos por conocidos teoremas de límites que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$  (finito).

(iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Concluimos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

3. Cualquier función polinómica es de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{R}).$$

Las funciones constantes y la función identidad son continuas en  $\mathbb{R}$ . Como el producto de funciones continuas es continua, se deduce que  $x \rightarrow a_k x^k$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Al ser la suma de continuas una función continua, concluimos que cualquier función polinómica es continua en  $\mathbb{R}$ .

4. Toda función racional  $F$  es de la forma  $F = \frac{f}{g}$  en donde  $f$  y  $g$  son funciones polinómicas, y éstas son continuas en  $\mathbb{R}$ . Por otra parte, sabemos que si  $f$  y  $g$  definidas sobre un intervalo  $I$  son continuas en  $x_0$ , también lo es  $\frac{f}{g}$  si  $g(x_0) \neq 0$ . Concluimos que  $F$  es continua en todos los valores reales que no anulan al denominador.

### 3.2. Continuidad de las funciones elementales

1. Determinar donde son continuas las siguientes funciones elementales:

$$(a) f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 5x + 6}. \quad (b) g(x) = \sqrt{-2x^2 + 10x - 12}.$$

2. Determinar donde son continuas las siguientes funciones elementales:

$$(a) f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + x + 1}}. \quad (b) f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

3. Estudiar la continuidad de la función elemental

$$f(x) = \log(x^2 - x - 6).$$

4. Demostrar que para todo  $k \in [0, 1)$  es continua en  $\mathbb{R}$  la función

$$f(x) = \frac{1}{kx^2 - 2kx + 1}.$$

5. Estudiar la continuidad de las funciones elementales

$$(a) f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 - x + 3}. \quad (b) g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}.$$

**Solución.** 1. Recordamos que todas las funciones elementales son continuas en su dominio de definición.

(a) La función no está definida si y sólo si el denominador se anula, es decir cuando  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Resolviendo obtenemos  $x = 2$ ,  $x = 3$ . Por tanto  $f$  es continua exactamente en  $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ .

(b) La función está definida si y sólo si el radicando es no negativo es decir, si y sólo si  $p(x) = -2x^2 + 10x - 12 \geq 0$ . Factoricemos  $p(x)$  para estudiar su signo. Tenemos

$$p(x) = -2(x^2 - 5x + 6) = -2(x - 2)(x - 3).$$

El polinomio  $p(x)$  toma valores no negativos exactamente en el intervalo  $[2, 3]$ . Por tanto  $g$  es continua exactamente en  $[2, 3]$ .

2. (a) La raíz cúbica de un número real siempre existe y el denominador no se anula para ningún valor real de  $x$  (sus raíces son complejas), lo cual implica que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

(b) La función no será continua cuando  $\cos x = 0$  es decir cuando:

$$x = \pi/2 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

La función  $f$  es continua exactamente en  $\mathbb{R} - \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

3. La función  $f$  está definida para los valores de  $x$  reales tales que  $p(x) = x^2 - x - 6 > 0$ . Factoricemos  $p(x)$  para estudiar su signo. Tenemos:

$$p(x) = (x - 3)(x + 2).$$

Este polinomio toma valores positivos exactamente en

$$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty),$$

que es donde  $f$  es continua.

4. La función  $f$  es elemental. Para que sea continua en  $\mathbb{R}$  es necesario y suficiente que esté definida en todo  $\mathbb{R}$ , es decir que el polinomio  $p(x) = kx^2 - 2kx + 1$  no tenga raíces reales. Para  $k = 0$  queda  $f(x) = 1$  que es continua en  $\mathbb{R}$ . Para  $k \neq 0$  las raíces de  $p(x)$  son:

$$x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4k}}{2k} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - k}}{k}.$$

Si  $k \in (0, 1)$ , entonces  $k^2 - k = k(k - 1) < 0$  y por tanto  $p(x)$  no tiene raíces reales. Concluimos que si  $k \in [0, 1)$ ,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

5. (a) La función está definida si y sólo si el radicando es no negativo es decir, si y sólo si  $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0$ . Factorizando  $p(x)$ :

$$p(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3).$$

El polinomio  $p(x)$  toma valores no negativos exactamente en  $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ . Por tanto  $f$  es continua exactamente en  $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ .

(b) El radicando existe si y sólo si  $x \neq -2$ . La función está definida si y sólo si el radicando es no negativo y claramente esto ocurre exactamente en  $(-\infty - 2) \cup [1, +\infty)$ . Por tanto  $g$  es continua exactamente en  $(-\infty - 2) \cup [1, +\infty)$ .

### 3.3. Continuidad de las funciones no elementales

1. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

2. Estudiar la continuidad de la función:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ -3x + 7 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

3. Estudiar la continuidad de la función:

$$h(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4. Se considera la función

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - x}{\text{sen } \pi x}.$$

Definir  $f(0)$  y  $f(1)$  para que la función sea continua en  $[0, 1]$ .

5. Estudiar la continuidad de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ .

6. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de  $f$ .

7. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  (función parte entera de  $x$ ).

**Solución.** 1. Sea  $x_0 \neq 2$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $x_0$  de tal forma que la función  $f$  es elemental y está definida en  $(a, b)$ . Por el teorema de continuidad de las funciones elementales concluimos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Estudiemos la continuidad en  $x_0 = 2$ . Usando la

definición:

(i) Existe  $f(2) = 5$ . (ii) Veamos si existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12. \end{aligned}$$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ .

Por tanto,  $f$  no es continua en 2. Concluimos que la función  $f$  es continua exactamente en  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

2. Sea  $x_0 \neq -2$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $x_0$  de tal forma que la función  $g$  es elemental y está definida en  $(a, b)$ . Por el teorema de continuidad de las funciones elementales concluimos que  $g$  es continua en  $x_0$ . Estudiemos ahora la continuidad en  $x_0 = -2$ . Usando la definición:

(i) Existe  $g(-2) = 3(-2)^2 + 1 = 13$ .

(ii) Veamos si existe  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x^2 + 1) = 13,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-3x + 7) = 13.$$

Es decir, existe  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  y es igual a 13.

(iii)  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2)$ .

Por tanto,  $g$  también es continua en  $-2$ . Concluimos que la función  $g$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

3. Sea  $x_0 \neq 0$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $x_0$  de tal forma que la función  $h$  es elemental y está definida en  $(a, b)$ . Por el teorema de continuidad de las funciones elementales concluimos que  $h$  es continua en  $x_0$ . Estudiemos ahora la continuidad en  $x_0 = 0$ . Usando la definición:

(i) Existe  $h(0) = 0$ .

(ii) Veamos si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Es decir, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  y por tanto la función no es continua en 0. Concluimos que la función  $h$  es continua exactamente en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

4. Cuando  $x$  recorre el intervalo  $(0, 1)$ ,  $\pi x$  recorre el intervalo  $(0, \pi)$ . Es decir,  $\sin \pi x \neq 0$  en  $(0, 1)$ . La función  $f$  es elemental y está definida en  $(0, 1)$ , luego es continua en éste intervalo. Usando  $\sin \epsilon \sim \epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = -\frac{1}{\pi}.$$

Efectuando el cambio  $t = 1 - x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - t}{\sin(\pi - \pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - t}{\sin \pi t} = -\frac{1}{\pi}.$$

Por tanto, se ha de definir  $f(0) = f(1) = -\frac{1}{\pi}$  para que  $f$  sea continua en  $[0, 1]$ .

5. La función valor absoluto está definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sea  $x_0 < 0$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $x_0$  de tal forma que la función es  $f(x) = -x$ , es decir es elemental y está definida en  $(a, b)$ . Por el teorema de continuidad de las funciones elementales concluimos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Análogo razonamiento si  $x_0 > 0$ . Estudiemos ahora la continuidad en  $x_0 = 0$ . Usando la definición:

(i) Existe  $f(0) = 0$ .

(ii) Veamos si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Es decir, existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y es igual a 0.

(iii) Se verifica  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . La función también es continua en  $x_0 = 0$ .

Podemos pues concluir que es continua en  $\mathbb{R}$ .

6. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (x \in \mathbb{Q})} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 (x \in \mathbb{Q})} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})} -x = -x_0.$$



Para que exista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  se ha de verificar  $x_0 = -x_0$ , que equivale a  $x_0 = 0$ . Además, en este caso  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Concluimos que la función  $f$  es continua exactamente en  $x = 0$ .

7. Sea  $x_0$  real tal que  $x_0 \notin \mathbb{Z}$ , entonces existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_0 \in (n, n+1)$ . Por la definición de la función parte entera,  $f(x) = n$  para todo  $x \in (n, n+1)$ . La función  $f$  es por tanto continua en  $(n, n+1)$  (teorema de continuidad de las funciones elementales), en consecuencia lo es en  $x_0$ . Sea  $x_0$  real tal que  $x_0 \in \mathbb{Z}$ . Por la definición de función parte entera, tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x_0 - 1 & \text{si } x \in [x_0 - 1, x_0) \\ x_0 & \text{si } x \in [x_0, x_0 + 1). \end{cases}$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x_0 - 1) = x_0 - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x_0) = x_0.$$

es decir,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  lo cual implica que no existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , luego  $f$  no es continua en  $x_0$ . Concluimos que  $f(x) = [x]$  es continua exactamente en  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

### 3.4. Continuidad en intervalos

1. Demostrar que la ecuación  $x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0$  tiene al menos una raíz mayor que 0 y menor que 1.
2. Demostrar que la ecuación  $x - \cos x = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(0, \pi)$ .
3. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < a < 1$  y  $b > 0$ . Demostrar que la ecuación  $x = a \sin x + b$  tiene al menos una raíz positiva menor o igual que  $a + b$ .
4. Demostrar que toda ecuación polinómica real de grado impar tiene al menos una raíz real.
5. Demostrar el teorema de Bolzano:  
Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supongamos que  $f(a)f(b) < 0$  (es decir,  $f(a)$  y  $f(b)$  son no nulos y con distinto signo). Entonces, existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .
6. Demostrar que la función  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$  toma el valor  $\pi$  en el intervalo  $(1, 2)$ .
7. Usando el teorema de Bolzano, demostrar el teorema de los valores intermedios para funciones continuas:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Sean  $x_1, x_2$  dos puntos de  $[a, b]$  tales que  $x_1 < x_2$  y  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Entonces, la función  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  al menos una vez en el intervalo  $(x_1, x_2)$ .

8. Se considera la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |x^3 + \cos x|$ . Demostrar que  $f$  alcanza en  $[0, 1]$  un máximo y un mínimo absolutos.

**Solución.** 1. La función  $f(x) = x^3 + x^2 - 9x + 2$  es continua en  $[0, 1]$ . Además,  $f(0) = 2 > 0$  y  $f(1) = -6 < 0$ . Por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ , o de forma equivalente: la ecuación dada tiene al menos una raíz mayor que 0 y menor que 1.

2. La función  $f(x) = x - \cos x$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por tanto lo es en  $[0, \pi]$ . Además,  $f(0) = -1 < 0$  y  $f(\pi) = \pi + 1 > 0$ . Por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (0, \pi)$  tal que  $f(c) = 0$ , o de forma equivalente: la ecuación dada tiene al menos una raíz en  $(0, \pi)$ .

3. La función  $f(x) = x - a \operatorname{sen} x - b$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por tanto lo es en  $[0, a + b]$ . Además,

$$f(0) = -b < 0, \quad f(a + b) = a(1 - \operatorname{sen}(a + b)).$$

Si  $\operatorname{sen}(a + b) = 1$ , entonces  $f(a + b) = 0$  y  $a + b$  es la raíz pedida. Si  $\operatorname{sen}(a + b) \neq 1$ , entonces  $\operatorname{sen}(a + b) < 1$  y al ser  $0 < a < 1$ :

$$f(a + b) = a(1 - \operatorname{sen}(a + b)) > 0.$$

Por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (0, a + b)$  tal que  $f(c) = 0$ , y  $c$  es la raíz pedida.

4. Sea  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  una función polinómica real de grado  $n$  impar. Supongamos que  $a_n > 0$ . Entonces:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = -\infty.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = +\infty.$$

Por las definiciones de estos límites, deducimos de (i) que existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) < 0$  si  $x < x_1$  y de (ii), que existe  $x_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) > 0$  si  $x > x_2$ . Podemos por tanto elegir  $a, b$  reales con  $a < b$  tales que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , por el teorema de Bolzano existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . Es decir, la ecuación polinómica  $f(x) = 0$  tiene al menos una raíz real. Razonamiento análogo si  $a_n < 0$ .

5. Supongamos que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . Consideremos el conjunto:

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

El conjunto  $A$  no es vacío pues  $a \in A$  y está acotado al estar contenido en  $[a, b]$ . Por tanto, existe  $c = \sup A$  (axioma del extremo superior).

Es claro que  $a < c < b$ . Veamos que  $f(c) = 0$ . Como  $f$  es continua, si  $f(c) > 0$  existe un intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x$  en ése intervalo. En consecuencia, ningún punto de  $A$  puede estar a la derecha de  $c - \delta$  lo cual implica que  $c - \delta$  es cota superior de  $A$ . Pero  $c - \delta < c$  lo cual contradice la definición de  $c$ .

Si  $f(c) < 0$  existe un intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  tal que  $f(x) < 0$  para todo  $x$  en ése intervalo. En consecuencia,  $f(x) < 0$  para algún  $x > c$ . Esto contradice el hecho de ser  $c$  cota superior de  $A$ .

Podemos pues concluir que  $f(c) = 0$ . El caso  $f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$  se razona de manera análoga considerando el conjunto  $A = \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$  y de nuevo  $c = \sup A$ .

6. La función  $f$  es continua en  $[1, 2]$ . Además  $f(1) = 1 + 1 - 3 + 2 = 1$  y  $f(2) = 8 + 4 - 6 + 2 = 8$ . Dado que  $1 < \pi < 8$ , por el teorema de los valores intermedios para funciones continuas, existe  $c \in (1, 2)$  tal que  $f(c) = \pi$

7. Supongamos  $f(x_1) < f(x_2)$  y sea  $k$  un número real tal que  $f(x_1) < k < f(x_2)$ . Definimos la función:

$$f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - k.$$

La función  $g$  es continua en  $[x_1, x_2]$ . Además:

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - k > 0.$$

Aplicando el teorema de Bolzano a  $g$ , deducimos que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que  $g(c) = f(c) - k = 0$  o de forma equivalente,  $f(c) = k$  para algún  $c \in (x_1, x_2)$ . Si  $f(x_1) < f(x_2)$ , se razona de manera análoga.

8. La función  $g(x) = x^3 + \cos x$  es elemental y está definida en  $[0, 1]$ , en consecuencia es continua en tal intervalo. Por otra parte,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x) = |x|$  es continua y además  $f = h \circ g$ . Como la composición de funciones continuas es continua,  $f$  es continua en  $[0, 1]$ . Por el teorema de Weierstrass,  $f$  alcanza en  $[0, 1]$  un máximo y un mínimo absolutos.

### 3.5. Continuidad uniforme

1. Demostrar que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 5$  es uniformemente continua.
2. Demostrar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  es uniformemente continua.
3. Demostrar que  $f : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  es uniformemente continua.
4. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo. Demostrar que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua, entonces es continua.
5. Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Demostrar que es continua pero no uniformemente continua.
6. Demostrar el teorema de caracterización de la continuidad uniforme por sucesiones:  
Sea  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Entonces,  $f$  es uniformemente continua si y sólo si para cualquier par de sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  de puntos de  $I$  tales que  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$  se verifica  $(f(x_n) - f(y_n)) \rightarrow 0$
7. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ . Demostrar que no es uniformemente continua usando el teorema de caracterización de la convergencia uniforme por sucesiones.
8. Demostrar el teorema de Heine:  
Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces,  $f$  es uniformemente continua.
9. Usando el teorema de Heine, demostrar que la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$  es uniformemente continua.
10. Demostrar que la función  $f(x) = \text{sen } x$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Solución.** 1. Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon/2$ . Entonces, si  $|x - y| < \delta$  :

$$|f(x) - f(y)| = |2x + 5 - (2y + 5)| = 2|x - y| < 2(\epsilon/2) = \epsilon.$$

2. Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon$ . Usando la conocida propiedad  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  :

$$|x - y| < \delta, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

3. Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon/8$ . Sean  $x, y \in (0, 4)$ , entonces  $0 < x + y < 8$ . Si  $|x - y| < \delta$  :

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| < 8(\epsilon/8) = \epsilon.$$

4. Sea  $\epsilon > 0$  y  $x_0 \in I$  fijo. Como  $f$  es uniformemente continua en  $I$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in I$  y  $|x - x_0| < \delta$  se verifica  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . Esto

implica que  $f$  es continua en  $x_0$  para todo  $x_0 \in I$ , es decir  $f$  es continua en  $I$ .

5. La función  $f(x) = x^2$  es polinómica, por tanto continua en  $\mathbb{R}$  y como consecuencia, en  $(0, +\infty)$ . Veamos que no es uniformemente continua. Tenemos que demostrar que

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in (0, +\infty) \text{ tal que } (|x - y| < \delta \text{ y } |x^2 - y^2| \geq \epsilon).$$

Sea  $\epsilon = 1$ . Elijamos  $\delta > 0$ . Sean  $y = 1/\delta$ ,  $x = y + \delta/2$ . Entonces  $|x - y| = \delta/2 < \delta$  sin embargo

$$|x^2 - y^2| = \left| \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \epsilon.$$

6. Si  $f$  es uniformemente continua, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para  $x, y \in I$  con  $|x - y| < \delta$  se verifica  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Si  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - y_n| < \delta$ , luego  $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ . Es decir,  $(f(x_n) - f(y_n)) \rightarrow 0$ .

Recíprocamente, si  $f$  no es uniformemente continua, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para cada  $\delta > 0$  existen puntos  $x, y \in I$  (que dependen de  $\delta$ ) verificando  $|x - y| < \delta$  pero  $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$ .

Si para cada  $n = 1, 2, \dots$  elegimos  $\delta = 1/n$ , tenemos construidas un par de sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  de puntos de  $I$  tales que  $|x_n - y_n| < 1/n$  (y por tanto  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$ ) pero  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$  (y por tanto  $(f(x_n) - f(y_n))$  no tiende a 0).

7. Elijamos las sucesiones  $x_n = n + 1/n$  e  $y_n = n$ . Se verifica  $(x_n - y_n) = (1/n) \rightarrow 0$ . Sin embargo

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \left( n + \frac{1}{n} \right)^3 - n^3 \right| = 3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} \geq 3 \quad (\forall n \geq 1).$$

La sucesión  $f(x_n) - f(y_n)$  no tiene límite 0, por tanto  $f$  no es uniformemente continua.

8. Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua. Entonces, existe un  $\epsilon_0 > 0$  y dos sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  de puntos de  $[a, b]$  tales que  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$  y  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$  para todo  $n$  natural.

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, la sucesión  $(x_n)$  tiene una subsecuencia  $(x_{n_k})$  que converge a un punto  $x \in [a, b]$ . Puesto que  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$  tenemos también  $(x_{n_k} - y_{n_k}) \rightarrow 0$ , luego  $(y_{n_k}) \rightarrow x$ .

Como  $f$  es continua en  $x$ , se verifica  $(f(x_{n_k})) \rightarrow f(x)$  y también  $(f(y_{n_k})) \rightarrow f(x)$ . Esto es una contradicción pues  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0$  para todo  $n$  natural.

9. La función  $f(x) = \sqrt{x}$  es elemental y está definida en  $[0, 1]$ , luego es continua en  $[0, 1]$ . Por el teorema de Heine, también es uniformemente continua.

10. Sea  $\epsilon > 0$ . Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left| 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|. \end{aligned}$$

Entonces, eligiendo  $\delta = \epsilon$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x-y| < \delta = \epsilon.$$

### 3.6. Miscelánea de continuidad

1. Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{si } x \leq c \\ (ax+b)^2 & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Si  $b, c \in \mathbb{R}$  son parámetros fijos, hallar los valores de  $a$  para los cuales  $f$  es continua en  $c$ .

2. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $x_0 \in (a, b)$  y supongamos que  $f(x_0) \neq 0$ . Demostrar que existe un intervalo abierto  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tal que en cada punto de éste intervalo  $f(x)$  y  $f(x_0)$  tienen el mismo signo.

3. Demostrar que la ecuación  $e^{-x} + 2 = x$  tiene al menos una solución real.

4. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  que cumplen  $f(a) > g(a)$  y  $f(b) < g(b)$ . Demostrar que las gráficas de  $f$  y  $g$  se cortan.

5. Si  $\alpha < \beta$ , probar que la ecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

6. Demostrar que la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$  no es uniformemente continua.

7. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Supongamos que existe un  $M > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in S. \quad (*)$$

Demostrar que  $f$  es uniformemente continua en  $I$ .

Nota: A la condición (\*) se la llama *condición de Lipschitz* y a la correspondiente función, *función Lipschitziana*.

8. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones uniformemente continuas. Demostrar que  $h = g \circ f$  es uniformemente continua.

**Solución.** 1. (i) Existe  $f(c) = 2 \cos c$ .

(ii) Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} (ax + b)^2 = (ac + b)^2, \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} 2 \cos x = 2 \cos c, \end{aligned}$$

luego  $f$  es continua si y sólo si

$$(ac + b)^2 = 2 \cos c. \quad (1)$$

Como  $(ac + b)^2 \geq 0$ , necesariamente ha de ser  $\cos c \geq 0$ . Cumpliéndose ésta condición:

$$(ac + b)^2 = 2 \cos c \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2 \cos c} - b}{c} \quad (\text{si } c \neq 0).$$

Si  $c = 0$ , la igualdad (1) se transforma en  $b^2 = 2 \cos 0 = 2$ , y para  $b = \pm\sqrt{2}$  la función es continua en  $c$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Supongamos que  $f(x_0) > 0$ . Como  $f$  es continua en  $x_0$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon. \quad (1)$$

Elijamos  $\epsilon = f(x_0)/2$ , entonces (1) se transforma en:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2},$$

lo cual implica que  $f(x) > 0$  pues  $f(x_0)/2 > 0$ . Es decir,  $f(x)$  y  $f(x_0)$  tienen el mismo signo en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Si  $f(x_0) < 0$  basta elegir  $\epsilon = -f(x_0)/2$  y razonar de manera análoga.

3. Consideremos la función  $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ . Tenemos:

$$f(2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0, \quad f(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0,$$

y la función  $f$  es continua en  $[2, 3]$ . Por el teorema de Bolzano existe  $c \in (2, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ . Es decir, la ecuación dada tiene al menos una solución real.

4. Consideremos la función

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

La función  $h$  es continua en  $[a, b]$  por ser diferencia de continuas. Además

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0, \quad h(b) = f(b) - g(b) < 0.$$

Como consecuencia del teorema de Bolzano, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h(c) = f(c) - g(c) = 0$ . Es decir,  $f(c) = g(c)$  y por tanto las gráficas de  $f$  y  $g$  se cortan.

5. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^6 + 1}{x - \beta}.$$

Esta función es racional y está definida en el intervalo abierto  $(\alpha, \beta)$ , en consecuencia es continua en dicho intervalo. Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty.$$

Por el teorema de los valores intermedios de las funciones continuas, existen  $\alpha_1, \beta_1$  tales que  $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$  con  $f(\alpha_1) > 0$  y  $f(\beta_1) < 0$ .

Por el teorema de Bolzano, existe  $\xi \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$  tal que  $f(\xi) = 0$ . Es decir, la ecuación dada tiene al menos una solución en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

6. Tenemos que demostrar que

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in (0, +\infty) \text{ tal que } \left( |x - y| < \delta \text{ y } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq \epsilon \right).$$

Sea  $\epsilon = 1$ . Elijamos  $\delta > 0$ . Sean  $y = \min\{\delta, 1\}$ ,  $x = y/2$ . Entonces  $|x - y| = y/2 \leq \delta/2 < \delta$  sin embargo

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y/2} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{y} \geq 1 = \epsilon.$$

7. Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon/M$ . Sean  $x, y \in I$ , entonces:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M(\epsilon/M) = \epsilon.$$

8. Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|x' - y'| < \delta$  implica  $|g(x') - g(y')| < \epsilon$ . Entonces, existe  $\eta > 0$  tal que  $|x - y| < \eta$  implica  $|f(x) - f(y)| < \delta$ . Por tanto,  $|x - y| < \eta$  implica  $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ .



### 3.7. Funciones $f$ -continuas

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria. Diremos que una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $f$ -continua si  $g \circ f$  es continua para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Sea  $f(x) = x^2$ . Estudiar si las funciones  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

son  $f$ -continuas.

2. Determinar todas las funciones que son  $f$ -continuas si: a)  $f$  es constante  
b)  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Consideremos  $f(x) = e^x$ . Estudiar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:  $g$  es  $f$ -continua si, y sólo si  $g$  es continua en  $(0, \infty)$ .

4. Consideremos ahora  $f(x) = \sin x$ . Caracterizar las funciones  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que son  $f$ -continuas.

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1. Determinemos la función  $g_1 \circ f$  y  $g_2 \circ f$  :

$$(g_1 \circ f)(x) = g_1[f(x)] = g_1(x^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Claramente  $g_1 \circ f$  no es continua en  $x = 0$ , por tanto  $g_1$  no es  $f$ -continua.

$$(g_2 \circ f)(x) = g_2[f(x)] = g_2(x^2) = 1.$$

La función  $g_2 \circ f$  es continua para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir  $g_2$  es  $f$ -continua.

2. a) Sea  $f(x) = k$  con  $k$  constante. Entonces, para toda función  $g$  se verifica  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(k)$ , es decir  $g \circ f$  es constante y por tanto continua. En consecuencia todas las funciones  $g$  son  $f$ -continuas. b) Si  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g \text{ es } f\text{-continua} \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x) \text{ es continua.}$$

Es decir, las funciones  $f$ -continuas son en éste caso las continuas.

3. Veamos si se verifica la doble implicación:  $g$  es  $f$ -continua  $\Leftrightarrow g$  es continua en  $(0, \infty)$ .

$\Rightarrow$ ) El rango de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  es  $(0, \infty)$ . Por hipótesis  $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y como consecuencia es continua  $g \circ f$  considerando la restricción  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} (0, \infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ , y llamemos  $h = g \circ f$  a esta composición. La inversa de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es  $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \log x$ . Entonces

$$g \circ f = h \Rightarrow g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f^{-1} \Rightarrow g \circ I = h \circ f^{-1} \Rightarrow g = h \circ f^{-1}.$$

Se deduce que  $g$  es continua en  $(0, \infty)$  al ser composición de continuas.

$\Leftrightarrow$ ) Por hipótesis  $g$  es continua en  $(0, \infty)$ . Razonando como en la implicación anterior tenemos  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} (0, \infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ , y la función  $g \circ f$  es continua por ser la composición de continuas, es decir  $g$  es  $f$ -continua. Hemos demostrado la doble implicación, y por tanto la afirmación dada es verdadera.

4. Veamos que:  $g$  es  $f$ -continua  $\Leftrightarrow g$  es continua en  $[-1, 1]$ . Razonaremos de manera análoga a la del apartado anterior.

$\Rightarrow$ ) Consideramos la restricción  $[-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{f} [-1, 1] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ . Entonces

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad f^{-1}(x) = \arcsen x.$$

Llamemos  $h = g \circ f$  ( $h$  es continua por hipótesis). Se verifica:

$$g \circ f = h \Rightarrow g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f^{-1} \Rightarrow g \circ I = h \circ f^{-1} \Rightarrow g = h \circ f^{-1}.$$

Se deduce que  $g$  es continua en  $[-1, 1]$  al ser composición de continuas.

$\Leftarrow$ ) Por hipótesis  $g$  es continua en  $[-1, 1]$ . Razonando como en la implicación anterior tenemos  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} [-1, 1] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ , y la función  $g \circ f$  es continua por ser la composición de continuas, es decir  $g$  es  $f$ -continua. Hemos demostrado pues la doble implicación.

## Capítulo 4

# Derivadas

### 4.1. Concepto de derivada

1. Si  $f(x) = x^2$ , hallar  $f'(4)$  usando la definición de derivada.
2. Si  $f(x) = x^2$ , hallar  $f'(x)$  usando la definición de derivada.
3. Si  $f(x) = x^3$ , hallar  $f'(x)$  usando la definición de derivada.
4. Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ , hallar  $f'(x)$  para todo  $x$  real no nulo, usando la definición de derivada.
5. Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , hallar  $f'(x)$  para todo  $x$  real y positivo, usando la definición de derivada.
6. Demostrar que si  $u$  es derivable en  $x$  y  $f(x) = ku(x)$  con  $k$  constante, entonces  $f'(x) = ku'(x)$ . Es decir, la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.
7. Demostrar que si  $f$  es derivable en un punto  $x_0$  de  $(a, b)$ , entonces es continua en  $x_0$ .
8. Sea  $f$  una función derivable en toda la recta real. Calcular:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + 3h)]^2 - [f(x - h)]^2}{h}.$$

9. En un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $x_0$  la función  $f$  verifica la relación  $|f(x) - f(x_0)| \leq M(x - x_0)^2$  con  $M > 0$  real. Demostrar que  $f$  es derivable en  $x_0$  con derivada nula.
10. Hallar  $\log A$ , sabiendo que  $f$  es derivable en  $a$ ,  $f(a) > 0$  y

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right)^n.$$

**Solución.** 1. Tenemos:

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 8h + h^2 - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) = 8.$$

Por supuesto, podemos usar la definición alternativa:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8. \end{aligned}$$

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

3. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

4. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{h(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

5. Tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. Aplicando la definición de derivada y usando que el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ku(x+h) - ku(x)}{h}$$

$$= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = ku'(x).$$

7. Para todo  $x \in (a, b)$  con  $x \neq x_0$  se verifica:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0). \quad (1)$$

Al ser  $f$  derivable en  $x_0$ , existe y es finito:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Por tanto, tomando límites en (1) :

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

lo cual implica que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , es decir  $f$  es continua en  $x_0$ .

8. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+3h) + f(x-h)][f(x+3h) - f(x-h)]}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+3h) + f(x-h)) \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h} \right). \end{aligned}$$

Por ser  $f$  derivable, es continua y por tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+3h) + f(x-h)) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h} &= \frac{f(x+3h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\ &= 3 \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}. \end{aligned}$$

Efectuando los cambios  $k = 3h$  y  $s = -h$  :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h} &= 3 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} \\ &= 3f'(x) + f'(x) = 4f'(x). \end{aligned}$$

Podemos pues concluir que  $L = 2f(x) \cdot 4f'(x) = 8f(x)f'(x)$ .

9. Para todo  $x \in (a, b)$  con  $x \neq x_0$ , y dado que  $(x - x_0)^2 = |x - x_0|^2$  :

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M |x - x_0|.$$

Tomando límites cuando  $x \rightarrow x_0$  :

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq 0,$$

lo cual implica que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

10. El límite dado presenta una indeterminación del tipo  $1^{+\infty}$ , por tanto  $A = e^\lambda$ , siendo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} - 1 \right) n.$$

Ahora bien,  $\log A = \lambda$ , es decir:

$$\log A = \frac{1}{f(a)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}}.$$

Si  $n \rightarrow +\infty$ , entonces  $1/n \rightarrow 0$ . Usando la definición de derivada:

$$\log A = \frac{1}{f(a)} f'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

## 4.2. Álgebra de derivadas

1. Sean  $u$  y  $v$  funciones definidas en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Supongamos que  $u$  y  $v$  son derivables en  $x \in (a, b)$ . Demostrar que  $u + v$  y  $u - v$  son derivables en  $x$  y además

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x), \quad (u - v)'(x) = u'(x) - v'(x).$$

2. Sean  $u$  y  $v$  funciones definidas en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Supongamos que  $u$  y  $v$  son derivables en  $x \in (a, b)$ . Demostrar que  $u \cdot v$  es derivable en  $x$  y además

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

3. Sean  $u$  y  $v$  funciones definidas en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Supongamos que  $u$  y  $v$  son derivables en  $x \in (a, b)$  y que  $v(x) \neq 0$ . Demostrar que  $u/v$  es derivable en  $x$  y además:

$$\left( \frac{u}{v} \right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}.$$

4. Sean  $u, v$  y  $w$  funciones derivables en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Demostrar que  $uvw$  es derivable en  $(a, b)$  y además:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5. Demostrar que si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son funciones derivables en  $(a, b)$ , entonces el producto  $u_1u_2 \cdots u_n$  es derivable en  $(a, b)$  y además:

$$(u_1u_2 \cdots u_n)' = u_1'u_2 \cdots u_n + u_1u_2' \cdots u_n + \dots + u_1u_2 \cdots u_n'.$$

**Solución.** 1. Usando la definición de derivada y la de suma de funciones:

$$\begin{aligned} (u + v)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x) + v(x + h) - v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Usando que el límite de la suma es la suma de los límites si ambos límites existen:

$$(u + v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x).$$

Análoga demostración para  $(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$ .

2. Usando la definición de derivada y la de producto de funciones:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u \cdot v)(x + h) - (u \cdot v)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h)v(x + h) - u(x)v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Sumando y restando en el numerador  $u(x + h)v(x)$  y sacando factores comunes:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)[u(x + h) - u(x)] + u(x + h)[v(x + h) - v(x)]}{h} \\ &= v(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \left( \lim_{h \rightarrow 0} u(x + h) \right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Dado que  $u$  es continua en el punto  $x$  (por ser derivable en él), se verifica  $\lim_{h \rightarrow 0} u(x + h) = u(x)$  y por tanto,

$$(u \cdot v)'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x).$$

3. Usando la definición de derivada y la de cociente de funciones:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{u(x)v(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x)}{v(x)v(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{v(x)(u(x+h) - u(x)) - u(x)(v(x+h) - v(x))}{v(x)v(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x) - \frac{v(x+h) - v(x)}{h}u(x)}{v(x)v(x+h)}.
 \end{aligned}$$

Dado que  $v$  es continua en el punto  $x$  (por ser derivable en él), se verifica  $\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x)$  y por tanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}.$$

4. Usando que el producto de funciones derivables es derivable y la fórmula de la derivada del producto de dos funciones:

$$\begin{aligned}
 (uvw)' &= ((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w' \\
 &= (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.
 \end{aligned}$$

5. Sabemos que si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones derivables en  $(a, b)$ , entonces  $u_1u_2$  es derivable en  $(a, b)$  y además  $(u_1u_2)' = u_1'u_2 + u_1u_2'$ . Es decir, la propiedad es cierta para  $n = 2$ .

Sea cierta para  $n$  y sean  $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$  derivables en  $(a, b)$ . Entonces, el producto  $u_1u_2 \cdots u_nu_{n+1}$  es derivable en  $(a, b)$  pues es el producto  $(u_1u_2 \cdots u_n)u_{n+1}$  de dos funciones derivables. Además:

$$\begin{aligned}
 (u_1u_2 \cdots u_nu_{n+1})' &= ((u_1u_2 \cdots u_n)u_{n+1})' \\
 &= (u_1u_2 \cdots u_n)'u_{n+1} + (u_1u_2 \cdots u_n)u_{n+1}' \\
 &= (u_1'u_2 \cdots u_n + u_1u_2' \cdots u_n + \dots + u_1u_2 \cdots u_n'u_n)u_{n+1} + u_1u_2 \cdots u_nu_{n+1}' \\
 &= u_1'u_2 \cdots u_nu_{n+1} + u_1u_2' \cdots u_nu_{n+1} \\
 &\quad + \dots + u_1u_2 \cdots u_n'u_{n+1} + u_1u_2 \cdots u_nu_{n+1}'.
 \end{aligned}$$

Es decir, la propiedad es cierta para  $n + 1$ .



### 4.3. Derivación de funciones algebraicas

1. Demostrar que si  $f(x) = k$  es función constante, entonces  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Demostrar que si  $f(x) = x$ , entonces  $f'(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Demostrar que si  $f(x) = x^n$  con  $n$  entero positivo, entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Usando conocidos teoremas de derivación, hallar las derivadas de las funciones polinómicas: (a)  $f(x) = x^7$ . (b)  $g(x) = 8x^5$ . (c)  $h(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 + 6x - 11$ .
5. Usando la fórmula de la derivada de un cociente, calcular las derivadas de las funciones racionales: (i)  $f(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$  ( $a, b, c, d$  constantes).

$$(ii) g(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}.$$

6. Hallar  $y'$  siendo:

$$(a) y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^3}. \quad (b) y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}. \quad (c) y = 4x^6\sqrt{5x^3}.$$

**Solución.** 1. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

3. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Usando la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-1}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-1}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

4. (a) Usando  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , tenemos  $f'(x) = 7x^6$ .

(b) Usando  $(ku(x))' = ku'(x)$  si  $k$  constante:  $g'(x) = 8(5x^4) = 40x^4$ .

(c) Usando que la derivada de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las derivadas,  $h'(x) = 20x^4 - 24x^3 + 6x + 6$ .

$$5. (i) f'(x) = \frac{b(c+dx) - d(a+bx)}{(c+dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c+dx)^2}.$$

$$(ii) g'(x) = \frac{3(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(3x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-3x^2 - 10x + 29}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

6. (a) Podemos escribir  $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$ . Por tanto:

$$y' = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5x\sqrt{x} - \frac{3}{x^4}.$$

$$(b) y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

(c) Podemos escribir  $y = 4x^6\sqrt{5}x^{3/2} = 4\sqrt{5}x^{15/2}$ , por tanto:

$$y' = 30\sqrt{5}x^{13/2} = 30\sqrt{5}\sqrt{x^{13}} = 30\sqrt{5}x^6\sqrt{x}.$$

#### 4.4. Derivación de funciones trigonométricas y circulares inversas

1. Hallar  $y'$  siendo:

$$(a) y = a \cos x + b \sin x. \quad (b) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}. \quad (c) y = x \tan x.$$

2. Hallar:

$$(a) \frac{d}{dx}(x \arcsen x). \quad (b) \frac{d}{dx}(\cot x - \tan x). \quad (c) \frac{d}{dt}((t^2 - 2) \cos t - 2t \sen t).$$

3. Demostrar que:

$$(a) \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (b) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sen^2 x}.$$

4. Hallar  $\frac{d}{dx}(\csc x)$  y  $\frac{d}{dx}(\sec x)$ .

5. Demostrar que si  $f(x) = \sen x$ , entonces  $f'(x) = \cos x$ .

6. Demostrar que si  $f(x) = \cos x$ , entonces  $f'(x) = -\sen x$ .

**Solución.** 1. (a)  $y' = -a \sen x + b \cos x$ .

$$\begin{aligned}
 (b) \quad y' &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-1 - 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad y' = 1 \tan x + x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{\cos^2 x}.$$

$$2. (a) \quad \frac{d}{dx}(x \operatorname{arcsen} x) = 1 \cdot \operatorname{arcsen} x + x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \frac{d}{dx}(\cot x - \tan x) &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{-1}{(\operatorname{sen} 2x/2)^2} = \\
 &= -\frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}.
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \frac{d}{dt}((t^2 - 2) \cos t - 2t \operatorname{sen} t) = 2t \cos t + (t^2 - 2)(-\operatorname{sen} t) - 2 \operatorname{sen} t - 2t \cos t = -t^2 \operatorname{sen} t.$$

3. (a) Por definición de función tangente,  $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ . Usando la fórmula de la derivada de un cociente con  $\cos x \neq 0$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(b) Por definición de función cotangente,  $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ . Usando la fórmula de la derivada de un cociente con  $\operatorname{sen} x \neq 0$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

4. Usando las definiciones de las funciones cosecante, secante y la fórmula de la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x \operatorname{csc} x.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sec} x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \tan x \operatorname{sec} x.$$

5. Aplicando la definición de derivada y la fórmula del seno de la suma:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \quad (1)$$

Usando  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$  con  $\alpha = h$  y  $\beta = 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{sen} \frac{h}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{h/2}.$$

Usando que la función seno es continua y que  $\lim_{t \rightarrow 0} (\operatorname{sen} t/t) = 1$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -(0 \cdot 1) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Sustituyendo en (1):

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x.$$

6. Se verifica  $f(x) = \cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$ . Usando la regla de la cadena

$$f'(x) = -\cos(\pi/2 - x) = -\operatorname{sen} x.$$

## 4.5. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

1. Calcular las derivadas de las funciones:

(a)  $y = (x^2 - 6x + 5)e^x$ . (b)  $y = e^x \operatorname{sen} x$ . (c)  $y = \frac{7^x}{x^2}$ .

2. Calcular las derivadas de las funciones:

(a)  $y = (x^3 - 5) \log x$ . (b)  $y = (\log_5 x) \cos x$ . (c)  $y = \frac{3x^2}{\log x}$ .

3. Demostrar que si  $a > 0$ , se verifica para todo  $x > 0$ :

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e.$$

**Solución.** 1. (a)  $y' = (2x - 6)e^x + (x^2 - 6x + 5)e^x = (x^2 - 4x - 1)e^x$ .

(b)  $y' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$ .

(c)  $y' = \frac{x^2 7^x \log 7 - 2x 7^x}{x^4} = \frac{(x^2 \log 7 - 2x) 7^x}{x^4}$ .

2. (a)  $y' = 3x^2 \log x + (x^3 - 5) \frac{1}{x}$ .

(b)  $y' = \left( \frac{1}{x} \log_5 e \right) \cos x + (\log_5 x)(-\operatorname{sen} x) = \frac{\log_5 e (\cos x - x \operatorname{sen} x)}{x}$ .

$$(c) y' = \frac{6x \log x - \frac{1}{x} 3x^2}{\log^2 x} = \frac{6x^2 \log x - 3x^2}{x \log^2 x}.$$

3. Usando la definición de definición de derivada:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}.$$

Usando conocidas propiedades de los logaritmos:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_a \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right]. \end{aligned}$$

Cuando  $h \rightarrow 0^+$ ,  $\frac{x}{h} \rightarrow +\infty$ . Efectuando el cambio de variable  $t = \frac{x}{h}$  y por la definición del número  $e$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = e.$$

Queda por tanto

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e.$$

## 4.6. Derivación de funciones hiperbólicas

1. Hallar las derivadas de las funciones:

$$(a) y = 2x \operatorname{senh} x. \quad (b) y = \frac{3x^2}{\cosh x}. \quad (c) y = x - \tanh x.$$

2. Demostrar que:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \operatorname{senh} x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x.$$

3. Calcular:

$$(a) \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x. \quad (b) \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x. \quad (c) \frac{d}{dx} \operatorname{coth} x.$$

**Solución.** 1. (a)  $y' = 2 \sinh x + 2x \cosh x = 2(\sinh x + x \cosh x)$ .

$$(b) y' = \frac{6x \cosh x - 3x^2 \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{3(2x \cosh x - 3x^2 \sinh x)}{\cosh^2 x}.$$

$$(c) y' = 1 - \operatorname{sech}^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x} = \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \tanh^2 x.$$

$$2. \frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2} \left( e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}} \right) \\ = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( e^x + \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2} \left( e^x + \frac{-e^x}{e^{2x}} \right) \\ = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x.$$

*Nota.* Se pueden acortar algo las demostraciones anteriores usando el teorema de derivación de funciones compuestas.

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} \\ = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$$

$$3. (a) \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sinh x} \right) = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} = -\coth x \operatorname{csch} x.$$

$$(b) \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cosh x} \right) = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\tanh x \operatorname{sech} x.$$

$$(c) \frac{d}{dx} \coth x = \frac{d}{dx} \left( \frac{\cosh x}{\sinh x} \right) = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{\sinh^2 x} \\ = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

## 4.7. Derivación de funciones hiperbólicas inversas

1. Calcular  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \operatorname{arth} x - \arctan x$ .

2. Calcular  $y'$ , siendo  $y = \frac{\operatorname{arch} x}{x}$ .

3. Calcular  $\frac{d}{dx} (\operatorname{arsen} x \operatorname{arsh} x)$ .

**Solución.** 1.  $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}$ .

$$2. y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} x - \operatorname{arch} x = \frac{x - \sqrt{x^2-1} \operatorname{arch} x}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$3. \frac{d}{dx} (\operatorname{arsen} x \operatorname{arsh} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arsh} x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{arsen} x.$$

## 4.8. Derivación de funciones compuestas, regla de la cadena

1. Calcular  $y'$  siendo:

$$(a) y = (x^3 + 5x^2 + 1)^8. \quad (b) y = \operatorname{tg}^7 x. \quad (c) y = \arctan(\log x).$$

2. Calcular  $f'(x)$  siendo:

$$(a) f(x) = 3^{\cos x}. \quad (b) f(x) = \left( \frac{1 + \log x}{1 - \log x} \right)^4. \quad (c) f(x) = \sqrt[3]{(x + \operatorname{sen} x)^2}.$$

3. Si  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$  y  $g(x) = x^6 + 4$ , calcular  $h'(1)$  siendo  $h = f \circ g$ .

4. Sea  $f$  una función derivable en  $\mathbb{R}$ . Demostrar que si  $f$  es par, entonces  $f'$  es impar y que si  $f$  es impar, entonces  $f'$  es par.

5. Si  $f(e^x) = \log \sqrt{x}$  y  $g(x) = f(x^2 + 2)$ , calcular  $g'(2)$ .

6. Una función  $f$  positiva y derivable en  $\mathbb{R}$  cumple  $f(\cos x) = \frac{1}{f(\operatorname{sen} x)}$ .

Hallar  $f'(0)$ .

**Solución.** 1. (a)  $y' = 8(x^3 + 5x^2 + 1)^7(3x^2 + 10x)$ .

$$(b) y' = 7(\operatorname{tg}^6 x) \sec^2 x.$$

$$(c) y' = \frac{1}{1 + \log^2 x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \log^2 x)}.$$

2. (a)  $f'(x) = -(3^{\cos x} \log 3)(\operatorname{sen} x)$ .

$$(b) f'(x) = 4 \left( \frac{1 + \log x}{1 - \log x} \right)^3 \frac{\frac{1}{x}(1 - \log x) + \frac{1}{x}(1 + \log x)}{(1 - \log x)^2}$$

$$= 8 \left( \frac{1 + \log x}{1 - \log x} \right)^3 \frac{1}{x(1 - \log x)^2}.$$

(c) Podemos expresar  $f(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{2/3}$ , por tanto:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + \operatorname{sen} x)^{-1/3}(1 + \cos x) = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos x}{\sqrt[3]{x + \operatorname{sen} x}}.$$

3. Por la regla de la cadena,  $h'(1) = (f \circ g)'(1) = f'(g(1))g'(1)$ . Tenemos que  $g(1) = 5$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 6x$  y  $g'(x) = 6x^5$ . Por tanto,

$$h'(1) = f'(5)g'(1) = 105 \cdot 6 = 630.$$

4. Si  $f$  es par, entonces  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Derivando y usando la regla de la cadena,  $f'(-x)(-1) = f'(x)$ . Es decir,  $f'(-x) = -f'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  lo cual implica que  $f'$  es impar.

Si  $f$  es impar, entonces  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Derivando y usando la regla de la cadena,  $f'(-x)(-1) = -f'(x)$ . Es decir,  $f'(-x) = f'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  lo cual implica que  $f'$  es par.

5. Aplicando la regla de la cadena  $g'(x) = 2xf'(x^2 + 2)$ . Para  $x = 2$ , tenemos  $g'(2) = 4f'(6)$ . De nuevo, aplicando la regla de la cadena,

$$e^x f'(e^x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}. \quad (1)$$

Ahora bien,  $e^x = 6$  equivale a  $x = \log 6$ . Sustituyendo en (1) :

$$6f'(6) = \frac{1}{2 \log 6} \Rightarrow f'(6) = \frac{1}{12 \log 6} \Rightarrow g'(2) = \frac{4}{12 \log 6} = \frac{1}{3 \log 6}.$$

6. Dado que  $f$  es positiva (el denominador nunca se anula), la relación dada equivale a  $f(\cos x)f(\sen x) = 1$ . Derivando y usando la regla de la cadena:

$$f'(\cos x)(-\sen x)f(\sen x) + f(\cos x)f'(\sen x)(\cos x) = 0.$$

Sustituyendo  $x$  por 0 :

$$f'(1) \cdot 0 \cdot f(0) + f(1) \cdot f'(0) \cdot 1 = 0.$$

Queda  $f(1)f'(0) = 0$ . Ahora bien, por hipótesis  $f(1) \neq 0$  y por tanto  $f'(0) = 0$ .

## 4.9. Derivación por fórmulas

1. Hallar la derivada de  $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .
2. Hallar la derivada de  $f(x) = \log \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}}$ .
3. Hallar la derivada de  $f(x) = \operatorname{senh} \left( x\sqrt{x\sqrt{x}} \right)$ .



4. Calcular las derivadas de: (a)  $f(x) = \operatorname{arsh} \frac{x^2}{a^2}$ . (b)  $g(x) = \operatorname{arth} \frac{2x}{x^2 + 1}$ .
5. Demostrar las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas inversas, es decir:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arth} x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

6. Demostrar que  $\frac{d}{dx} \left( \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \right) = \sec x$ .
7. Calcular la derivada de  $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \log \left( x + \sqrt{x^2 + a} \right)$ .
8. Calcular  $f'(4)$  siendo  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ .
9. Siendo  $f(x) = \log(\log(\operatorname{sen} x))$ , calcular  $f'(\pi/4)$ .

**Solución.** 1.  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1+x^2)}} = \frac{2}{1+x^2}.$$

2.  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} (\log(\operatorname{tg} x + 1) - \log(\operatorname{tg} x - 1)) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x + 1} - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x - 1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 - \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}.$$

3. Podemos escribir  $f(x) = \operatorname{senh}(xx^{1/2}x^{1/4}) = \operatorname{senh} x^{7/4}$ , por tanto:

$$f'(x) = (\cosh x^{7/4}) \frac{7}{4} x^{3/4} = \frac{7}{4} \sqrt[4]{x^3} \cosh x^{7/4} = \frac{7}{4} \sqrt{x\sqrt{x}} \cosh \left( x\sqrt{x\sqrt{x}} \right).$$

4. (a)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2}} \frac{2x}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^4 + x^4}{a^4}}} \frac{2x}{a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^4}} \frac{2x}{a^2} = \frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^4}}.$

(b)  $g'(x) = \frac{1}{1 - \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2} \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{\frac{(x^2 + 1)^2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}} \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2}{1 - x^2}.$$

$$5. \frac{d}{dx} \operatorname{arsh} x = \frac{d}{dx} \log \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} (x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arch} x = \frac{d}{dx} \log \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} (x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arth} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\log(1+x) - \log(1-x))$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$6. \frac{d}{dx} \left( \log \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} (\log(1+\operatorname{sen} x) - \log(1-\operatorname{sen} x)) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \right) = \frac{1}{2} \frac{2 \cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

7.

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{x}{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2\sqrt{x^2 + a}} = \frac{\sqrt{x^2 + a}}{2} + \frac{x^2 + a}{2\sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a}}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + a}}{2} = \sqrt{x^2 + a}.$$

8.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \right).$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{2 + \frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} \frac{3}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{40}.$$

$$9. f'(x) = \frac{1}{\log \operatorname{sen} x} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f'(\pi/4) = \frac{1}{\log \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\log \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

#### 4.10. Teorema de la función inversa

1. Hallar  $(f^{-1})'(9)$  siendo  $f(x) = x^3 + 1$ .
2. Hallar  $(f^{-1})'(16)$ , siendo  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$ .
3. Hallar  $(f^{-1})'(2)$ , siendo  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}$ .
4. Siendo  $f(x - 2) = x^3 + 1$  y  $g(x) = f(\arctan x)$ , calcular  $(g^{-1})'(9)$ .
5. Usando el teorema de la derivada de la función inversa, deducir la fórmula de la derivada de la función arcoseno.
6. Usando el teorema de la derivada de la función inversa, deducir la fórmula de la derivada de la función exponencial.
7. Deducir una fórmula para  $(f^{-1})''(x)$ . Como aplicación, calcular  $(p^{-1})''(0)$  siendo  $p(x) = 2x + 7x^2 + 10x^3$ .

**Solución.** Recordamos el teorema de la función inversa:

Sea  $f$  una función definida en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $x_0 \in (a, b)$ . Supongamos que se verifica:

- 1)  $f'$  existe y es continua en  $(a, b)$ .
- 2)  $f'(x_0) \neq 0$ .

Entonces, existe un intervalo abierto  $I \subset (a, b)$  que contiene a  $x_0$  y un intervalo abierto  $J$  que contiene a  $y_0 = f(x_0)$  tal que la función  $f : I \rightarrow J$  es biyectiva. Además, la función inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  es derivable en  $J$  con derivada continua, y se verifica:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ si } y = f(x).$$

1. Tenemos  $f'(x) = 3x^2$ , luego  $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  con derivada continua. Hallemos  $f^{-1}(9)$ :

$$x_0 = f^{-1}(9) \Leftrightarrow f(x_0) = 9 \Leftrightarrow x_0^3 + 1 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Pero  $f'(2) = 12 \neq 0$  con lo cual se verifican todas las hipótesis del teorema de la función inversa. Tenemos:

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}.$$

*Nota.* Podríamos haber hallado de otra manera  $(f^{-1})'(9)$ . Despejando  $x$  en  $y = x^3 + 1$ , obtenemos  $x = \sqrt[3]{y-1}$  y por tanto  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ . Derivando y sustituyendo  $x$  por 9 :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \quad (f^{-1})'(9) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}.$$

Sin embargo, hay que hacer notar que no siempre va a ser posible encontrar una expresión para  $f^{-1}$  como en este caso.

2. Tenemos  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ , luego  $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  con derivada continua. Hallemos  $f^{-1}(16)$  :

$$x_0 = f^{-1}(16) \Leftrightarrow f(x_0) = 16 \Leftrightarrow x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 + 10 = 16.$$

Queda la ecuación  $x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 6 = 0$ . Según sabemos, las únicas posibles raíces enteras han de ser divisores de  $-6$ , es decir  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  o  $\pm 6$ . Sustituyendo, verificamos que una raíz es  $x_0 = 1$ . Usando la regla de Ruffini la ecuación se transforma en  $(x_0 - 1)(x_0^2 + 3x_0 + 6) = 0$ .

Como  $x_0^2 + 3x_0 + 6 = 0$  no tiene soluciones reales,  $f^{-1}(16) = 1$ . Ahora bien,  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 10 \neq 0$ . Por el teorema de la función inversa:

$$(f^{-1})'(16) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}.$$

3. Hallemos  $f^{-1}(2)$  :

$$x_0 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow f(x_0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0^3 + 5x_0 + 2} = 2.$$

Elevando al cubo obtenemos  $x_0^3 + 5x_0 - 6 = 0$ . Una raíz es  $x_0 = 1$ , y usando la regla de Ruffini,  $(x_0 - 1)(x_0^2 + x_0 + 1) = 0$ .

Pero  $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$  no tiene soluciones reales, en consecuencia  $f^{-1}(2) = 1$ . Ahora bien,

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 5}{3\sqrt[3]{(x^3 + 5x + 2)^2}}, \quad f'(1) = \frac{8}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

En un entorno de 1,  $f$  es derivable con derivada continua. Por el teorema de la función inversa:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

4. Llamando  $t = x - 2$ , queda  $f(t) = (2 + t)^3 + 1$  y  $f'(t) = 3(t + 2)^2$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(\arctan x) = (2 + \arctan x)^3 + 1, \\ g'(x) &= 3(2 + \arctan x)^2 \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Hallemos  $g^{-1}(9)$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} g^{-1}(9) = x_0 &\Leftrightarrow g(x_0) = 9 \Leftrightarrow (2 + \arctan x_0)^3 + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow 2 + \arctan x_0 = 2 \Leftrightarrow \arctan x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0. \end{aligned}$$

Usando (1),  $g'(0) = 12$ . Claramente se verifican las hipótesis del teorema de la función inversa en el punto  $(0, 9)$ , en consecuencia:

$$(g^{-1})'(9) = \frac{1}{g'[g^{-1}(9)]} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{12}.$$

5. Consideremos la función biyectiva:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1), \quad f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Su derivada  $f'(x) = \cos x$  es continua y además,  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Llamemos  $x = \operatorname{sen} y$ . Entonces,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pero  $f^{-1}(x)$  es la inversa de la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , es decir  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ . En consecuencia:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Nota. Para  $x = \pm 1$  la derivada del arco seno es infinita.

6. Consideremos la función biyectiva:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Su derivada  $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$  es continua para todo  $x > 0$  y además,  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ . Llamemos  $x = \log_a y$ . Entonces,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{a^x} \log_a e} = a^x \log a.$$

En la última igualdad hemos usado la fórmula del cambio de base de los logaritmos. Pero  $f^{-1}(x)$  es la inversa de la función  $f(x) = \log_a x$ , es decir  $f^{-1}(x) = a^x$ . En consecuencia:

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Según el teorema de la función inversa:  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ . Derivando el cociente anterior:

$$(f^{-1})''(x) = \frac{-f''(f^{-1}(x)) \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.$$

Para la función dada queda:  $(p^{-1})''(0) = -\frac{p''(p^{-1}(0))}{(p'(p^{-1}(0)))^3}$ . Calculemos  $x_0 = p^{-1}(0)$ . Tenemos:

$$x_0 = p^{-1}(0) \Leftrightarrow p(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + 7x_0^2 + 10x_0^3 = 0.$$

La ecuación anterior equivale a  $x_0(2 + 7x_0 + 10x_0^2) = 0$  que proporciona la única solución  $x_0 = 0$ , en consecuencia  $(p^{-1})''(0) = -\frac{p''(0)}{(p'(0))^3}$ . Ahora bien,

$$p'(x) = 2 + 14x + 30x^2, \quad p''(x) = 14 + 60x \Rightarrow p'(0) = 2, \quad p''(0) = 14.$$

Por tanto, la derivada pedida es:

$$(p^{-1})''(0) = -\frac{14}{2^3} = -\frac{7}{4}.$$

#### 4.11. Derivada de $(g \circ f^{-1})'(6)$

Hallar  $(g \circ f^{-1})'(6)$ , siendo:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x, \quad g(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 5}{x^4 + 1}.$$

(Propuesto en examen de prueba numérica, Cálculo, ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Usando los teoremas de la derivada de la función compuesta e inversa:

$$(g \circ f^{-1})'(6) = g'[f^{-1}(6)] \cdot (f^{-1})'(6) = g'[f^{-1}(6)] \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(6))}.$$

Determinemos  $f^{-1}(6)$ . Usando la definición de imagen inversa:

$$f^{-1}(6) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 = 6.$$

La ecuación  $x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 6 = 0$ , tiene la raíz  $x_0 = 1$ , y factorizando obtenemos  $x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 6 = (x_0 - 1)(x_0^2 + 3x_0 + 6) = 0$ . La ecuación  $x_0^2 + 3x_0 + 6 = 0$  no tiene soluciones reales, por tanto  $f^{-1}(6) = 1$ . Derivemos las funciones  $f$  y  $g$ :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3,$$

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 12x + 9)(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 + 6x^2 + 9x + 5)}{(x^4 + 1)^2}.$$

Sustituyendo  $x = 1$  obtenemos  $f'(1) = 1, g'(1) = -9$ . Por tanto:

$$(g \circ f^{-1})'(6) = g'(1) \cdot \frac{1}{f'(1)} = -\frac{9}{10}.$$

## 4.12. Derivada logarítmica

1. Derivar  $y = \frac{(2x - 1)^2 \sqrt{3x + 2}}{\sqrt[3]{x}}$ .
2. Derivar  $y = x^x$ .
3. Hallar la derivada de la función  $y = x^{\operatorname{sen} x}$ .
4. Hallar la derivada de la función  $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$ .
5. Hallar la derivada de la función  $y = x^{x^x}$ .
6. Siendo  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ , calcular  $f'(2)$ .

**Solución.** 1. Tomando logaritmos:

$$\log y = 2 \log(2x - 1) + \frac{1}{2} \log(3x + 2) - \frac{1}{3} \log x.$$

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = 2 \frac{2}{2x - 1} + \frac{1}{2} \frac{3}{3x + 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{x}.$$

Pasando  $y$  al segundo miembro y sustituyendo por su valor:

$$y' = \frac{(2x - 1)^2 \sqrt{3x + 2}}{\sqrt[3]{x}} \left( \frac{1}{2x - 1} + \frac{3}{2(3x + 2)} - \frac{1}{3x} \right).$$

2. Tomando logaritmos:  $\log y = x \log x$ . Derivando:

$$\frac{y'}{y} = 1 \log x + x \frac{1}{x} = 1 + \log x.$$

Pasando  $y$  al segundo miembro y sustituyendo por su valor:

$$y' = x^x (1 + \log x).$$

3. Tomando logaritmos:  $\log y = (\operatorname{sen} x)(\log x)$ . Derivando:

$$\frac{y'}{y} = (\cos x) \log x + (\operatorname{sen} x) \frac{1}{x}.$$

Pasando  $y$  al segundo miembro y sustituyendo por su valor:

$$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left( (\cos x) \log x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right).$$

4. Tomando logaritmos:  $\log y = (\operatorname{sen} x)(\log \cos x)$ . Derivando:

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)(\log \cos x) + \operatorname{sen} x \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Pasando  $y$  al segundo miembro y sustituyendo por su valor:

$$y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} \left( (\cos x)(\log \cos x) - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \right).$$

5. Tomando logaritmos:  $\log y = x^x \log x$ . Derivando:

$$\frac{y'}{y} = (x^x)' \log x + x^x \frac{1}{x}.$$

En un ejercicio anterior, ya vimos usando derivación logarítmica que:

$$(x^x)' = x^x (1 + \log x),$$

por tanto,

$$\frac{y'}{y} = x^x (1 + \log x) \log x + \frac{x^x}{x}.$$

Pasando  $y$  al segundo miembro y sustituyendo por su valor:

$$y' = x^{x^x} \left( x^x (1 + \log x) \log x + \frac{x^x}{x} \right).$$

Simplificando,  $y' = x^{x^x} x^x \left( \log x + \log^2 x + \frac{1}{x} \right)$ .

6. Tomando logaritmos:  $\log f(x) = x \log \frac{x-1}{x+1} = x(\log(x-1) - \log(x+1))$ .

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log(x-1) - \log(x+1) + x \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right).$$

Sustituyendo  $x = 2$ :

$$\frac{f'(2)}{(1/3)^2} = \log 1 - \log 3 + 2 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{9} \left( \frac{4}{3} - \log 3 \right).$$



### 4.13. Derivadas de órdenes superiores

- Hallar las derivadas hasta orden 3 de la función  $y = \sqrt{x}$ .
- Demostrar que la función  $f(x) = e^{-x} \cos x$  satisface la relación  $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$ .
- Calcular la derivada enésima de la función  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ .
- Hallar la derivada enésima de la función  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ .
- Calcular  $f^{(n)}(x)$  siendo  $f(x) = e^{-kx}$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ).
- Se considera la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que es indefinidamente derivable en  $\mathbb{R}$ . Determinar  $f^{(n)}(0)$ .

- Hallar la derivada enésima de la función  $f(x) = e^x + e^{-x}$ .
- Hallar la derivada enésima de la función  $f(x) = \sqrt{x}$ .
- Hallar la derivada enésima de la función  $f: \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2}$ .

**Solución.** 1. Como  $y = x^{1/2}$ , tenemos:  $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ ,  $y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ ,  $y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}$ .

O bien,  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ ,  $y''' = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$ .

- Las derivadas hasta orden 4 son:

$$f'(x) = -e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\sin x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

$$f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x) = 2e^{-x} \sin x.$$

$$f^{(3)}(x) = -2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x = 2e^{-x}(\cos x - \sin x).$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}(-\sin x - \cos x) = 2e^{-x}(-2 \cos x) = -4e^{-x} \cos x.$$

Por tanto,  $f^{(4)}(x) + 4f(x) = -4e^{-x} \cos x + 4e^{-x} \cos x = 0$ .

- Hallemos las primeras derivadas de  $f$ :

$$f(x) = (x-1)^{-1}, f'(x) = -(x-1)^{-2}, f''(x) = 2(x-1)^{-3},$$

$$f^{(3)}(x) = -6(x-1)^{-4}, f^{(4)}(x) = 24(x-1)^{-5}.$$

El cálculo de las anteriores derivadas permite conjeturar la fórmula:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x-1)^{-n-1}. \quad (1)$$

Demostremos (1) por inducción. El paso base ya está verificado, veamos el paso de inducción. Supongamos que la fórmula es cierta para  $n$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = ((-1)^n n! (x-1)^{-n-1})' \\
&= (-1)^n n! (-n-1)(x-1)^{-n-2} = (-1)^{n+1} n! (n+1)(x-1)^{-(n+1)-1} \\
&= (-1)^{n+1} (n+1)! (x-1)^{-(n+1)-1}.
\end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para  $n+1$ .

4. Descompongamos previamente  $f(x)$  en suma de fracciones racionales simples. Las raíces del denominador son 1 y  $-2$ , por tanto:

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

La igualdad anterior implica  $2x+1 = A(x+2) + B(x-1)$ . Para  $x=1$  queda  $3 = 3A$ , es decir  $A=1$ . Para  $x=-2$  queda  $-3 = 3B$ , es decir  $B=1$ . La función dada se puede pues expresar en la forma

$$f(x) = g(x) + h(x) \text{ con } g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad h(x) = \frac{1}{x+2}.$$

Entonces,  $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)$ . La derivada  $g^{(n)}(x)$  ya la hallamos en el ejercicio anterior, y la derivada  $h^{(n)}(x)$  se calcula de manera totalmente análoga. Quedaría:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x-1)^{-n-1} + (-1)^n n! (x+2)^{-n-1},$$

que podemos expresar en la forma:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left( \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right).$$

5. Tenemos

$$f'(x) = -ke^{-kx}, \quad f''(x) = k^2 e^{-kx}, \quad f^{(3)}(x) = -k^3 e^{-kx}.$$

El cálculo de las anteriores derivadas permite conjeturar la fórmula:  $f^{(n)}(x) = (-1)^n k^n e^{-kx}$ . Vamos a demostrarla por inducción. El paso base ya está verificado, veamos el paso de inducción. Supongamos que la fórmula es cierta para  $n$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left( (-1)^n k^n e^{-kx} \right)' \\
&= (-1)^n (-k) k^n e^{-kx} \\
&= (-1)^{n+1} k^n e^{-kx}.
\end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para  $n+1$ .

6. *Primer caso:*  $x \neq 0$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando conocidas reglas de derivación:

$$f(x) = e^{-1/x^2} = e^{-x^{-2}}$$

$$f'(x) = 2x^{-3}e^{-x^{-2}} = 2x^{-3}f(x).$$

$$f''(x) = -6x^{-4}e^{-x^{-2}} + 2x^{-3}(2x^{-3})e^{-x^{-2}} = x^{-6}(-6x^2 + 4)f(x).$$

Observemos que las derivadas anteriores cumplen la relación:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)x^{-3n}f(x), \quad (p_n(x) \text{ polinomio de grado } 2n - 2).$$

Demostremos por inducción que la fórmula anterior es cierta para todo  $n$ . El paso base ya está verificado para  $n = 1$  y  $n = 2$ . Sea cierta para  $n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(p_n(x)x^{-3n}f(x)\right)' \\ &= p_n'(x)x^{-3n}f(x) + p_n(x)(-3nx^{-3n-1})f(x) + p_n(x)x^{-3n}(2x^{-3}f(x)) \\ &= [x^{-3n}p_n'(x) - 3nx^{-3n-1}p_n(x) + 2x^{-3n-3}p_n(x)]f(x) \\ &= [x^3p_n'(x) - 3nx^2p_n(x) + 2p_n(x)]x^{-3(n+1)}f(x). \end{aligned}$$

Ahora bien,  $p_{n+1}(x) = x^3p_n'(x) - 3nx^2p_n(x) + 2p_n(x)$  es un polinomio cuyos términos son todos de grado  $\leq 2n = 2(n+1) - 2$ .

*Segundo caso:*  $x = 0$ . La derivada primera es:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0.$$

Supongamos que se verifica  $f^{(n)}(0) = 0$ . Entonces,

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(h)e^{-1/h^2}}{h^{3n+1}} = 0.$$

Es decir,  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$ .

7. Hallemos las primeras derivadas:

$$f'(x) = e^x - e^{-x}, \quad f''(x) = e^x + e^{-x}, \quad f'''(x) = e^x - e^{-x}.$$

El cálculo de estas derivadas permite conjeturar la fórmula:

$$f^{(n)}(x) = e^x + (-1)^n e^{-x}. \quad (1)$$

Demostremos (1) por inducción. El paso base ya está verificado, veamos el paso de inducción. Supongamos que la fórmula (1) es cierta para  $n$ , entonces:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' = (e^x + (-1)^n e^{-x})' \\ &= e^x - (-1)^n e^{-x} = e^x + (-1)^{n+1} e^x. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para  $n + 1$ .

8. Escribamos  $f(x) = x^{1/2}$ . Hallemos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}. \end{aligned}$$

Podemos expresar las anteriores derivadas en la forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2^2}x^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{2^3}x^{-5/2}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 5}{2^4}x^{-7/2}, \end{aligned}$$

lo cual permite conjeturar la fórmula:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-(2n-1)/2} \quad (n > 1). \quad (1)$$

Demostremos (1) por inducción. El paso base ya está verificado, veamos el paso de inducción. Supongamos que la fórmula (1) es cierta para  $n$ , entonces:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} \frac{-(2n-1)}{2} x^{-(2n-1)/2-1} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}} x^{-(2n+1)/2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2(n+1)-3)}{2^{n+1}} x^{-(2(n+1)-1)/2}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es cierta para  $n + 1$ .

9. El denominador es  $x^2(x+1)$  y la función está por tanto definida en  $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ . Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Se verifica  $1 = Ax(x + 1) + B(x + 1) + Cx^2$  e identificando coeficientes,  $1 = B, 0 = A + B$ , y  $0 = A + C$ . Resolviendo el sistema obtenemos  $A = -1, B = C = 1$ . La función dada se puede pues expresar en la forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \text{ con } f_1(x) = -\frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{1}{x^2}, f_3(x) = \frac{1}{x + 1}.$$

Entonces,  $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + f_2^{(n)}(x) + f_3^{(n)}(x)$ . Siguiendo el procedimiento estándar usado en otros apartados para la derivada enésima de funciones de la forma  $1/(x + a)$  deducimos fácilmente que:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left( -\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{n+1}{x^{n+2}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right).$$

### 4.14. Fórmula de Leibniz de la derivada enésima

1. Desarrollar la fórmula de Leibniz en el caso  $n = 4$ .
2. Siendo  $f(x) = \sqrt{x} \log(x+1)$  calcular  $f^{(4)}(1)$  usando la fórmula de Leibniz.
3. Siendo  $f(x) = e^x \sin x$  calcular  $f^{(4)}(\pi/2)$ .
4. Usando la fórmula de Leibniz, hallar la derivada enésima de la función  $f(x) = e^{\alpha x} x^2$ .
5. Demostrar la fórmula de Leibniz en los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ .
6. Demostrar la fórmula de Leibniz para la derivada enésima del producto: Sean  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones con derivadas hasta orden  $n$  en todos los puntos del intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Entonces, se verifica en  $I$  :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)},$$

en donde  $u^{(0)}$  denota  $u$  y  $v^{(0)}$  denota  $v$ .

7. Usando la fórmula de Leibniz, calcular  $y^{(n)}$  para  $y = xe^x$ .

**Solución.** 1. Tenemos

$$\begin{aligned} (uv)^{(4)} &= \binom{4}{0} u^{(4)} v^{(0)} + \binom{4}{1} u^{(3)} v^{(1)} + \binom{4}{2} u^{(2)} v^{(2)} + \binom{4}{3} u^{(1)} v^{(3)} \\ &+ \binom{4}{4} u^{(0)} v^{(4)} = u^{(4)} v + 4u''' v' + 6u'' v'' + 4u' v''' + uv^{(4)}. \end{aligned}$$

2. Llamemos  $u = \sqrt{x}$  y  $v = \log(x + 1)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} u &= x^{1/2}, u(1) = 1 & v &= \log(x + 1), v(1) = \log 2 \\ u' &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, u'(1) = \frac{1}{2} & v' &= (x + 1)^{-1}, v'(1) = \frac{1}{2} \\ u'' &= -\frac{1}{4}x^{-3/2}, u''(1) = -\frac{1}{4} & v'' &= -(x + 1)^{-2}, v''(1) = -\frac{1}{4} \\ u^{(3)} &= \frac{3}{8}x^{-5/2}, u^{(3)}(1) = \frac{3}{8} & v^{(3)} &= 2(x + 1)^{-3}, v^{(3)}(1) = \frac{1}{4} \\ u^{(4)} &= -\frac{15}{16}x^{-7/2}, u^{(4)}(1) = -\frac{15}{16} & v^{(4)} &= -6(x + 1)^{-4}, v^{(4)}(1) = -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(1) &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} u^{(4-k)}(1)v^{(k)}(1) \\ &= -\frac{15}{16} \log 2 + 4 \frac{3}{8} \frac{1}{2} + 6 \frac{-1}{4} \frac{-1}{4} + 4 \frac{1}{2} \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \\ &= -\frac{15}{16} \log 2 + \frac{12}{16} + \frac{6}{16} + \frac{8}{16} - \frac{6}{16} \\ &= \frac{20 - 15 \log 2}{16} = \frac{5}{4} - \frac{15}{16} \log 2. \end{aligned}$$

3. Llamemos  $u = e^x$  y  $v = \operatorname{sen} x$ . Entonces,

$$\begin{aligned} u &= e^x, u(\pi/2) = e^{\pi/2} & v &= \operatorname{sen} x, v(\pi/2) = 1 \\ u' &= e^x, u'(\pi/2) = e^{\pi/2} & v' &= \cos x, v'(\pi/2) = 0 \\ u'' &= e^x, u''(\pi/2) = e^{\pi/2} & v'' &= -\operatorname{sen} x, v''(\pi/2) = -1 \\ u^{(3)} &= e^x, u^{(3)}(\pi/2) = e^{\pi/2} & v^{(3)} &= -\cos x, v^{(3)}(\pi/2) = 0 \\ u^{(4)} &= e^x, u^{(4)}(\pi/2) = e^{\pi/2} & v^{(4)} &= \operatorname{sen} x, v^{(4)}(\pi/2) = 1. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(\pi/2) &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} u^{(4-k)}(\pi/2)v^{(k)}(\pi/2) \\ &= e^{\pi/2} + 0 + 6e^{\pi/2}(-1) + 0 + e^{\pi/2} = -4e^{\pi/2}. \end{aligned}$$

4. Llamando  $u(x) = e^{\alpha x}$  y  $v(x) = x^2$  obtenemos

$$\begin{cases} u^{(0)}(x) = e^{\alpha x} \\ u^{(1)}(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ u^{(2)}(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} \\ u^{(3)}(x) = \alpha^3 e^{\alpha x} \\ \dots \\ u^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x} \end{cases} \quad \begin{cases} v^{(0)}(x) = x^2 \\ v^{(1)}(x) = 2x \\ v^{(2)}(x) = 2 \\ v^{(3)}(x) = 0 \\ \dots \\ v^{(n)}(x) = 0 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} \alpha^n e^{\alpha x} x^2 + \binom{n}{1} \alpha^{n-1} e^{\alpha x} \cdot 2x + \binom{n}{2} \alpha^{n-2} e^{\alpha x} \cdot 2 \\ &= \alpha^n e^{\alpha x} x^2 + 2n\alpha^{n-1} e^{\alpha x} x + n(n-2)\alpha^{n-2} e^{\alpha x} \\ &= \alpha^{n-2} e^{\alpha x} (\alpha^2 x^2 + 2n\alpha x + n^2 - 2n). \end{aligned}$$

5. Tenemos  $(uv)' = u'v + uv'$ . Derivando:

$$\begin{aligned} (uv)'' &= ((uv)')' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' \\ &= u''v + 2u'v' + uv'' = \binom{2}{0} u^{(2)}v^{(0)} + \binom{2}{1} u^{(1)}v^{(1)} + \binom{2}{2} u^{(0)}v^{(2)}. \end{aligned}$$

Derivando de nuevo:

$$\begin{aligned} (uv)''' &= (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ &= \binom{3}{0} u^{(3)}v^{(0)} + \binom{3}{1} u^{(2)}v^{(1)} + \binom{3}{2} u^{(1)}v^{(2)} + \binom{3}{3} u^{(0)}v^{(3)}. \end{aligned}$$

6. La fórmula es cierta para  $n = 1$ , en efecto

$$\begin{aligned} (uv)^{(1)} &= (uv)' = u'v + uv' \\ &= \binom{1}{0} u^{(1)}v^{(0)} + \binom{1}{1} u^{(0)}v^{(1)} = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} u^{(1-k)}v^{(k)}. \end{aligned}$$

Supongamos que la fórmula es cierta para  $n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k+1)} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de índices y usando las conocidas fórmulas combinatorias

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} \\ &= \binom{n}{0} u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{(n-k+1)} v^{(k)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \binom{n}{n} u^{(0)} v^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{0} u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} u^{(0)} v^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la fórmula es cierta para  $n+1$ .

7. Llamando  $u = e^x$  y  $v = x$  obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(0)} = e^x \\ u^{(1)} = e^x \\ u^{(2)} = e^x \\ u^{(3)} = e^x \\ \dots \\ u^{(n)} = e^x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v^{(0)} = x \\ v^{(1)} = 1 \\ v^{(2)} = 0 \\ v^{(3)} = 0 \\ \dots \\ v^{(n)} = 0. \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \binom{n}{0} e^x x + \binom{n}{1} e^x \cdot 1 = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

## 4.15. Aplicaciones geométricas de la derivada

1. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva  $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .
2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva  $y = \cos x$  en el punto de abscisa  $x = \pi$ .
3. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la catenaria  $y =$



$\cosh(x/2)$ , en el punto de abscisa  $x = 2 \log 2$ .

4. Calcular el ángulo que forman las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , siendo  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = 1/x^2$ .

**Solución.** 1. Tenemos  $y(1) = 5$ . Derivando,  $y' = 3x^2 - 2x + 2$  con lo cual  $y'(1) = 3$ . La ecuación de la recta tangente es por tanto  $y - 5 = 3(x - 1)$ , o bien  $3x - y + 2 = 0$ .

La ecuación de la recta normal es  $y - 5 = (-1/3)(x - 1)$ , o bien  $x + 3y - 16 = 0$ .

2. Tenemos  $y(\pi) = -1$ . Derivando,  $y' = \sen x$  con lo cual  $y'(\pi) = 0$ . La ecuación de la recta tangente es por tanto  $y = -1$ , y la de la normal  $x = \pi$ .

3. Tenemos

$$y(2 \log 2) = \frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

Derivando,  $y' = (1/2) \sinh(x/2)$ , con lo cual

$$y'(2 \log 2) = \frac{1}{2} \frac{e^{\log 2} - e^{-\log 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{8}.$$

La ecuación de la recta tangente es por tanto

$$y - \frac{5}{4} = \frac{3}{8}(x - 2 \log 2), \text{ o bien } 3x - 8y + 10 - 6 \log 2 = 0.$$

La ecuación de la recta normal es

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{8}{3}(x - 2 \log 2), \text{ o bien } 32x - 12y - 15 - 64 \log 2 = 0.$$

4. Hallemos los puntos de corte. Para  $x \neq 0$ :

$$x^3 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Las derivadas son  $f'(x) = 3x^2$  y  $g'(x) = -2/x^3$ , con lo cual  $f'(1) = 3$  y  $g'(1) = -2$ . El ángulo  $\alpha$  que forman las curvas en el punto de abscisa  $x = 1$  es por tanto:

$$\alpha = \arctan \left| \frac{3 + 2}{1 + 3 \cdot (-2)} \right| = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

### 4.16. Aplicaciones físicas de la derivada

1. El espacio  $s$  recorrido en función del tiempo  $t$  está definido por la ecuación  $s = t \log(t + 1)$  ( $t$  es segundos y  $s$  en metros). Hallar la velocidad del movimiento cuando han transcurrido dos segundos.
2. Por el eje  $OX$  se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes de movimiento

$$x = 100 + 5t, \quad x = \frac{1}{2}t^2,$$

donde  $t \geq 0$ . ¿Con qué velocidad se alejaran estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro ( $x$  se da en centímetros y  $t$  en segundos)?

3. Un punto se mueve sobre la hipérbola  $y = \frac{10}{x}$  de tal manera, que su abscisa  $x$  aumenta uniformemente con la velocidad de una unidad por segundo. ¿Con qué velocidad variará su ordenada cuando el punto pase por la posición  $(5, 2)$ ?

**Solución.** 1. Derivando:  $s' = \log(t + 1) + \frac{t}{t + 1}$ . La velocidad en  $t = 2$ s es:

$$s'(2) = \log 3 + \frac{2}{3} \approx 1,76 \text{ m/s.}$$

2. En el momento de su encuentro, coinciden los espacios:

$$\frac{1}{2}t^2 = 100 + 5t \Leftrightarrow t^2 - 10t - 200 = 0,$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2} = \{20, -10\}.$$

Por hipótesis,  $t \geq 0$  y por tanto los móviles se encuentran en el instante  $t = 20$ . Las funciones velocidades son  $x' = 5$  para el primer móvil y  $x' = t$  para el segundo, y para  $t = 2$ ,  $x'(2) = 5$  y  $x'(2) = 20$ . Los móviles se alejan el uno del otro con una velocidad de  $20 - 5 = 15$  (cm/s).

3. Que la velocidad de la abscisa  $x$  sea constante e igual a 1 significa que  $x = t$  ( $t$  tiempo). La ley de movimiento de la ordenada es por tanto  $y = \frac{10}{t}$  y su velocidad,  $y' = -\frac{10}{t^2}$ . Entonces,  $y'(5) = -\frac{10}{25} = -0,4$ , es decir decrece con una velocidad de 0,4.

### 4.17. Derivadas infinitas y laterales

1. Hallar  $f'_+(0)$  si  $f(x) = \sqrt{x}$ .
2. Hallar  $f'_+(0)$  y  $f'_-(0)$  si  $f(x) = |\operatorname{sen} 2x|$ .

3. Calcular  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ 7x - 3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$
4. Calcular (cuando exista)  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = |x|$ .
5. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ . (b) Demostrar que  $f'$  es continua pero no derivable en 0.

6. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \sqrt{x[x]} - [x]$$

en  $x = 1$ , en donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ .

7. Demostrar que las funciones:

$$1) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad 2) g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

tienen en el punto  $x = 0$  derivada infinita.

**Solución.** 1. Tenemos

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

2. Tenemos

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\operatorname{sen} 2h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\operatorname{sen} 2h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen} 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = -2. \end{aligned}$$

3. Primer caso:  $x > 1$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando las conocidas reglas de derivación,  $f'(x) = 6x + 1$ .

Segundo caso:  $x < 1$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando las conocidas reglas de derivación,  $f'(x) = 7$ .

Tercer caso:  $x = 1$ . En todo intervalo abierto que contiene a 1 la función no es elemental. Aplicamos pues la definición de derivada. La función a la derecha y a la izquierda de 1 está expresada por fórmulas distintas, por tanto hallamos las derivadas por la derecha y por la izquierda.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h)^2 + (1+h) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (3h + 7) = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{7(1+h) - 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 7 = 7. \end{aligned}$$

Existe por tanto  $f'(1)$  y es igual a 7. Podemos pues concluir que

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 7 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

4. Sabemos que la función valor absoluto está definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Primer caso:  $x > 0$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando las conocidas reglas de derivación,  $f'(x) = 1$ .

Segundo caso:  $x < 0$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando las conocidas reglas de derivación,  $f'(x) = -1$ .

Tercer caso:  $x = 0$ . En todo intervalo abierto que contiene a 0 la función no es elemental. Aplicamos pues la definición de derivada. La función a la derecha y a la izquierda de 0 está expresada por fórmulas distintas, por tanto hallamos las derivadas por la derecha y por la izquierda.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1. \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

No coinciden las derivadas por la derecha y por la izquierda de  $f$  en 0, por tanto no existe  $f'(0)$ . Podemos pues concluir que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

5. (a) Primer caso:  $x \neq 0$ . Existe un intervalo abierto que contiene a  $x$  en el cual la función es elemental. Aplicando las conocidas reglas de derivación:

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^3 \left( \cos \frac{1}{x} \right) \frac{-1}{x^2} = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Segundo caso:  $x = 0$ . En todo intervalo abierto que contiene a 0 la función no es elemental. Aplicamos pues la definición de derivada.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \operatorname{sen} (1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \operatorname{sen} (1/h) = 0.$$

Hemos usado que el límite de una función que tiende a cero por otra acotada, también tiende a 0. La función  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y además

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) Aplicando la propiedad anteriormente mencionada:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0 = f'(0).$$

Es decir,  $f'$  es continua en 0. Veamos que  $f'$  no es derivable en 0.

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 \operatorname{sen} (1/h) - h \cos(1/h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3h \operatorname{sen} (1/h) - \cos(1/h)). \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $h \rightarrow 0$  entonces  $3h \operatorname{sen} (1/h) \rightarrow 0$  y  $\cos(1/h)$  es oscilante, en consecuencia no existe  $f''(0)$ .

6. En el intervalo abierto  $(0, 2)$  la función  $\lfloor x \rfloor$  está definida por

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Por tanto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Se verifica

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x} - 1) = 0, \end{aligned}$$

en consecuencia  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$ , por tanto  $f$  es continua en  $x = 1$ . Veamos si derivable en ese punto.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Dado que  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$  concluimos que  $f$  no es derivable en  $x = 1$ .

$$7. 1) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

$$2) g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty.$$

## 4.18. Derivación de funciones implícitas

- Hallar  $y'$  para la función implícita dada por  $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 0$ .
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$  trazada en el punto  $P(-9, -8)$ .
- Hallar  $y'$  para la función  $y$  dada en forma implícita por:

$$\operatorname{sen}(y - x^2) - \log(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$$

- Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en el punto  $P(x_0, y_0)$  es  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

**Solución.** 1. Derivando respecto de  $x$  :

$$\operatorname{sen} y + x(\cos y)y' + y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 0.$$

Queda  $(x \cos y + \operatorname{sen} x)y' = -y \cos x - \operatorname{sen} y$ . Por tanto,

$$y' = -\frac{y \cos x + \operatorname{sen} y}{x \cos y + \operatorname{sen} x}.$$

- Efectivamente, el punto  $P$  satisface la ecuación dada. Derivando respecto de  $x$  :

$$\frac{2x}{9} - \frac{2yy'}{8} = 0, \quad y' = \frac{8x}{9y}.$$

Particularizando en el punto  $P$ , obtenemos  $y'(-9) = 1$ . La ecuación de la recta tangente en  $P$  es por tanto  $y + 8 = 1(x + 9)$ , o bien  $x - y + 1 = 0$ .

3. Hallar  $y'$  para la función  $y$  dada en forma implícita por:

$$\operatorname{sen}(y - x^2) - \log(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$$

4. Derivando respecto de  $x$  y particularizando en  $P$ :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Quitando denominadores y ordenando:

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2.$$

Dividiendo entre  $a^2b^2$ :

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Pero el punto  $P$  pertenece a la elipse, por tanto el segundo miembro de la ecuación es igual a 1. Queda:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

## 4.19. Diferencial de una función

1. Hallar la diferencial de la función  $y = \sqrt[3]{x} + \cos x$ .
2. Hallar la diferencial y el incremento de la función  $y = x^3$  para  $x$  y  $dx$  genéricos.
3. Usando diferenciales, determinar aproximadamente en cuanto aumentará el área de un cuadrado cuando su lado aumenta de 4 cm a 4,1 cm.
4. Usando diferenciales, hallar aproximadamente  $\sqrt{3,98}$ .
5. Sea  $y = f(x)$  una función derivable en  $x$ . Demostrar que

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta y - dy|}{|dx|} = 0.$$

6. Usando diferenciales, calcular el valor aproximado del área de un círculo cuyo radio es igual a 3,02 cm.

7. Deducir la fórmula aproximada  $\sqrt[3]{x + dx} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , y calcular aproximadamente  $\sqrt[3]{10}$ .

**Solución.** 1.  $dy = f'(x)dx = \left( \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \operatorname{sen} x \right) dx$ .

2.  $dy = f'(x)dx = 3x^2 dx$ .

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 dx + 3xd^2x + d^3x - x^3 = 3x^2 dx + 3xd^2x + d^3x.$$

3. El área de un cuadrado de lado  $x$  es  $A = x^2$ . Entonces,  $\Delta A \approx dA = 2x dx$ . Para  $x = 4$  y  $dx = 0,1$ :  $\Delta A \approx dA = 2 \cdot 4 \cdot 0,1 = 0,8 \text{ cm}^2$ .

4. Sea  $y = \sqrt{x}$ . Su diferencial es  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Si  $x = 4$  y  $dx = -0,02$ , entonces,

$$\Delta y = \sqrt{4 + (-0,02)} - \sqrt{4} = \sqrt{3,98} - 2.$$

Obtenemos:  $\sqrt{3,98} = 2 + \Delta y \approx 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0,02) = 2 - 0,005 = 1,995$ .

5. Tenemos las implicaciones:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta y - dy|}{|dx|} = 0. \end{aligned}$$

6. Usando la fórmula del área de un círculo  $A = \pi r^2$  y haciendo  $r = 3$ ,  $dr = 0,02$ :  $\Delta A \approx dA = 2\pi r dr = 2\pi \cdot 3 \cdot 0,02 = 0,12\pi$ .

7. Sea  $y = \sqrt[3]{x}$ , entonces:

$$\Delta y = \sqrt[3]{x + dx} - \sqrt[3]{x}, \quad dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Por tanto,  $\Delta y \approx dy$  equivale a:

$$\sqrt[3]{x + dx} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}. \quad (1)$$

Eligiendo  $x = 8$ ,  $dx = 2$  y usando (1):

$$\sqrt[3]{10} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{2}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$



## 4.20. Derivabilidad según parámetros

Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2} + \beta & \text{si } x \geq 1 \\ \arctan(\log x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sin x + \alpha & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

donde  $\arctan t \in (-\pi/2, \pi/2)$  para todo  $t$ . Analizar la derivabilidad de  $f$  en cada punto de su dominio de definición, según los valores de  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** *Primer caso:*  $x \in (1, +\infty)$ . Existe un intervalo abierto  $I \subset (1, +\infty)$  que contiene a  $x$  en donde la función  $f$  está definida, es elemental y viene dada por

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{t-1}{t^2} + \beta.$$

Aplicando conocidos teoremas de derivación:

$$f'(t) = \frac{1 \cdot t^2 - 2t(t-1)}{t^4} = \frac{-t^2 + 2t}{t^4} = \frac{-t + 2}{t^3}.$$

Podemos pues concluir que  $f$  es derivable en  $x$  y que

$$f'(x) = \frac{-x + 2}{x^3}.$$

*Segundo caso:*  $x \in (0, 1)$ . Existe un intervalo abierto  $J \subset (0, 1)$  que contiene a  $x$  en donde la función  $f$  está definida, es elemental y viene dada por

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \arctan(\log t).$$

Aplicando conocidos teoremas de derivación:

$$f'(t) = \frac{1}{1 + \log^2 t} \cdot \frac{1}{t}.$$

Podemos pues concluir que  $f$  es derivable en  $x$  y que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{1}{x}.$$

*Tercer caso:*  $x \in (-\infty, 0)$ . Procedemos de manera análoga a los casos anteriores. Existe un intervalo abierto  $K \subset (-\infty, 0)$  que contiene a  $x$  en donde la función  $f$  está definida, es elemental y viene dada por  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \sin t + \alpha$ . De nuevo, aplicando conocidos teoremas de derivación,  $f'(t) = \cos t$ .

Podemos pues concluir que  $f$  es derivable en  $x$  y que  $f'(x) = \cos x$ .

*Cuarto caso:*  $x = 1$ . La función no es elemental en ningún intervalo abierto que contiene a 1, por tanto aplicaremos a este punto la definición de derivabilidad. Para que sea derivable ha de ser continua, veamos cuando ocurre.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan(\log x) = \arctan 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{x^2} + \beta \right) = \beta.\end{aligned}$$

Existe pues  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  si y sólo si  $\beta = 0$ , siendo en éste caso  $f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (y por tanto continua en 1). Es decir, para que  $f$  sea derivable en 1, obligatoriamente  $\beta = 0$ . Analicemos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{(1+h)^2} - 0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+h)^2} = 1.\end{aligned}$$

Usando  $\arctan \epsilon \sim \epsilon$  y  $\log(1 + \epsilon) \sim \epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctan(\log(1+h))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+h)}{h} = 1.\end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  sólo es derivable en  $x = 1$  cuando  $\beta = 0$ , siendo  $f'(1) = 1$ .

*Quinto caso:*  $x = 0$ . Como antes, la función no es elemental en ningún intervalo abierto que contiene a 0, por tanto aplicaremos a este punto la definición de derivabilidad. Veamos primeramente cuando es continua.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \alpha) = \alpha, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(\log x) = \arctan(-\infty) = -\pi/2.\end{aligned}$$

Como  $f(0) = \alpha$ , la función es continua en 0 si y sólo si  $\alpha = -\pi/2$ . Veamos si en este caso es derivable.

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{h} = 1, \\ f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\log h) + \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty.\end{aligned}$$

No existe  $f'_+(0)$  finita y por tanto,  $f$  no es derivable en 0. De todos los casos analizados podemos concluir que para todo  $\alpha$  y para todo  $\beta$ ,  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ , es derivable en 1 si y sólo si  $\beta = 0$ , y no es derivable en 0 para ningún  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 4.21. Familia de funciones de clase 1

Sea  $C$  el conjunto de las funciones  $f$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  de clase 1 y que cumplen las condiciones siguientes:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(f(x)) \cdot f'(x) = 1, \quad f'(0) > 0, \quad f(1) = 1.$$

Se pide:

1. Comprobar que la función identidad  $I$  pertenece a  $C$ .
2. Verificar que  $f \in C \Rightarrow f \circ f = I$ .
3. Demostrar que  $f \in C \Rightarrow f$  es creciente.
4. Demostrar que  $I$  es el único elemento de  $C$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. La función identidad es  $I(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Dado que  $I'(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  se verifica:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I'(I(x)) \cdot I'(x) = I'(x) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1, \quad I'(0) = 1 > 0, \quad I(1) = 1.$$

Es decir,  $f \in C$ .

2. Por el teorema de la derivada de la función compuesta,  $(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ . Por las hipótesis dadas,  $(f \circ f)'(x) = 1$  lo cual implica que  $f \circ f$  ha de ser de la forma  $(f \circ f)(x) = x + k$  con  $k$  constante. Usando la condición  $f(1) = 1$ , obtenemos  $(f \circ f)(1) = f[f(1)] = f(1) = 1$ . Por otra parte:

$$(f \circ f)(1) = f[f(1)] = f(1 + k) = (1 + k) + k = 1 + 2k.$$

Es decir,  $1 = 1 + 2k$  o equivalentemente  $k = 0$ , por tanto,  $f \circ f = I$ .

3. De la condición  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ , deducimos que  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $f'$  es continua en  $\mathbb{R}$ , se verifica  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  o bien  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (en caso contrario iría en contradicción con el teorema de Bolzano). Dado que  $f'(0) > 0$  ha de ser necesariamente  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  lo cual implica que  $f$  es creciente (estrictamente) en  $\mathbb{R}$ .

4. Sea  $f \in C$ , veamos que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se verifica  $f(x) = x$ . En efecto, usando los apartados 2. y 3. tenemos

$$x > f(x) \Rightarrow f(x) > f(f(x)) = (f \circ f)(x) = I(x) = x \text{ (absurdo),}$$

$$x < f(x) \Rightarrow f(x) < f(f(x)) = (f \circ f)(x) = I(x) = x \text{ (absurdo).}$$

Para todo  $x \in \mathbb{R}$  no puede ocurrir ni  $x > f(x)$  ni  $x < f(x)$  y por tanto ha de ser necesariamente  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Concluimos que  $C = \{I\}$ .

## 4.22. Desigualdad y número de raíces

(a) Demostrar la desigualdad:

$$\frac{1}{e} \geq \frac{\log x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

(b) Hallar razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación

$$e(\log x)^2 = 2x.$$

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Como  $x > 0$ , se verifican las equivalencias:

$$\frac{1}{e} \geq \frac{\log x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{e} \geq \log x \Leftrightarrow \frac{x}{e} - \log x \geq 0. \quad (1)$$

Definamos la función:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{e} - \log x$$

y estudiemos sus posibles extremos. Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x - e}{ex} = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Si  $x \in (0, e)$  se verifica  $x - e < 0$  y  $ex > 0$ , por tanto  $f'(x) < 0$ . Es decir, en  $(0, e)$  la función es decreciente. Si  $x \in (e, +\infty)$  se verifica  $x - e > 0$  y  $ex > 0$ , por tanto  $f'(x) > 0$ . Es decir, en  $(e, +\infty)$  la función es creciente. Deducimos que la función tiene un mínimo absoluto en  $x = e$ , siendo éste mínimo  $f(e) = 0$ . Esto implica que se verifica la última desigualdad de (1) y en consecuencia se verifica la igualdad dada.

(b) La igualdad  $e(\log x)^2 = 2x$  sólo tiene sentido para  $x > 0$ . Definamos la función:

$$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = e(\log x)^2 - 2x.$$

Ésta función es continua para todo  $x > 0$  y verifica:

$$g(1/e) = e(-1)^2 - \frac{2}{e} = \frac{e^2 - 2}{e} > 0, \quad g(1) = 0 - 2 = -2 < 0.$$

Como consecuencia del teorema de Bolzano, existe un  $\xi \in (1/e, 1)$  tal que  $g(\xi) = 0$ , es decir la ecuación dada tiene al menos una solución. Veamos si ésta solución es única. La derivada de  $g$  es:

$$g'(x) = 2e(\log x) \cdot \frac{1}{x} - 2 = 2 \left( \frac{e \log x}{x} - 1 \right).$$

Ahora bien, como  $x > 0$  se verifican las equivalencias:

$$\frac{e \log x}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{e \log x}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e} \geq \frac{\log x}{x}. \quad (2)$$

Según el apartado (a) las tres desigualdades de (2) son cierta y por tanto  $g'(x) \leq 0$  para todo  $x > 0$  siendo  $g'(x) = 0$  sólo para  $x = e$ . La función  $g$  es estrictamente decreciente en  $(0, +\infty)$  de lo cual se deduce que la ecuación dada tiene una única solución real.

### 4.23. Derivada simétrica

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se define la derivada simétrica de  $f$  en un punto  $x_0$  y se designa por  $f'_s(x_0)$ , al siguiente límite si existe y es finito

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(a) Estudiar la existencia en el punto  $x_0 = 0$  de la derivada simétrica, y calcularla en los casos que exista, para las siguientes funciones

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) Demostrar que si existe la derivada ordinaria  $f'(x_0)$  de la función  $f$  en el punto  $x_0$ , entonces existe la derivada simétrica  $f'_s(x_0)$ , y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración o construyendo un contraejemplo.

(c) Demostrar que si existen las derivadas a la derecha y a la izquierda  $f'_+(x_0)$  y  $f'_-(x_0)$  de la función  $f$  en el punto  $x_0$ , entonces existe la derivada simétrica  $f'_s(x_0)$  y hallar la relación entre ambas. Enunciar el recíproco y estudiar su validez, dando una demostración o construyendo un contraejemplo.

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Tenemos

$$(f_1)'_s(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^{-h}}{2h} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + e^{-h}}{2} = 1.$$

Hemos usado la regla de L'Hopital.

$$(f_2)'_s(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$(f_3)'_s(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - (-h) \sin \left(-\frac{1}{h}\right)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Hemos usado que el producto de un infinitésimo por una función acotada es también un infinitésimo. Podemos concluir que existen las derivadas simétricas de las tres funciones dadas en  $x_0 = 0$ .

(b) Podemos expresar

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h}. \end{aligned}$$

Tomando límites y teniendo en cuenta que existe  $f'(x_0)$ :

$$f'_s(x_0) = \frac{1}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0) = f'(x_0).$$

Es decir, si existe la derivada ordinaria de una función en un punto, entonces existe también su derivada simétrica en dicho punto y ambas coinciden. El enunciado recíproco es: *Si existe la derivada simétrica  $f'_s(x_0)$ , entonces existe la derivada ordinaria  $f'(x_0)$ .* Este enunciado es falso. En efecto, es bien sabido que para la función  $f_2(x) = |x|$  no existe la derivada  $f'_2(0)$ , sin embargo existe  $(f'_2)_s(0)$  como se demostró en el apartado anterior.

(c) Por hipótesis existen  $f'_+(x_0)$  y  $f'_-(x_0)$ . Veamos que existe  $f'_s(x_0)$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \\ &= \frac{1}{2}f'_+(x_0) + \frac{1}{2}f'_-(x_0). \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que  $-h < 0$ . Razonando de manera análoga obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \dots = \frac{1}{2}f'_-(x_0) + \frac{1}{2}f'_+(x_0).$$

Hemos demostrado por tanto que si existen  $f'_+(x_0)$  y  $f'_-(x_0)$ , entonces existe  $f'_s(x_0)$  y además  $f'_s(x_0) = (1/2)(f'_+(x_0) + f'_-(x_0))$ . El enunciado recíproco es: *Si existe la derivada simétrica  $f'_s(x_0)$ , entonces existen las derivadas  $f'_+(x_0)$  y  $f'_-(x_0)$ .* Este enunciado es falso. En efecto, para la función  $f_3(x)$  del apartado (a) existe la derivada simétrica en 0 según demostramos. Ahora bien,

$$\frac{f_3(0 + h) - f_3(0)}{h} = \frac{h \sin(1/h) - 0}{h} = \sin(1/h).$$

Si  $h \rightarrow 0^+$  entonces  $1/h \rightarrow +\infty$ , por tanto no existe  $(f'_3)_+(0)$ .

## 4.24. Derivabilidad absoluta

Sea  $f$  una función real y sea  $a$  un punto interior del dominio de  $f$ . Diremos que  $f$  es absolutamente derivable en  $a$  si la función  $|f|$  es derivable en  $a$ . Estudiar si son ciertas o no, las siguientes proposiciones:

- a.- Si  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .
- b.- Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ .
- c.- Si  $f$  es derivable en  $a$ , y  $f(a) \neq 0$  entonces  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ .
- d.- Si  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ , y  $f(a) \neq 0$  entonces  $f$  es derivable en  $a$ .
- e.- Si  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ , continua en  $a$  y  $f(a) \neq 0$  entonces  $f$  es derivable en  $a$ .
- f.- Supongamos que  $f(a) = 0$  y que  $f$  es derivable en  $a$ . Entonces  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ , si y sólo si  $f'(a) = 0$ .
- g.- Si  $f$  y  $g$  son absolutamente derivable en  $a$  entonces  $f \cdot g$  (producto) es absolutamente derivable en  $a$ .
- h.- Si  $f$  y  $g$  son absolutamente derivable en  $a$  entonces  $f + g$  (suma) es absolutamente derivable en  $a$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** a.- La proposición es falsa. En efecto, consideremos la función:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Entonces,  $|f|(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  con lo cual  $|f|'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y en particular  $|f|'(0) = 0$ . La función  $f$  es pues absolutamente derivable en  $a = 0$ , sin embargo es claro que no es continua en  $a$ .

b.- La proposición es falsa. En efecto, consideremos la función  $f(x) = x$  y el punto  $a = 0$ . Entonces  $f'(0) = 1$ , sin embargo  $|f|(x) = |x|$  no es derivable en 0 como bien es conocido.

c.- La proposición es cierta. En efecto, si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces es continua en  $a$ . Al ser  $f(a) \neq 0$  y por una conocida propiedad, existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(a)$  en  $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Si  $f(a) > 0$ , entonces  $|f| = f$  en  $I$  y por tanto  $|f|'(a) = f'(a)$ . Si  $f(a) < 0$ , entonces  $|f| = -f$  en  $I$  y por tanto  $|f|'(a) = -f'(a)$ . Concluimos que  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ .

d.- La proposición es falsa. En efecto, consideremos la función  $f$  del apartado a.- y  $a = 0$ . Esta función es absolutamente derivable en  $a$  según vimos

y cumple  $f(a) \neq 0$ . Sin embargo no es derivable en  $a$  al no ser continua en este punto.

e.- La proposición es cierta. En efecto, si  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) \neq 0$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(a)$  en  $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Si  $f(a) > 0$ , entonces  $f = |f|$  en  $I$  y por ser  $f$  absolutamente derivable en  $a$ ,  $f'(a) = |f'(a)|$ . Si  $f(a) < 0$ , entonces  $f = -|f|$  en  $I$  y por ser  $f$  absolutamente derivable en  $a$ ,  $f'(a) = -|f'(a)|$ . Es decir,  $f$  es derivable en  $a$ .

f.- La proposición es cierta. En efecto, sea  $f(a) = 0$  y  $f$  derivable en  $a$ . Veamos que  $f$  es absolutamente derivable en  $a \Leftrightarrow f'(a) = 0$ .

$\Rightarrow$ ) Por ser  $f$  derivable en  $a$  y  $f(a) = 0$ , existe y es finito:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{h}. \quad (1)$$

Por ser  $f$  absolutamente derivable en  $a$  y  $f(a) = 0$ , existe y es finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h)|}{h}. \quad (2)$$

Tomando valor absoluto en (1):

$$|f'(a)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h)|}{|h|}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |f'_+(a)| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(a+h)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(a+h)|}{h}, \\ |f'_-(a)| &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(a+h)|}{|h|} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(a+h)|}{h}. \end{aligned}$$

Por (2), existe  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h)|/h$  y por tanto los límites por la derecha e izquierda coinciden. Es decir,

$$|f'(a)| = -|f'(a)| \Rightarrow 2|f'(a)| = 0 \Rightarrow |f'(a)| = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

$\Leftarrow$ ) Por hipótesis  $f(a) = 0$  y  $f$  es derivable en  $a$  con  $f'(a) = 0$ . Veamos que  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ . En efecto,  $f(a) = 0$  y  $f'(a) = 0$  implica que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)/h = 0$ . Entonces, dado un  $\epsilon > 0$  se verifica  $|f(a+h)/h| < \epsilon$  para  $h$  suficientemente próximo a 0. Ahora bien,

$$\left| \frac{|f(a+h)|}{h} \right| = \left| \frac{f(a+h)}{h} \right|.$$



Se deduce que  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h)|/h = 0$ , es decir,  $f$  es absolutamente derivable en  $a$ .

g.- La proposición es cierta. En efecto, si  $f$  y  $g$  son absolutamente derivables en  $a$ , las funciones  $|f|$  y  $|g|$  son derivables en  $a$ . Como el producto de funciones derivables es derivable,  $|f||g| = |fg|$  es derivable en  $a$ . Es decir,  $fg$  es absolutamente derivable en  $a$ .

h.- La proposición es falsa. En efecto, elijamos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En un entorno de 0 tenemos  $|f(x)| = x + 1$  y  $|g(x)| = -x + 1$  lo cual implica que  $f$  y  $g$  son absolutamente derivables en 0. Por otra parte:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por tanto,  $|f(x) + g(x)| = |2x|$ , que no es derivable en  $a = 0$ , basta usar el hecho de que  $|x|$  no es derivable en  $a = 0$ .

### 4.25. Ecuación diferencial y fórmula de Leibniz

Dada la función  $y = (\text{Argsh } x)^2$ ,

- a) Demostrar que se verifica la igualdad  $(1 + x^2)y'' + xy' = 2$ .
- b) Utilizando la igualdad anterior y la fórmula de Leibniz hallar una expresión que proporcione la derivada de cualquier orden en  $x = 0$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Minas, UPM).

**Solución.** a) Tenemos  $y' = 2(\text{Argsh } x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  o bien  $\sqrt{1+x^2}y' = 2\text{Argsh } x$ .

Derivando la última expresión:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y' + \sqrt{1+x^2}y'' = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Multiplicando ambos miembros por  $\sqrt{1+x^2}$  obtenemos:

$$(1+x^2)y'' + xy' = 2. \quad (1)$$

b) La fórmula de Leibniz para la derivada de orden  $n - 2$  del producto de dos funciones  $u$  y  $v$  es:

$$(uv)^{(n-2)} = u^{(n-2)}v + \binom{n-2}{1}u^{(n-3)}v' + \binom{n-2}{2}u^{(n-4)}v'' + \dots + uv^{(n-2)}.$$

Eligiendo  $u = y''$ ,  $v = 1 + x^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} (y''(1+x^2))^{(n-2)} &= y^{(n)}(1+x^2) + \binom{n-2}{1} y^{(n-1)} 2x + \binom{n-2}{2} y^{(n-2)} 2 \\ &\quad + 0 + \dots + 0. \end{aligned}$$

Para  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} (y''(1+x^2))^{(n-2)}(0) &= y^{(n)}(0) + 2 \binom{n-2}{2} y^{(n-2)}(0) \\ &= y^{(n)}(0) + (n-2)(n-3) y^{(n-2)}(0). \quad (2) \end{aligned}$$

Eligiendo ahora  $u = y'$ ,  $v = x$  :

$$(y'x)^{(n-2)} = y^{(n-1)}x + \binom{n-2}{1} y^{(n-2)} 1 + 0 + \dots + 0.$$

Para  $x = 0$  :

$$(y'x)^{(n-2)}(0) = \binom{n-2}{1} y^{(n-2)}(0) = (n-2) y^{(n-2)}(0). \quad (3)$$

Derivando  $n-2$  veces la igualdad (1), sustituyendo  $x = 0$  y usando (2) y (3):

$$y^{(n)}(0) + (n-2)(n-3) y^{(n-2)}(0) + (n-2) y^{(n-2)}(0) = 0.$$

Despejando  $y^{(n)}(0)$  obtenemos  $y^{(n)}(0) = -(n-2)^2 y^{(n-2)}(0)$ . Por tanto, conociendo  $y'(0)$ ,  $y''(0)$  tendremos la fórmula que nos da la derivada de orden  $n$  de  $y$  en  $x = 0$ . Del apartado a) deducimos que  $y'(0) = 0$  y que  $y''(0) = 2$ . Esto implica que las derivadas de orden impar son todas nulas. Hallemos las de orden par:

$$\begin{aligned} y''(0) &= 2, \\ y^{(4)}(0) &= -(4-2)^2 2 = -2^2 2, \\ y^{(6)}(0) &= -(6-2)^2 (-2^2 2) = 4^2 2^2 2, \\ y^{(8)}(0) &= -(8-2)^2 (4^2 2^2 2) = -6^2 4^2 2^2 2, \\ &\dots \\ y^{(n)}(0) &= (-1)^{\frac{n}{2}+1} 2(n-2)^2 (n-4)^2 \dots \cdot 2^2. \end{aligned}$$

Podemos pues expresar  $y^{(n)}(0)$  ( $n \geq 1$ ) de la siguiente manera:

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}+1} 2((2n-2)!!)^2 & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$$

## Capítulo 5

# Teoremas del valor medio

### 5.1. Teorema de Rolle

1. Verificar la validez del Teorema de Rolle para la función

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

en el intervalo  $[-1, 2]$ . Hallar el  $c$  o los  $c$  correspondientes.

2. Verificar la validez del Teorema de Rolle para la función  $f(x) = \log(\sin x)$  en el intervalo  $[\pi/6, 5\pi/6]$

3. Aplicar el Teorema de Rolle para demostrar que para todo  $m \in \mathbb{R}$  la ecuación  $2x^5 + x + m = 0$  no puede tener dos soluciones reales.

4. Demostrar el teorema de Rolle:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Supongamos que se verifica: (i)  $f$  es continua en  $[a, b]$ . (ii)  $f$  es derivable en  $(a, b)$ . (iii)  $f(a) = f(b)$ . Entonces, existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

5. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ .

6. Demostrar que la ecuación  $x^3 - 3x + \alpha = 0$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo  $(0, 1)$ .

7. Sea  $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$  en donde  $m, n$  son enteros positivos. Sin hallar  $f'(x)$  demostrar que la ecuación  $f'(x) = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(0, 1)$ .

8. Se considera el polinomio  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  :

$$p(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Demostrar que si  $x_0$  es una raíz positiva de  $p(x)$ , entonces el polinomio  $a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$  tiene una raíz positiva menor que  $x_0$ .

9. Sin calcular la derivada de la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

establecer cuantas raíces tiene  $f'(x)$  e indicar en qué intervalos están.

10. Demostrar que la función  $f(x) = x^n + px + q$  con  $n \geq 2$  entero y  $p, q$  reales no puede tener más de dos soluciones reales siendo  $n$  par, ni más de tres siendo  $n$  impar.

**Solución.** 1. Veamos que se verifican las hipótesis del teorema.

(i)  $f$  es evidentemente continua en  $[-1, 2]$  (teorema de continuidad de las funciones elementales).

(ii)  $f$  es derivable en  $(-1, 2)$  (teoremas de derivación de funciones elementales) siendo su derivada  $f'(x) = 3x^2 + 8x - 7$ .

(iii)  $f(-1) = \dots = 0$  y  $f(2) = \dots = 0$ , tenemos por tanto  $f(-1) = f(2)$ .

Como consecuencia del Teorema de Rolle existe al menos un  $c \in (-1, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Procedamos a hallar estos valores de  $c$ :

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 + 8c - 7 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{-8 \pm \sqrt{148}}{6} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{37}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{37}}{3}.$$

Por tanto  $c = \frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \approx 0,69$  o  $c = \frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \approx -3,36$ . El primer  $c$  pertenece al intervalo  $(-1, 2)$  y el segundo, no.

2. Veamos que se verifican las hipótesis del teorema.

(i) Para todo  $x \in [\pi/6, 5\pi/6]$  tenemos  $\sin x > 0$  por tanto  $f(x) = \log(\sin x)$  está definida en dicho intervalo y es continua por el teorema de continuidad de las funciones elementales.

(ii)  $f$  es derivable en  $(\pi/6, 5\pi/6)$  (teoremas de derivación de funciones elementales) siendo su derivada  $f'(x) = \cos x / \sin x$ .

(iii)  $f(\pi/6) = \log \sin(\pi/6) = \log(1/2)$  y por otra parte  $f(5\pi/6) = \log \sin(5\pi/6) = \log(1/2)$ , por tanto  $f(\pi/6) = f(5\pi/6)$ .

Como consecuencia del Teorema de Rolle existe al menos un  $c \in (\pi/6, 5\pi/6)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Procedamos a hallar estos valores de  $c$  en tal intervalo:

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos c}{\sin c} = 0 \Leftrightarrow \cos c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2}.$$

3. Supongamos que la ecuación dada tuviera dos soluciones reales  $a, b$  con  $a < b$ . Consideremos la función  $f(x) = 2x^5 + x + m$  definida en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, tendríamos  $f(a) = f(b) = 0$  y es claro que  $f$  cumple las otras dos hipótesis del Teorema de Rolle. En consecuencia existiría un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , es decir existiría un  $c \in (a, b)$  tal que  $10c^4 + 1 = 0$ . Pero esto es absurdo pues el primer miembro es un número mayor que 0.

Es decir, si suponemos que la ecuación dada tiene dos soluciones reales llegamos a un absurdo. Se concluye pues que la ecuación no puede tener dos

soluciones reales.

4. Por el teorema de Weierstrass, la función  $f$  tiene un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo  $[a, b]$ . Si ambos se alcanzan en los extremos del intervalo, llamemos  $K = f(a) = f(b)$ . Entonces  $K \leq f(x) \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$  lo cual implica que  $f(x) = K$  (función constante en  $[a, b]$ ) y en consecuencia  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Si alguno de ellos se alcanza en un  $c \in (a, b)$  entonces tenemos en  $c$  un extremo relativo, con lo cual  $f'(c) = 0$ . Queda pues demostrado el teorema.

5. La función  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$  es elemental y está definida en  $\mathbb{R}$ , por tanto es continua en  $\mathbb{R}$  (en particular en  $[1, 2]$ ). Por otra parte, aplicando un conocido teorema de derivación:

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}} \quad (\text{si } x^2 - 3x + 2 \neq 0).$$

Pero  $x^2 - 3x + 2 = 0$  para  $x = 2$  o  $x = 1$ . Es decir,  $f$  es derivable en  $(1, 2)$ . Además,  $f(1) = f(2)$  (ambos 0). Como consecuencia del teorema de Rolle existe un  $c \in (1, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$  o equivalentemente

$$\exists c \in (1, 2) : \frac{2c - 3}{3\sqrt[3]{(c^2 - 3c + 2)^2}} = 0.$$

La igualdad anterior se cumple para  $c = 3/2$  (que pertenece a  $(1, 2)$ ).

6. Supongamos que la ecuación tuviera dos soluciones  $a, b$  con  $0 < a < b < 1$  y consideremos la función

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x + \alpha.$$

La función  $f(x) = x^3 - 3x - \alpha$  es claramente continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además, se verificaría  $f(a) = f(b) = 0$ . Como consecuencia del teorema de Rolle existiría un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , es decir  $3c^2 - 3 = 0$  cuyas soluciones son  $c = 1, c = -1$ . Pero esto contradice

$$0 < a < c < b < 1.$$

Concluimos que la ecuación dada no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo  $(0, 1)$ .

7. La función  $f$  es polinómica y por tanto, continua en  $[0, 1]$  y derivable en  $(0, 1)$ . Además  $f(0) = f(1)$  (ambos igual a 1). Como consecuencia del teorema de Rolle existe un  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

8. La función  $p(x)$  es polinómica y por tanto continua en  $[0, x_0]$  y derivable en  $(0, x_0)$ . Además  $p(0) = p(x_0)$  (ambos iguales a 0). Como consecuencia del teorema de Rolle, existe un  $c \in (0, x_0)$  tal que  $p'(c) = 0$ , o equivalentemente

$$a_1 + 2a_2c + \dots + na_n c^{n-1} = 0,$$

lo cual implica que  $a_1 + 2a_2x + \dots + na_n x^{n-1}$  tiene una raíz positiva menor que  $x_0$ .

9. Se verifica  $f(1) = f(2) = f(4) = f(4) = 0$  y la función  $f$  al ser polinómica es derivable (y por tanto continua) en  $\mathbb{R}$ . Se verifican por tanto las hipótesis del teorema de Rolle para la función  $f$  en los intervalos  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  y  $[3, 4]$ . Como consecuencia existen  $c_1 \in (1, 2)$ ,  $c_2 \in (2, 3)$  y  $c_3 \in (3, 4)$  tales que  $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$ . Es decir,  $f'(x)$  tiene al menos tres raíces reales y dado que es polinomio de tercer grado, tiene exactamente 3.

10. La función  $f$  es polinómica, por tanto continua en todo intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en todo intervalo abierto  $(a, b)$ . Sea  $n$  par y supongamos que  $f$  tuviera tres raíces reales  $r_1 < r_2 < r_3$ . Se verificarían las hipótesis del teorema de Rolle para  $f$  en los intervalos  $[r_1, r_2]$  y  $[r_2, r_3]$ . Por tanto existirían  $c_1 \in (r_1, r_2)$ ,  $c_2 \in (r_2, r_3)$  tales que  $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$  siendo  $c_1 \neq c_2$ . Pero

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow nx^{n-1} + p = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n-1]{-p/n},$$

y al ser  $n - 1$  impar, la raíz  $\sqrt[n-1]{-p/n}$  es única (contradicción).

Sea  $n$  impar y supongamos que  $f$  tuviera cuatro raíces reales  $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ . Se verificarían las hipótesis del teorema de Rolle para  $f$  en los intervalos  $[r_1, r_2]$ ,  $[r_2, r_3]$  y  $[r_3, r_4]$ . Por tanto existirían  $c_1 \in (r_1, r_2)$ ,  $c_2 \in (r_2, r_3)$ ,  $c_3 \in (r_3, r_4)$  tales que  $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$  siendo  $c_1, c_2, c_3$  distintos dos a dos. Pero de nuevo,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow nx^{n-1} + p = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n-1]{-p/n},$$

y al ser  $n$  par, la raíz  $\sqrt[n-1]{-p/n}$  tiene a lo sumo dos soluciones (contradicción).

## 5.2. Teorema de Lagrange

1. Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Lagrange para la función  $f(x) = x - x^3$  en el intervalo  $[-2, 1]$ . Hallar el  $c$  o los  $c$  correspondientes.

2. Aplicar el teorema de Lagrange para acotar el error que se comete al tomar 100 como valor aproximado de  $\sqrt{10\,001}$ .
3. Demostrar que  $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$  para todo  $x, y$  números reales, usando el teorema del valor medio de Lagrange.
4. Demostrar el teorema del valor medio de Lagrange:  
Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Supongamos que se verifica:  
(i)  $f$  es continua en  $[a, b]$ . (ii)  $f$  es derivable en  $(a, b)$ .  
Entonces, existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .
5. Verificar la validez del teorema de Lagrange para la función  $f(x) = x^{4/3}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .
6. En el segmento de la parábola  $y = x^2$  comprendido entre los puntos  $A(1, 1)$  y  $B(3, 9)$  hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda  $AB$ .
7. Aplicar el teorema de Lagrange para demostrar la fórmula

$$\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x = h \cos c \quad (x < c < x + h).$$

8. Si  $f$  es derivable en  $[0, +\infty)$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A$ , calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

9. Demostrar que si  $f'(x) = 0$  en un intervalo  $(a, b)$  entonces  $f$  es constante en  $(a, b)$ .

**Solución.** 1. Veamos que se verifican las hipótesis del teorema. (i)  $f$  es evidentemente continua en  $[-2, 1]$  (teorema de continuidad de las funciones elementales). (ii)  $f$  es derivable en  $(-2, 1)$  (teoremas de derivación de funciones elementales) siendo su derivada  $f'(x) = 1 - 3x^2$ . Como consecuencia del Teorema de Lagrange, existe al menos un  $c \in (-2, 1)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}.$$

Procedamos a hallar estos valores de  $c$ :

$$\begin{aligned} f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} &\Leftrightarrow 1 - 3c^2 = -2 \Leftrightarrow c^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \vee c = -1. \end{aligned}$$

El primer  $c$  no pertenece al intervalo  $(-2, 1)$  y el segundo, sí.

2. Consideremos la función  $f : [10\,000, 10\,001] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Ésta función es elemental y está definida en el intervalo cerrado elegido, por tanto

es continua en él. Por un conocido teorema de derivación,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  derivada que existe en el correspondiente intervalo abierto. De acuerdo con el teorema de Lagrange existe un  $c$  en el intervalo abierto  $(10000, 10001)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(10\,001) - f(10\,000)}{10\,001 - 10\,000}, \text{ o bien } \frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{10\,001} - 100.$$

Dado que  $10\,000 < c$  se verifica:

$$\sqrt{10\,001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10\,000}} < \frac{1}{2 \cdot 100} = \frac{1}{200} = 0,005.$$

El error es por tanto menor que 0,005.

3. Si  $x = y$  queda  $|\sen x - \sen y| = |x - y| = 0$  y por tanto la desigualdad es válida. Supongamos que  $x < y$ . Aplicando el teorema de Lagrange a la función seno en el intervalo  $[x, y]$ :

$$\sen x - \sen y = (x - y) \cos c, \text{ para algún } c \in (x, y).$$

Tomando valores absolutos y usando que  $|\cos c| \leq 1$ :

$$|\sen x - \sen y| = |\cos c| |x - y| \leq |x - y|.$$

Si  $x > y$  obtenemos la misma desigualdad intercambiando los papeles de  $x$  e  $y$ .

4. Consideremos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Es fácil demostrar que la función  $g$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle. Como consecuencia, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Equivalentemente  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$  o bien,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

5. La función  $f(x) = x^{4/3} = \sqrt[3]{x^4}$  es función elemental y está definida en todo  $\mathbb{R}$ , en consecuencia es continua en  $\mathbb{R}$  (en particular en  $[-1, 1]$ ). Su derivada existe en todo  $\mathbb{R}$  y es  $f'(x) = (4/3)x^{1/3} = (4/3)\sqrt[3]{x}$ . Como consecuencia del teorema de Lagrange, existe al menos un  $c \in (-1, 1)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \text{ o bien } \frac{4\sqrt[3]{c}}{3} = 0.$$



Esta igualdad se verifica para  $c = 0 \in (-1, 1)$ .

6. La función  $f(x) = x^2$  satisface claramente las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo  $[1, 3]$ . La abscisa del punto pedido sabemos que corresponde a cualquier  $c$  satisfaciendo:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}, \text{ o equivalentemente } 2c = 4.$$

Es decir,  $c = 2$  y el punto pedido es por tanto  $P(2, 2^2) = P(2, 4)$ .

7. La función  $f(t) = \text{sen } t$  es derivable (y por tanto continua) en  $\mathbb{R}$ . En consecuencia satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo  $[x, x + h]$ . Esto implica que existe  $c \in (x, x + h)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{\text{sen } (x + h) - \text{sen } x}{h}.$$

Dado que  $f'(c) = \cos c$ , queda  $\text{sen } (x + h) - \text{sen } x = h \cos c$  con  $x < c < x + h$ .

8. Para todo  $x > 0$  tenemos  $x < 2x$ . Al ser  $f$  derivable en  $[0, +\infty)$ , es continua en  $[x, 2x]$  y derivable en  $(x, 2x)$ . Por el teorema de Lagrange, existe un  $c$  (que depende de  $x$ ) tal que

$$f'(c) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

Teniendo en cuenta que si  $x \rightarrow +\infty$  entonces  $c \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} f'(c) = A.$$

9. Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos de  $(a, b)$  con  $x_1 < x_2$ . Como  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , es derivable en  $(x_1, x_2)$  y continua en  $[x_1, x_2]$ . Por tanto podemos aplicar el teorema de Lagrange a la función  $f$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$ , es decir existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$  se deduce  $f(x_1) - f(x_2) = 0$  o equivalentemente  $f(x_1) = f(x_2)$ . Hemos demostrado que  $f(x_1) = f(x_2)$  para cualquier par de números  $x_1$  y  $x_2$  en  $(a, b)$  lo cual implica que  $f$  es constante en  $(a, b)$ .

### 5.3. Teorema del valor medio de Cauchy

1. Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones  $f, g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x^3 - 1.$$

Hallar el  $c$  o los  $c$  correspondientes.

2. Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones  $f, g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \text{sen } x, \quad g(x) = \cos x.$$

Hallar el  $c$  o los  $c$  correspondientes.

3. Demostrar el teorema del valor medio de Cauchy:

Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones tales que: (i)  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$ . (ii)  $f$  y  $g$  son derivables en  $(a, b)$ . (iii)  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces, existe un  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Solución.** 1. (i)  $f$  y  $g$  son continuas en  $[1, 2]$  (teorema de continuidad de las funciones elementales).

(ii)  $f$  y  $g$  son derivables en  $(1, 2)$  (teorema de derivabilidad de las funciones elementales), siendo sus derivadas  $f'(x) = 2x$  y  $g'(x) = 3x^2$ .

(iii) Tenemos  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , lo cual implica que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (1, 2)$ . Como consecuencia del teorema del valor medio de Cauchy, existe un  $c \in (1, 2)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)}.$$

Hallemos  $c$  :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} \Leftrightarrow \frac{2c}{3c^2} = \frac{6 - 3}{7 - 0} \Leftrightarrow \frac{2}{3c} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow c = 14/9.$$

Claramente  $c = 14/9 \in (1, 2)$ .

2. i)  $f$  y  $g$  son continuas en  $[0, \pi/2]$  (teorema de continuidad de las funciones elementales).

(ii)  $f$  y  $g$  son derivables en  $(0, \pi/2)$  (teorema de derivabilidad de las funciones elementales), siendo sus derivadas  $f'(x) = \cos x$  y  $g'(x) = -\text{sen } x$ .

(iii) En  $[0, \pi/2]$  tenemos  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , lo cual implica que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (0, \pi/2)$ . Como consecuencia del teorema del valor medio de Cauchy, existe un  $c \in (0, \pi/2)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{g(\pi/2) - g(0)}.$$

Hallemos  $c$  :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{g(\pi/2) - g(0)} \Leftrightarrow \frac{\cos c}{-\operatorname{sen} c} = \frac{1 - 0}{0 - 1} \Leftrightarrow \cot c = 1 \Leftrightarrow c = \pi/4.$$

Claramente  $c = \pi/4 \in (0, \pi/2)$ .

3. Veamos que no se puede cumplir  $g(a) = g(b)$ . En efecto, si fuera  $g(a) = g(b)$  se cumplirían para la función  $g$  las hipótesis del teorema de Rolle. Como consecuencia, existiría un  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  lo cual es absurdo por la hipótesis (iii).

Dado que  $g(a) \neq g(b)$ , podemos definir la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(b)).$$

Es fácil verificar que  $F$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[a, b]$ , por tanto existe  $c \in (a, b)$  tal que  $F'(c) = 0$ . Equivalentemente:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0, \text{ o bien } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## 5.4. Una aplicación del teorema de Rolle

Sea  $f : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es derivable en  $(3, 5)$  y tal que  $f(3) = 6$  y  $f(5) = 10$ .

(a) Consideremos la función  $g : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ . Demostrar que existe un  $x_0 \in (3, 5)$  tal que  $g'(x_0) = 0$ . Deducir que  $f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$ .

(b) Demostrar que entre todas las rectas tangentes a la gráfica de  $f$ , al menos una de ellas pasa por el origen de coordenadas.

(c) Sea  $[a, b]$  un intervalo que no contiene al 0. Sea  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es derivable en  $(a, b)$  y tal que  $\frac{h(a)}{a} = \frac{h(b)}{b}$ . Demostrar que existe un  $x_0 \in (a, b)$  tal que la tangente a la gráfica de  $h$  en el punto  $(x_0, h(x_0))$  pasa por  $(0, 0)$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Veamos que la función  $g$  cumple las hipótesis del Teorema de Rolle. (i)  $g$  es continua en  $[3, 5]$  pues es cociente de continuas y el denominador no se anula en  $[3, 5]$ . (ii)  $g$  es derivable en  $(3, 5)$ . Efectivamente,  $g'(x) = (xf'(x) - f(x))/x^2$  con  $x^2 \neq 0$  en  $(3, 5)$ . (iii)  $g(3) = f(3)/3 = 6/3 = 2$ ,  $g(5) = f(5)/5 = 10/5 = 2$ , es decir  $g(3) = g(5)$ .

Existe pues  $x_0 \in (3, 5)$  tal que  $g'(x_0) = (x_0f'(x_0) - f(x_0))/x_0^2 = 0$ . Como  $x_0^2 \neq 0$  concluimos que  $\exists x_0 \in (3, 5)$  tal que  $f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$ .

(b) La ecuación de la recta tangente a una curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$  es  $r \equiv y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ . Si  $x_0$  es el correspondiente al apartado anterior entonces la recta  $r$  pasa por el origen de coordenadas pues para  $x = y = 0$  obtenemos la relación  $-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0)$  o equivalentemente  $f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$ , igualdad que se cumple según lo ya demostrado.

(c) Veamos que se verifican las hipótesis del Teorema de Rolle para la función  $\varphi = h(x)/x$  en el intervalo  $[a, b]$ . (i)  $\varphi$  es continua en  $[a, b]$  pues es cociente de funciones continuas y el denominador no se anula (por hipótesis  $0 \notin [a, b]$ ). (ii)  $\varphi$  es derivable en  $(a, b)$  pues  $\varphi'(x) = (xh'(x) - h(x))/x^2$  con  $x^2 \neq 0$  en  $(a, b)$ . (iii) Tenemos por hipótesis  $h(a)/a = h(b)/b$  por tanto  $\varphi(a) = h(a)/a = h(b)/b = \varphi(b)$ .

Existe pues un  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $\varphi'(x_0) = 0$  o bien  $(x_0h'(x_0) - h(x_0))/x_0^2 = 0$  o bien  $x_0h'(x_0) - h(x_0) = 0$  (pues  $x_0^2 \neq 0$ ). La ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $h$  en este mismo  $x_0$  es  $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$ . Pasa por  $(0, 0)$  pues  $0 - h(x_0) = h'(x_0)(0 - x_0)$  equivale a  $x_0h'(x_0) - h(x_0) = 0$ .

## 5.5. Diámetro de un subconjunto de $\mathbb{R}$

Dado un subconjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}$ , se define el diámetro del conjunto  $A$  como

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Considérese una función derivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe  $M > 0$  con  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Dado  $r > 0$  compruébese que si  $A$  es tal que  $d(A) \leq \frac{r}{M}$  entonces  $d(f(A)) \leq r$ .

(b) Sea  $S \subset \mathbb{R}$  acotado y supongamos que  $M < 1$ . Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(S))$  en donde  $f^n(A) = \{(f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : x \in A\}$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS, Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Sean  $x, y \in A$  con  $x < y$ . Como  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a la función  $f$  en el intervalo  $[x, y]$ , es decir existe  $\xi \in (x, y)$  tal que  $f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ , por tanto

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq M \cdot \frac{r}{M} = r.$$

Es decir,  $r$  es cota superior del conjunto  $\{|f(y) - f(x)| : x, y \in A\}$ . Como el supremo de un conjunto es la menor de las cotas superiores del conjunto, se concluye que

$$d(f(A)) = \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in A\} \leq r.$$

(b) Tenemos  $d(f^n(S)) = \sup\{|f^n(x) - f^n(y)|\}$ . Por otra parte

$$(f^2)'(x) = f'[f(x)]f'(x) \Rightarrow |(f^2)'(x)| = |f'[f(x)]||f'(x)| < M \cdot M = M^2.$$

Aplicando el método de inducción es inmediato comprobar que  $|(f^n)'(x)| < M^n$ . Además, la función  $f^n$  es derivable en  $\mathbb{R}$  (composición de derivables en  $\mathbb{R}$ ) con lo cual podemos aplicar de nuevo el teorema del valor medio de Lagrange a la función  $f^n$  en el intervalo  $[x, y]$  con  $x < y$  elementos de  $S$ :

$$\exists \xi \in (x, y) : \frac{f^n(y) - f^n(x)}{y - x} = (f^n)'(\xi).$$

Como  $S$  está acotado, tiene supremo y por tanto existe  $d(S)$ . Entonces:

$$|f^n(y) - f^n(x)| = (f^n)'(\xi)|y - x| < M^n|y - x| \leq M^n d(S).$$

Es decir,  $M^n d(S)$  es una cota superior  $\{|f^n(y) - f^n(x)| : x, y \in S\}$ . En consecuencia  $0 \leq d(f^n(S)) = \sup\{|f^n(y) - f^n(x)| : x, y \in S\} \leq M^n d(S)$ . Teniendo en cuenta que  $M < 1$  y tomando límites obtenemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(S)) \leq 0.$$

Por tanto, el límite pedido es igual a 0.

## 5.6. Límite de las raíces de $p_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1$

Se considera la sucesión de polinomios dada por

$$p_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se pide:

- 1) Comprobar que todos estos polinomios tienen un cero común.
- 2) Demostrar que cada polinomio tiene como máximo un cero en el intervalo abierto  $(0, 1)$ .
- 3) Comprobar que cada polinomio tiene de hecho un cero en  $(0, 1)$ .
- 4) Sea  $(x)_{n \geq 1}$  la sucesión formada por los ceros de los polinomios  $p_n$  en  $(0, 1)$ . Comprobar que esta sucesión converge.
- 5) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

*Sugerencia:* Inténtese una interpretación geométrica de la ecuación  $x^{n+2} - 2x + 1 = 0$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1) Para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$  se verifica  $p_n(1) = 1^{2n+1} - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ , lo cual implica que 1 es un cero común a todos los polinomios  $p_n$ .

2) Supongamos que  $p_n$  tuviera más de un cero en el intervalo  $(0, 1)$ . Sean  $a, b$  con  $0 < a < b < 1$  dos de estos ceros, es decir  $p_n(a) = p_n(b) = 0$ . La función  $p_n$  es polinómica y por tanto derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Como consecuencia es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y además cumple  $p_n(a) = p_n(b)$ . Como consecuencia del teorema de Rolle, existiría un  $\xi_1 \in (a, b)$  tal que  $p'_n(\xi_1) = 0$ .

También  $p_n$  es continua en  $[b, 1]$ , derivable en  $(b, 1)$  y además cumple  $p_n(b) = p_n(1)$ . De nuevo, como consecuencia del teorema de Rolle, existiría un  $\xi_2 \in (b, 1)$  tal que  $p'_n(\xi_2) = 0$ . Dado que  $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ , el polinomio  $p'_n$  tendría al menos dos raíces en  $(0, 1)$ . Ahora bien,

$$p'_n(x) = (n+2)x^{n+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{\frac{2}{n+2}}.$$

Como  $0 < 2/(n+2) < 1$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , la raíz  $r_n = \sqrt[n+1]{2/(n+2)}$  sólo puede tomar un valor en  $(0, 1)$ , lo cual es absurdo.

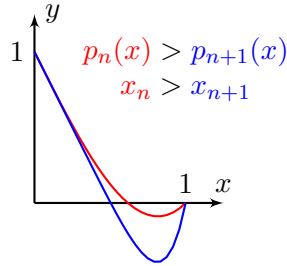
3. El único punto crítico de  $p_n$  en  $(0, 1)$  es  $r_n$ . Tenemos  $p''_n(x) = (n+2)(n+1)x^n$  y  $p''_n(r_n) > 0$ , lo cual implica que  $p_n$  tiene en  $r_n$  un mínimo relativo. Dado que  $p_n$  es estrictamente creciente en  $(r_n, 1]$  y que  $p_n(1) = 0$ , ha de ser necesariamente  $p_n(r_n) < 0$ . Como  $p_n(0) = 1 > 0$  y  $p_n$  es continua en  $[0, r_n]$ , por el teorema de Bolzano existe  $x_n \in (0, r_n)$  tal que  $p_n(x_n) = 0$ . Más aún, al ser  $p_n(1/2) = 1/2^{n+2} > 0$ , podemos asegurar que  $x_n \in (1/2, r_n)$ .

De todo lo anterior, concluimos que todo polinomio  $p_n$  tiene exactamente una raíz en  $(0, 1)$  y además se verifica  $1/2 < x_n < r_n$ .

4. La sucesión  $(x)_{n \geq 1}$  está acotada inferiormente por  $1/2$ , si demostramos que es monótona decreciente quedará demostrado que es convergente. Tenemos

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n+1}(x) &= x^{n+2} - 2x + 1 - (x^{n+3} - 2x + 1) \\ &= x^{n+2} - x^{n+3} = x^{n+2}(1 - x). \end{aligned}$$

Como  $x^{n+2}(1 - x) > 0$  en  $(0, 1)$  se deduce que  $p_n(x) > p_{n+1}(x)$  en  $(0, 1)$ . De la interpretación de las gráficas de  $y = p_n(x)$  concluimos que  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y por tanto la sucesión es monótona decreciente.



5. Sea  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Necesariamente es  $1/2 < l < 1$ , y por tanto  $x_n^{n+2} \rightarrow l^{+\infty} = 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Como  $x_n$  es raíz de  $p_n$ , se verifica  $x_n^{n+2} - 2x_n + 1 = 0$ . Tomando límites en esta última igualdad obtenemos  $0 - 2l + 1 = 0$ , es decir  $l = 1/2$ . Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$





## Capítulo 6

# Fórmula de Taylor

### 6.1. Polinomio de Taylor

1. Hallar el polinomio de Maclaurin  $p(x)$  de orden 5 para la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .
2. Hallar el polinomio de Taylor  $p(x)$  de orden 3 en  $x_0 = \pi$  para la función  $f(x) = \cos x$ .
3. Hallar el polinomio de Maclaurin  $p(x)$  de orden  $n$  para la función  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .
4. Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en  $x = 0$  de la función  $f(x) = \arctan x$ .

**Solución.** 1. Tenemos:

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0, \\f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1, \\f''(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0, \\f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1, \\f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0, \\f^{(5)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1.\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$\begin{aligned}p(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\&= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.\end{aligned}$$

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f(\pi) = -1, \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(\pi) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(\pi) = 1, \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(3)}(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x - \pi) + \frac{f^{(2)}(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 \\ &= -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2. \end{aligned}$$

3. Hallemos las primeras derivadas de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 1)^{-1} \Rightarrow f(0) = 1 = 0!, \\ f'(x) &= -(x + 1)^{-2} \Rightarrow f'(0) = -1!, \\ f''(x) &= 2(x + 1)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2 = 2!, \\ f^{(3)}(x) &= -6(x + 1)^{-4} \Rightarrow f^{(3)}(0) = -6 = -3!, \\ f^{(4)}(x) &= 24(x + 1)^{-5} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24 = 4!. \end{aligned}$$

Fácilmente podemos demostrar por inducción que  $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ , por tanto:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + \dots + (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

4. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x, \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + x^2}, \\ f''(x) &= -2 \frac{x}{(1 + x^2)^2}, \\ f'''(x) &= -2 \frac{(1 + x^2)^2 - 2(1 + x^2)2x(x)}{(1 + x^2)^4} = -2 \frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Particularizando en  $x = 0$  :

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -2.$$

En consecuencia, el polinomio pedido es:

$$p(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}.$$

## 6.2. Fórmula de Taylor

1. Escribir la fórmula de Maclaurin de orden 2 para las funciones: (a)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . (b)  $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ .
2. Escribir la fórmula de Maclaurin de orden 5 para la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .
3. Escribir la fórmula de Taylor de orden 3 en  $x_0 = 4$  para la función  $f(x) = \sqrt{x}$ .
4. Escribir la fórmula de Maclaurin de orden  $n$  para la función  $f(x) = \log(1+x)$ .

**Solución.** 1. (a) Derivamos hasta orden 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f'''(\xi) = \frac{3}{8(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16(1+\xi)^2\sqrt{1+\xi}}x^3, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ .

(b) Tenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x)^{1/3} \Rightarrow g(0) = 1, \\ g'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3}, \\ g''(x) &= -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \Rightarrow g''(0) = -\frac{2}{9}, \\ g'''(x) &= \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3} \Rightarrow g'''(\xi) = \frac{10}{27(1+\xi)^2\sqrt[3]{(1+\xi)^2}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81(1+\xi)^2\sqrt[3]{(1+\xi)^2}}x^3, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ .

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0, \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1, \\ f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(6)}(\xi) = -\operatorname{sen} \xi. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\operatorname{sen} \xi}{6!}, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ .

3. Para todo  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2} \Rightarrow f(4) = 2, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f''(4) = -\frac{1}{32}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} \Rightarrow f'''(4) = \frac{3}{256}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = -\frac{15}{16\xi^3\sqrt{\xi}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4 \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5(x-4)^4}{128\xi^3\sqrt{\xi}}, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 4 y  $x$ .

4. Hallemos las primeras derivadas de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) &= (x+1)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1 = 0!, \\ f''(x) &= -(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1!, \\ f^{(3)}(x) &= 2(x+1)^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2!, \\ f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3 (x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!, \\ f^{(5)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 (x+1)^{-5} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 4!. \end{aligned}$$

Fácilmente podemos demostrar por inducción que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n},$$

por tanto:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \quad f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{(\xi+1)^{n+1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ .

### 6.3. Aproximación de funciones por polinomios

1. Aproximar la función  $f(x) = \log(1+x)$  por un polinomio de grado 9 en el intervalo  $[0, 1]$ . Estimar el error debido a la supresión del resto.
2. Acotar el error de la fórmula aproximada:  $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ .
3. Calcular aproximadamente  $\log 2$ , usando el polinomio de Maclaurin de grado 5 de la función  $f(x) = \log(x+1)$ . Dar una cota del error cometido.
4. Expresar el polinomio  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$  en potencias enteras y positivas de  $x+1$ .
5. Averiguar cuantos términos hay que tomar en la fórmula de Maclaurin aplicada a la función  $f(x) = e^x$ , para obtener un polinomio que la represente en el intervalo  $[-1, 1]$ , con tres cifras decimales exactas.
6. Determinar un intervalo verificando que la fórmula aproximada  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  tiene un error menor que 0,00005.

7. Demostrar que la diferencia entre  $\overline{\text{sen}(a+h)}$  y  $\overline{\text{sen } a + h \cos a}$  no es mayor que  $h^2/2$ .
8. Expresar el polinomio  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$  en potencias enteras y positivas de  $x - 2$ .
9. Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad se comba formando la catenaria  $y = a \text{ch} \frac{x}{a}$ . Demostrar que para valores pequeños de  $|x|$ , la forma que toma el hilo se puede representar aproximadamente por la parábola  $y = a + \frac{x^2}{2a}$ .
10. Calcular  $\sqrt{e}$  con un error menor que  $10^{-3}$ .
11. (a) Escribir la fórmula de Taylor de orden 3 en  $x_0 = 1$  para la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- (b) Siendo  $|x - 1| < 0,01$ , acotar el error de la fórmula:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{5x^3 - 24x^2 + 60x + 40}{81}.$$

12. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 4 de la función  $f(x) = \cos x$ . Usando dicho polinomio, hallar un valor aproximado de  $\cos 0,1$ , dando una cota del error cometido.

**Solución.** 1. Vimos en un ejercicio anterior que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}},$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Para  $n = 9$  queda:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}.$$

Acotemos el resto. Teniendo en cuenta que ahora  $0 < \xi < 1$ :

$$\left| -\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}} \right| = \frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}} < \frac{1^{10}}{10(0+1)^{10}} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

2. Aplicando la fórmula de Maclaurin de orden 4 a la función  $f(x) = e^x$  obtenemos:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^\xi x^5}{5!}.$$

Para  $x = 1$  queda:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{e^\xi}{5!},$$

estando  $\xi$  entre 0 y 1, es decir  $0 < \xi < 1$ . Acotemos el resto o error:

$$\frac{e^\xi}{5!} < \frac{e^1}{5!} \leq \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}.$$

3. Vimos en un ejercicio anterior que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}},$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Para  $n = 5$  queda:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6(\xi+1)^6}.$$

Para  $x = 1$ :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6(\xi+1)^6} = \frac{47}{60} - \frac{1}{6(\xi+1)^6}.$$

Acotemos el resto:

$$\left| -\frac{1}{6(\xi+1)^6} \right| = \frac{1}{6(\xi+1)^6} < \frac{1}{6(0+1)^6} = \frac{1}{6}.$$

Entonces,  $\log 2 \approx \frac{47}{60} = 0,783333\dots$  con error menor que  $\frac{1}{6}$ .

4. Apliquemos la fórmula de Taylor a la función  $f$  en  $x_0 = -1$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 6x - 7 \Rightarrow f(-1) = -16, \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f'(-1) = 13, \\ f''(x) &= 6x - 4 \Rightarrow f''(-1) = -10, \\ f'''(x) &= 6 \Rightarrow f'''(-1) = 6, \\ f^{(4)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)^4 \\ &= -16 + 13(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

5. De manera inmediata, deducimos la fórmula de Maclaurin de orden  $n$  para  $f(x) = e^x$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!},$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Acotemos el resto en  $[-1, 1]$ :

$$\left| \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^\xi |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^1 \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Para obtener un polinomio que represente a la función en el intervalo  $[-1, 1]$  con tres cifras decimales exactas, basta que ocurra:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001.$$

Ahora bien,

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{3}{0,001} < (n+1)! \Leftrightarrow 3000 < (n+1)!.$$

Dando valores a  $n = 1, 2, \dots$ , verificamos que el primer  $n$  que satisface la última desigualdad es  $n = 6$ .

6. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1, \\ f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(5)}(\xi) = -\operatorname{sen} \xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \cos x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\operatorname{sen} \xi}{5!}x^5, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ .

Acotando el resto:

$$\left| -\frac{\operatorname{sen} \xi}{5!}x^5 \right| = \frac{|\operatorname{sen} \xi| |x|^5}{5!} \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

En consecuencia,

$$\frac{|x|^5}{5!} < 0,00005 \Leftrightarrow |x|^5 < 5! \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 6 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow |x| < \sqrt[5]{6 \cdot 10^{-3}},$$



y un intervalo que cumple la condición dada es  $\left(-\sqrt[5]{6 \cdot 10^{-3}}, \sqrt[5]{6 \cdot 10^{-3}}\right)$ .

7. Apliquemos la fórmula de Taylor de orden 2 en  $x_0 = a$  a la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{sen} x &\Rightarrow f(a) = \operatorname{sen} a, \\ f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(a) = \cos a, \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x &\Rightarrow f''(\xi) = -\operatorname{sen} \xi. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + \frac{\cos a}{1!}(x-a) - \frac{\operatorname{sen} \xi}{2!}(x-a)^2,$$

estando  $\xi$  comprendido entre  $a$  y  $x$ . Llamando  $h = x - a$  queda:

$$\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h \cos a) = -\frac{h^2 \operatorname{sen} \xi}{2},$$

estando  $\xi$  comprendido entre  $a$  y  $a+h$ . Acotando el resto:

$$\left| -\frac{h^2 \operatorname{sen} \xi}{2} \right| = \frac{h^2 |\operatorname{sen} \xi|}{2} \leq \frac{h^2}{2}.$$

8. Apliquemos la fórmula de Taylor a la función  $f$  en  $x_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 &\Rightarrow f(2) = 11, \\ f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 &\Rightarrow f'(2) = 7, \\ f''(x) = 6x - 4 &\Rightarrow f''(2) = 8, \\ f'''(x) = 6 &\Rightarrow f'''(2) = 6, \\ f^{(4)}(x) = 0 &\Rightarrow f^{(4)}(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f^{(2)}(2)}{2!}(x-2)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4 \\ &= 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3. \end{aligned}$$

9. Hallemos las derivadas hasta orden 2 de  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ :

$$\begin{aligned} y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} &\Rightarrow y(0) = a, \\ y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a} &\Rightarrow y'(0) = 0, \\ y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} &\Rightarrow y''(0) = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

La correspondiente fórmula de Maclaurin para la catenaria es:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + R_2(y) = a + \frac{x^2}{2a} + R_2(y).$$

Sabemos que si  $|x| \rightarrow 0$ , entonces  $R_2(y) \rightarrow 0$ , por tanto para valores pequeños de  $|x|$ , la forma que toma el hilo puede representarse aproximadamente por la parábola  $y = a + \frac{x^2}{2a}$ .

10. La fórmula de Maclaurin de orden  $n$  para  $f(x) = e^x$  es:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!},$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Si  $x = 1/2$  obtenemos

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 2^n} + \frac{e^\xi}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}},$$

estando  $\xi$  comprendido entre 0 y  $1/2$ . Acotemos el resto:

$$\left| \frac{e^\xi}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \right| < \frac{e^{1/2}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \leq \frac{e}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} < \frac{3}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}.$$

Entonces,

$$\frac{3}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} < 10^{-3} \Leftrightarrow 3000 < (n+1)! \cdot 2^{n+1}.$$

Dando valores  $n = 1, 2, \dots$  en la última desigualdad, verificamos que el primer  $n$  que la cumple es  $n = 4$ . Por tanto:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \frac{1}{4! \cdot 2^4} = \frac{211}{128} = 1,6484375,$$

con error menor que  $10^{-3}$ .

11. (a) Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/3} \Rightarrow f(1) = 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3} \Rightarrow f''(1) = -\frac{2}{9}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{10}{27}x^{-8/3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = \frac{10}{27}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}x^{-11/3} \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = -\frac{80}{81}\xi^{-11/3}, \end{aligned}$$

estando  $\xi$  comprendido entre 1 y  $x$ . La fórmula de Taylor pedida es:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} &= 1 + \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{5(x-1)^3}{81} - \frac{10\xi^{-11/3}(x-1)^4}{243} \\ &= \frac{5x^3 - 24x^2 + 60x + 40}{81} - \frac{10\xi^{-11/3}(x-1)^4}{243}.\end{aligned}$$

(b) La condición  $|x-1| < 0,01$  equivale a  $0,99 < x < 1,01$ , con lo cual el valor absoluto del resto se puede acotar en la forma:

$$|R_n(x)| = \frac{10|x-1|^4}{243\xi^3\sqrt[3]{\xi^2}} < \frac{10 \cdot 0,01^4}{243 \cdot 0,99^3\sqrt[3]{0,99^2}} = 4,26971\dots \times 10^{-10}.$$

12. Tenemos:

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1, \\ f^{(5)}(\xi) &= -\operatorname{sen} \xi \Rightarrow f^{(5)}(\xi) = -\operatorname{sen} \xi.\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Maclaurin, y sustituyendo  $x$  por  $0,1$ :

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\operatorname{sen} \xi}{5!}x^5 \\ \cos 0,1 &= 1 - \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^4}{4!} - \frac{\operatorname{sen} \xi}{5!}0,1^5.\end{aligned}$$

Entonces,  $\cos 0,1 \approx 1 - \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^4}{4!} = 0,9950041\bar{6}$ . Una cota del error es:

$$\left| -\frac{\operatorname{sen} \xi}{5!}0,1^5 \right| \leq \frac{0,1^5}{120} = 8.\bar{3} \times 10^{-8}.$$

## 6.4. La notación *o* minúscula de Landau

1. Demostrar que  $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$  cuando  $x \rightarrow 0$ .
2. Demostrar que  $\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} = o(x^3)$  cuando  $x \rightarrow 0$ .
3. Demostrar que  $\sqrt{x} - 1 - \frac{x}{4} = o(x-4)$  cuando  $x \rightarrow 4$ .

**Solución.** 1. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{2} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Es decir,  $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

2. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{6x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0.\end{aligned}$$

Es decir,  $\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} = o(x^3)$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

3. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 1 - \frac{x}{4}}{x - 4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Es decir,  $\sqrt{x} - 1 - \frac{x}{4} = o(x - 4)$  cuando  $x \rightarrow 4$ .

## 6.5. Fórmula de Taylor con $o$ minúscula, cálculo de límites

1. Escribir la fórmula de Maclaurin de  $f(x) = \log(1 - x)$  hasta  $o(x^4)$ .
2. Escribir la fórmula de Maclaurin de la función  $f(x) = \operatorname{ch} x$  hasta  $o(x^8)$ .
3. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$ , usando fórmulas de Maclaurin.
4. Usando fórmulas de Maclaurin, calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ .
5. Usando fórmulas de Maclaurin, calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3}$ .
6. Usando fórmulas de Maclaurin, calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ .
7. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}}{x^2 \sqrt{x}}$ .

**Solución.** 1. Derivamos hasta orden 4 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1-x) \Rightarrow f(0) = 0, \\ f'(x) &= -(1-x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = -1 \\ f''(x) &= -(1-x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= -2(x-1)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = -2, \\ f^{(4)}(x) &= -6(x-1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

2. Derivamos hasta orden 8 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{ch} x \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= \operatorname{sh} x \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= \operatorname{ch} x \Rightarrow f''(0) = 1, \\ &\dots \\ f^{(8)}(x) &= \operatorname{ch} x \Rightarrow f^{(8)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8)$ .

3. Tenemos  $e^x = 1 + x + o(x)$ ,  $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ . Por tanto:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - 1}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

4. Sabemos que  $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ , y de manera sencilla podemos demostrar que

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3!} - o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3) - o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} - \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{2} + 0 - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Teniendo en cuenta que  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$  :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{2x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} + 0 \right) = -\frac{1}{6}.$$

6. Se verifican las igualdades:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (x+1)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + o(x), \\ \cos x &= 1 + 0x + o(x), \quad \text{sen } x = x + o(x). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1 - o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + o(x) - o(x)}{x + o(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x} - \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{\frac{1}{2} + 0 - 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7. Tenemos una indeterminación de la forma  $0/0$ . Usando  $\text{sen } x = x - x^3/3! + o(x^3)$  y multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\text{sen } x}}{x^2 \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - x^3/3! + o(x^3)}}{x^2 \sqrt{x}} \\ &= \frac{x^3/3! - o(x^3)}{x^2 \sqrt{x} \left( \sqrt{x} + \sqrt{x - x^3/3! + o(x^3)} \right)}. \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador entre  $x^3$ :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\text{sen } x}}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1/3! - o(x^3)/x^3}{1 + \sqrt{1 - x^2/3! + o(x^3)/x}}.$$

Ahora bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

En consecuencia,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/3! - o(x^3)/x^3}{1 + \sqrt{1 - x^2/3! + o(x^3)/x}} = \frac{1/6 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{1}{12}.$$

## 6.6. Una aplicación de la fórmula de Taylor

De una función  $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  sabemos que admite derivadas de cualquier orden y que las derivadas se pueden acotar del siguiente modo

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{2^{n+2}n!}{3^{n+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1/2]).$$

Además conocemos que  $f(0) = 1$  y  $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}$ . Calcúlese  $f(1/2)$ .

**Indicación:** Puede ser útil encontrar una expresión para  $P_{f,n,0}(1/2)$  donde  $P_{f,n,0}$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en 0.

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Si  $p_n$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en 0, tenemos

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

con  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Por hipótesis  $f(0) = 1$  y  $f^{(k)}(0) = k!/2^k$ , es decir

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{2^k} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{2^k} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n}.$$

Si  $x = 1/2$  entonces  $\xi \in (0, 1/2)$  y por la hipótesis dada sobre la acotación,  $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 2^{n+3}(n+1)!/3^{n+2}$ . En consecuencia

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{4}{3^{n+2}}.$$

Escribamos la fórmula de Taylor para  $x = 1/2$

$$f(1/2) = 1 + \frac{1/2}{2} + \frac{(1/2)^2}{2^2} + \dots + \frac{(1/2)^n}{2^n} + E_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + E_n, \quad E_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Por otra parte y aplicando la fórmula de la suma de los  $n+1$  primeros términos de una progresión geométrica

$$f(1/2) = \frac{1(1/4^{n+1} - 1)}{1/4 - 1} + E_n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + E_n. \quad (1)$$

Como  $0 \leq E_n \leq 4/3^{n+2}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4/3^{n+2} = 0$  deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = 0.$$

Tomando límites en (1) cuando  $n \rightarrow +\infty$  obtenemos

$$f(1/2) = 4/3(1 - 0) + 0 = \frac{4}{3}.$$

## 6.7. Una aproximación racional de la raíz de 5

Sea  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $x_0 > 0$ .

a) Determinar razonadamente el polinomio de Taylor de orden  $n$ , en el punto  $x_0$  de la función  $f$ ,  $P_{n,f,x_0}(x)$  y su resto  $R_{n,f,x_0}(x)$ .

b) Mediante una adecuada elección de  $x_0$ , calcular una aproximación racional de  $\sqrt{5}$  con un error menor que  $10^{-3}$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** a) Hallemos las primeras derivadas de  $f$  en  $(0, +\infty)$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}x^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}x^{-5/2}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}x^{-7/2}. \end{aligned}$$

El cálculo de estas primeras derivadas sugiere la fórmula general:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{\frac{1-2n}{2}} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

Demostremos ésta fórmula por inducción. Efectivamente, (\*) es cierta para  $n = 2$ . Sea cierta para un  $n \geq 2$ , veamos que también es cierta para  $n + 1$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left( \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{\frac{1-2n}{2}} \right)' \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot \frac{1-2n}{2} x^{\frac{-1-2n}{2}}. \end{aligned}$$

Usando que  $-1 - 2n = 1 - 2(n+1)$  y que  $1 - 2n = (-1)(2(n+1) - 3)$  :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2^{n+1}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2(n+1) - 3) x^{\frac{-1-2(n+1)}{2}}$$

y por tanto, la fórmula (\*) es cierta para  $n + 1$ . El polinomio de Taylor pedido es

$$\begin{aligned} P_{n,f,x_0}(x) &= x_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}(x-x_0) + \frac{1}{2!} \frac{-1}{2^2}x_0^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)^2 + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) x_0^{\frac{1-2n}{2}}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

y el correspondiente resto:

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} \xi^{\frac{-1-2n}{2}}(x-x_0)^{n+1},$$



en donde  $\xi$  está comprendido entre  $x_0$  y  $x$ .

b) Elijamos  $x_0 = 4$ ,  $x = 5$  y acotemos el valor absoluto del resto. Teniendo en cuenta que  $4 < \xi < 5$ :

$$|R_{n,f,4}(x)| = \left| \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{\xi})^{2n+1}} \right| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! 2^{3n+2}}.$$

Obligemos a que este valor absoluto sea menor que  $10^{-3} = 1/1000$ :

$$\text{Si } n = 1, \frac{1}{2! 2^5} = \frac{1}{64} \not< \frac{1}{1000}.$$

$$\text{Si } n = 2, \frac{1 \cdot 3}{3! 2^8} = \frac{1}{512} \not< \frac{1}{1000}.$$

$$\text{Si } n = 3, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! 2^{11}} = \frac{5}{16384} < \frac{5}{5000} = \frac{1}{1000}.$$

Para  $n = 3$ , el resto en valor absoluto es por tanto menor que  $10^{-3}$ . Entonces,

$$P_{3,f,4}(5) = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 4^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{-1}{2^2} 4^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3!} \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 3}{2^3} 4^{-\frac{5}{2}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^5} = \dots = \frac{1145}{512}.$$

Es decir, una aproximación racional de  $\sqrt{5}$  con error menor que  $10^{-3}$  es  $1145/512$ .



# Capítulo 7

## Regla de L'Hôpital

### 7.1. Límites de funciones por la definición

1. Demostrar que:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5. \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3}x - 1 \right) = \frac{1}{3}. \quad c) \lim_{x \rightarrow 1/2} (-x - 1) = -\frac{3}{2}.$$

2. Demostrar que a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin x = 0$ .

3. Demostrar que:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2) = 4$ .

4. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$ .

5. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

**Solución.** 1. Recordamos que si  $L \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

a) Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$|(2x + 3) - 5| < \epsilon \Leftrightarrow |2x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \epsilon/2.$$

Es decir, tomando  $\delta = \epsilon/2$ , se verifica  $|(2x + 3) - 5| < \epsilon$  si  $|x - 1| < \delta$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ .

b) Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{2}{3}x - 1 \right) - \frac{1}{3} \right| < \epsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Es decir, tomando  $\delta = 3\epsilon/2$ , se verifica  $|(2x/3 - 1) - 1/3| < \epsilon$  si  $|x - 2| < \delta$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x/3 - 1) = 1/3$ .

c) Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$\left|(-x - 1) - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|-x + \frac{1}{2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Es decir, tomando  $\delta = \epsilon$ , se verifica  $|(-x - 1) - (-3/2)| < \epsilon$  si  $|x - 1/2| < \delta$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 1/2} (-x - 1) = -3/2$ .

2. a) Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$|x^2 - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |x|^2 < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}.$$

Es decir, tomando  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , se verifica  $|x^2 - 0| < \epsilon$  si  $|x - 0| < \delta$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

b) Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$|x^3 - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |x|^3 < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{\epsilon}.$$

Elijiendo  $\delta = \sqrt[3]{\epsilon}$  y usando que  $|\sen x| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|x| < \delta \Rightarrow |x^3| < \epsilon \Rightarrow |x^3 \sen x| < \epsilon.$$

Es decir,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sen x = 0$ .

3. Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$|(x^2 + x - 2) - 4| < \epsilon \Leftrightarrow |x^2 + x - 6| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |(x - 2)(x + 3)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| |x + 3| < \epsilon. \quad (1)$$

Acotemos superiormente la expresión  $|x + 3|$  en el intervalo centrado en 2,  $|x - 2| \leq 1$ , es decir en  $[1, 3]$ . Claramente, en este intervalo se verifica  $4 \leq |x + 3| \leq 6$ . Elijamos ahora

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{6} \right\}.$$

Si  $\delta = 1$ , se verifica  $1 \leq \epsilon/6$  y por tanto,

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < 1 \Rightarrow x \in [1, 3] \Rightarrow |x + 3| \leq 6$$

$$\Rightarrow |x - 2| |x + 3| < 1 \cdot 6 \Rightarrow |x - 2| |x + 3| \leq \frac{\epsilon}{6} \cdot 6 = \epsilon$$

$$\Rightarrow \text{(por (1)) } |(x^2 + x - 2) - 4| < \epsilon.$$

Si  $\delta = \epsilon/6$ , entonces,  $\delta \leq 1$  y sigue siendo válida la acotación  $|x + 3| \leq 6$ , por tanto

$$\begin{aligned} |x - 2| < \delta &\Rightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{6} \\ \Rightarrow |x - 2| |x + 3| &< \frac{\epsilon}{6} \cdot 6 = \epsilon \\ \Rightarrow \text{(por (1)) } |(x^2 + x - 2) - 4| &< \epsilon. \end{aligned}$$

4. Sea  $\epsilon > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{4 - (x+1)}{2(x+1)} \right| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \left| \frac{3-x}{2(x+1)} \right| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2|x+1|} < \epsilon. \quad (1) \end{aligned}$$

Acotemos superiormente la expresión  $\frac{1}{2|x+1|}$  en el intervalo centrado en 3,  $|x-3| \leq 1$ , es decir en  $[2, 4]$ . Claramente, en este intervalo se verifica

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{2|x+1|} \leq \frac{1}{6}.$$

Elijamos ahora  $\delta = \min\{1, 6\epsilon\}$ . Si  $\delta = 1$ , se verifica  $1 \leq 6\epsilon$  y por tanto,

$$\begin{aligned} |x-3| < \delta &\Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow x \in [2, 4] \Rightarrow \frac{1}{2|x+3|} \leq \frac{1}{6} \\ \Rightarrow \frac{|x-3|}{2|x+1|} < 1 \cdot \frac{1}{6} &\Rightarrow \frac{|x-3|}{2|x+1|} \leq 6\epsilon \cdot \frac{1}{6} = \epsilon \\ \Rightarrow \text{(por (1)) } \left| \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2} \right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Si  $\delta = 6\epsilon$ , entonces,  $\delta \leq 1$  y sigue siendo válida la acotación  $\frac{1}{2|x+1|} \leq \frac{1}{6}$ , por tanto

$$\begin{aligned} |x-3| < \delta &\Rightarrow |x-3| < 6\epsilon \\ \Rightarrow \frac{|x-3|}{2|x+1|} < 6\epsilon \cdot \frac{1}{6} &= \epsilon \\ \Rightarrow \text{(por (1)) } \left| \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2} \right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

5. Recordamos que si  $L \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists K : (x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists K : (x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces,

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \epsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Eligiendo  $K = \frac{1}{\epsilon} > 0$ , si  $x > K$  se verifica  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$ , por tanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## 7.2. Concepto de indeterminación

1. Demostrar que  $0/0$  es una forma indeterminada considerando los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x}.$$

2. Demostrar que  $\infty/\infty$  es una forma indeterminada considerando los límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x} \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x}.$$

3. Demostrar que  $0 \cdot \infty$  es una forma indeterminada considerando los límites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot 6x \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot 4x.$$

4. Demostrar que  $\infty - \infty$  es una forma indeterminada considerando los límites:  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1) - x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+2) - x)$ .

5. Demostrar que  $1^\infty$  es una forma indeterminada considerando los límites:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ y } L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

**Solución.** 1. En ambos casos, los numeradores y denominadores tiene límite 0, es decir en ambos aparece la expresión  $0/0$ . Los anteriores límites los podemos calcular sencillamente simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3.$$

La conclusión es obvia: si al calcular un límite, aparece la expresión  $0/0$ , con ese único conocimiento no podemos asegurar cual es el valor del límite, dependerá de las funciones que intervienen. Por esa razón, decimos que  $0/0$  es una *forma indeterminada*, *expresión indeterminada*, o *indeterminación*.

2. En ambos casos aparece la expresión  $\infty/\infty$ . De nuevo, podemos calcular los límites simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,  $\infty/\infty$  es una forma indeterminada.

3. En ambos casos aparece la expresión  $0 \cdot \infty$ , y se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot 6x = \lim_{x \rightarrow \infty} 6 = 6, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot 4x = \lim_{x \rightarrow \infty} 4 = 4$$

Por tanto,  $0 \cdot \infty$  es una forma indeterminada.

4. En ambos casos aparece la expresión  $\infty - \infty$ , y se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+2) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

Por tanto,  $\infty - \infty$  es una forma indeterminada.

5. En ambos casos aparece la expresión  $1^\infty$ . Por definición del número  $e$ ,  $L_1 = e$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{(x/2) \cdot 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^2 = e^2. \end{aligned}$$

Por tanto,  $1^\infty$  es una forma indeterminada.

### 7.3. Regla de L'Hôpital para 0/0

1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$ .
2. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$ .
3. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x}$ .
4. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ .
5. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$ .

6. Demostrar la regla de L'Hôpital para 0/0:

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en el intervalo abierto  $(a, b)$  tales que:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ .
- 2)  $f$  y  $g$  son derivables en  $(a, b)$  y  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

3) Existe  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Entonces,  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Solución.** 1. Claramente, si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $\sin x \rightarrow 0$  y  $2x \rightarrow 0$ . El cociente de las derivadas es  $\frac{\cos x}{2}$  cuyo límite es  $\frac{1}{2}$ . Según la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conviendremos en escribir abreviadamente los cálculos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Tenemos

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

3.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 - 2 \cdot 1} = -3.$$

4.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Nota. Podemos matizar: el límite es  $+\infty$  si  $x \rightarrow 0^+$ , y  $-\infty$  si  $x \rightarrow 0^-$ .

5.

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - \sin 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 - 2 \cos 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4 \sin 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{8 \cos 2x} \\ &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

6. Consideremos las funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Por la hipótesis 1),  $F$  y  $G$  son continuas en  $a$  y por la hipótesis 3), son derivables en  $(a, b)$  con  $G'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Esto implica que se verifican las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange para las



funciones  $F$  y  $G$  en todo intervalo cerrado  $[a, x]$  con  $a < x < b$ . Existe por tanto un  $c \in (a, x)$  tal que:

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)}.$$

Según se han definido  $F$  y  $G$ , la anterior igualdad equivale a:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si  $x \rightarrow a^+$ , entonces  $c \rightarrow a^+$ , pues  $a < c < x$ . Dado que por hipótesis existe el límite de 3), se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### 7.4. Distintas formas indeterminadas

1. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x}$ .
2. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ .
3. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \log x)$ .
4. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$ .
5. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .
6. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ .
7. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x}$ .

**Solución.** 1.

$$\begin{aligned} L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x \log 8 - 2^x \log 2}{4} = \frac{\log 8 - \log 2}{4} \\ &= \frac{\log(8/2)}{4} = \frac{\log 4}{4} = \frac{\log 2^2}{4} = \frac{2 \log 2}{4} = \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

2.

$$L = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

3.

$$L = \{0 \cdot (-\infty)\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x^2} = \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0.$$

4.

$$\begin{aligned} L = \{\infty - \infty\} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x + 2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4} \\ &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. Aparece la indeterminación  $0^0$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $L = e^0 = 1$ .6. Aparece la indeterminación  $(+\infty)^0$ . Tenemos:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Por tanto,  $L = e^0 = 1$ .7. Aparece la indeterminación  $1^\infty$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0} \log(e^x + 3x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + 3x)}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 3}{e^x + 3x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3}{e^x + 3x} = \frac{1 + 3}{1 + 0} = 4. \end{aligned}$$

Por tanto,  $L = e^4$ . También podemos calcular  $\lambda$  de la forma:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x - 1)^{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3}{1} = \frac{1 + 3}{1} = 4.$$

Es decir,  $L = e^4$ .

## 7.5. Problemas diversos (1)

1. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

2. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$ .

3. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$ .

4. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1 - e^x}$ .
5. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ .
6. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cot x$ .
7. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ .
8. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .
9. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ .
10. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$ .

**Solución.** 1. Si  $x \rightarrow 0^+$ , entonces  $1/x \rightarrow +\infty$  y  $1/(e^x - 1) \rightarrow +\infty$ . Si  $x \rightarrow 0^-$ , entonces  $1/x \rightarrow -\infty$  y  $1/(e^x - 1) \rightarrow -\infty$ . Es decir, en ambos casos obtenemos una indeterminación. Para calcular el límite operamos la fracción:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = L. \end{aligned}$$

Después de aplicar dos veces la regla de L'Hôpital, obtenemos el límite de partida, con lo cual, la mencionada regla no resuelve el problema. Podemos proceder de la siguiente manera:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{0+1} = 1.$$

3.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{1} = \frac{e^2}{1} = e^2.$$

4.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x}{-e^x} = \frac{1+0}{-1} = -1.$$

5.

$$L = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

6.

$$\begin{aligned} L = \{0 \cdot \infty\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cos x}{\operatorname{sen} x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + (e^x - 1)(-\operatorname{sen} x)}{\cos x} = \frac{1 + 0}{1} = 1. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} L = \{(+\infty) \cdot 0\} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \\ &= \left\{ \frac{-\infty}{-\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} L = \{\infty - \infty\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \\ &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

9.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

10.

$$L = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{90x^8}{20x^3} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}.$$

## 7.6. Problemas diversos (2)

1. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + x + 1}{5x^3 + 8x^2}$ .

2. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$ .

3. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$ .

4. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ .

5. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x}$ .

6. Calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{3/x}$ .

7. Demostrar que el límite  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ , no se puede calcular mediante la regla de L'Hôpital. Calcularlo por otro método.

**Solución.** 1.

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 14x + 1}{15x^2 + 16x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x + 14}{30x + 16} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} L &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log x - x + 1}{(x-1) \log x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{1 \cdot \log x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\log x + 1 - \frac{1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} L &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + (1-x) \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} = \frac{-1 + 0}{-\frac{\pi}{2} \cdot 1} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

4. Aparece la indeterminación  $0^0$ . Usando la equivalencia  $\operatorname{sen} x \sim x$  cuando  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $L = e^0 = 1$ .

5. Aparece la indeterminación  $\infty^0$ . Usando la equivalencia  $\tan x \sim x$  cuando  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x (-\log x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log x}{1/x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $L = e^0 = 1$ .

6. Aparece la indeterminación  $1^\infty$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + x^2)^{3/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \log(1 + x^2)}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{1 + x^2} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,  $L = e^0 = 1$ . También podemos hallar  $\lambda$  de la forma:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 - 1) \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0.$$

Es decir,  $L = e^0 = 1$ .

7. Si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $\sin x \rightarrow 0$  y  $x^2 \sin(1/x) \rightarrow 0$  (infinitésimo por acotada). Aparece pues la indeterminación  $0/0$ . Ahora bien, las derivadas de numerador y denominador son:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( \cos \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x.\end{aligned}$$

Si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $\cos x \rightarrow 1$ ,  $2x \sin(1/x) \rightarrow 0$  (infinitésimo por acotada),  $1/x \rightarrow \infty$  y  $\cos(1/x)$  oscila entre  $-1$  y  $1$ . Es decir, no existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right)}{\frac{d}{dx} (\sin x)},$$

con lo cual, no podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Podemos calcular el límite  $L$ , usando  $\sin x \sim x$  cuando  $x \rightarrow 0$ :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(infinitésimo por acotada).

## Capítulo 8

# Integrales indefinidas

### 8.1. Integral de la función potencial

1. Calcular:

$$a) \int x^3 dx. \quad b) \int x^{21} dx. \quad c) \int \frac{1}{x^7} dx. \quad d) \int \sqrt{x} dx. \quad e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

2. Calcular:

$$a) \int (2x^3 - 5x^2 + 6x - 11) dx. \quad b) \int \frac{x^3 - 8x + 2}{x} dx.$$

3. Calcular:

$$a) \int t(t+1)(t+2) dt. \quad b) \int \frac{x+2}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

4. Demostrar que:

$$a) \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq -1). \quad b) \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C.$$

5. Calcular  $\int |x| dx$ .

**Solución.** 1. Usando la conocida fórmula  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$  ( $p \neq -1$ ):

$$a) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$b) \int x^{21} dx = \frac{x^{22}}{22} + C.$$

$$c) \int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C.$$

$$d) \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C.$$

2. Usando la propiedad de linealidad de la integral indefinida y que  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$  :

$$a) \int (2x^3 - 5x^2 + 6x - 11) \, dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 11x + C \\ = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 11x + C.$$

$$b) \int \frac{x^3 - 8x + 2}{x} dx = \int \left( x^2 - 8 + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 8x + 2 \log|x| + C.$$

$$3. a) \int t(t+1)(t+2) \, dt = \int (t^3 + 3t^2 + 2t) \, dt = \frac{t^4}{4} + t^3 + t^2 + C.$$

$$b) \int \frac{x+2}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x+2}{x^{1/4}} dx = \int \left( x^{3/4} + 2x^{-1/4} \right) dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} + 2 \frac{x^{3/4}}{3/4} + C \\ = \frac{4x^{7/4}}{7} + \frac{8x^{3/4}}{3} + C = \frac{4x^{3/4}}{21} (3x + 56) + C.$$

$$4. a) \text{ En efecto, } \left( \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \right)' = \frac{(p+1)x^p}{p+1} + 0 = x^p.$$

$$b) \text{ Si } x > 0, \text{ entonces } (\log|x| + C)' = (\log x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}. \text{ Si } x < 0, \\ \text{entonces } (\log|x| + C)' = (\log(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

5. Hallemos una función  $F(x)$  tal que  $F'(x) = |x|$ . Dado que la función valor absoluto de  $x$  es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

la función

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

satisface  $F'(x) = x$  si  $x > 0$  y  $F'(x) = -x$  si  $x < 0$ , es decir, satisface  $F'(x) = |x|$  si  $x \neq 0$ . Por otra parte:

$$F'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{2} = 0 \text{ y } F'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2}{2} = 0,$$

es decir,  $F'(0) = 0$ . Por tanto,  $F'(x) = |x|$  en todo  $\mathbb{R}$ .



Una primitiva de  $|x|$  en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$  es  $F(x)$  y por tanto, todas son de la forma  $F(x) + C$  con  $C$  constante. Nótese que  $F(x)$  se puede expresar en la forma  $x|x|/2$ , por tanto:

$$\int |x| dx = \frac{x|x|}{2} + C.$$

## 8.2. Integrales inmediatas

1. Calcular las integrales inmediatas

$$a) \int \frac{2x}{3x^2 + 1} dx. \quad b) \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx. \quad c) \int x \operatorname{sen} x^2 dx.$$

2. Calcular las integrales:

$$a) \int \frac{dx}{6 + 5x^2} dx. \quad b) \int x^2 5^{x^3} dx. \quad c) \int e^{3 \cos x} \operatorname{sen} x dx.$$

3. Calcular:

$$a) \int \operatorname{sen}^2 x dx. \quad b) \int \cos^2 x dx. \quad c) \int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 dx.$$

4. Calcular:

$$a) \int \frac{3x + 5}{x + 6} dx. \quad b) \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx. \quad c) \int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx.$$

**Solución.** 1. a) Usando  $(\log u)' = u'/u$ :

$$\int \frac{2x}{3x^2 + 1} dx = \frac{2}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \log(3x^2 + 1) + C.$$

b) Usando  $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$ :

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{2x^2 + 1} + C.$$

c) Usando  $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ :

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{1}{2} \int (-2x) \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

2. a) Usaremos la fórmula  $(\arctan u)' = u'/(1 + u^2)$ :

$$\int \frac{dx}{6 + 5x^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{1 + \frac{5x^2}{6}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} dx}{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} x\right) + C.$$

b) Usando  $(a^u)' = u'a^u \log a$  :

$$\int x^2 5^{x^3} dx = \frac{1}{3 \log 5} \int (3x^2) 5^{x^3} \log 5 dx = \frac{5^{x^3}}{3 \log 5} + C.$$

c) Usando  $(e^u)' = u'e^u$  :

$$\int e^{3 \cos x} \sen x dx = -\frac{1}{3} \int e^{3 \cos x} (-3 \sen x) dx = -\frac{e^{3 \cos x}}{3} + C.$$

3. Consideremos las fórmulas trigonométricas  $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$  y  $\cos^2 x - \sen^2 x = \cos 2x$ . Sumando y restando ambas:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad (1).$$

a) Usando la primera igualdad de (1) y que  $(\sen u)' = u' \cos u$  :

$$\int \sen^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sen 2x}{4} + C.$$

b) Usando la segunda igualdad de (1) y que  $(\sen u)' = u' \cos u$  :

$$\int \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sen 2x}{4} + C.$$

c) Usando  $\sen 2x = 2 \sen x \cos x$  :

$$\begin{aligned} \int (\sen x + \cos x)^2 dx &= \int (\sen^2 x + 2 \sen x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \int (1 + \sen 2x) dx = x - \frac{\cos 2x}{2} + C. \end{aligned}$$

4. a) Efectuando la división euclídea de  $3x + 5$  entre  $x + 6$ , obtenemos:

$$\frac{3x + 5}{x + 6} = 3 - \frac{13}{x + 6},$$

por tanto  $\int \frac{3x + 5}{x + 6} dx = 3x - 13 \int \frac{dx}{x + 6} = 3x - 13 \log |x + 6| + C.$

b) Efectuando la división euclídea de  $x^3$  entre  $x^2 + 1$ , obtenemos:

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1},$$

por tanto  $\int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$ .

c) Usando  $(\tan u)' = u' / \cos^2 u$ , obtenemos  $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx = \tan e^x + C$ .

### 8.3. Integrales por sustitución o cambio de variable

1. Calcular las siguientes integrales, efectuando el cambio de variable indicado:

$$a) \int x(4x^2 + 7)^9 dx, \quad t = 5x^2 + 7. \quad b) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad t = \sqrt{x+1}.$$

2. Efectuando sustituciones o cambios de variable adecuados, hallar las integrales:

$$a) \int x^3 \sqrt[3]{x^4 + 1} dx. \quad b) \int (2x + 1)^{25} dx. \quad c) \int \frac{(2 \log x + 3)^3}{x} dx.$$

3. Efectuando sustituciones o cambios de variable adecuados, hallar las integrales:

$$a) \int \frac{dx}{e^x + 1}. \quad b) \int \operatorname{sen} x \cos^7 x dx. \quad c) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} dx.$$

4. Calcular  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ , ( $a \neq 0$ ) usando la sustitución trigonométrica  $x = a \operatorname{sen} t$ .

5. Con la sustitución  $x = \operatorname{sh} t$ , calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

**Solución.** 1. a) Diferenciando  $t = 4x^2 + 7$ , queda  $dt = 8x dx$ , luego  $dx = dt/(8x)$ . Tenemos:

$$\int x(4x^2 + 7)^9 dx = \int \frac{t^9 dt}{8} = \frac{1}{8} \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{(4x^2 + 7)^{10}}{80} + C.$$

b) Diferenciando  $t = \sqrt{x+1}$ , queda  $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ . Además,  $x = t^2 - 1$ .

Tenemos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int 2(t^2 - 1) dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + C = \frac{2t}{3}(t^2 - 3) + C = \frac{2\sqrt{x+1}(x-2)}{3} + C.$$

2. a) Efectuemos la sustitución  $t = x^4 + 1$ , entonces  $dt = 4x^3 dx$ , luego  $dx = dt/(4x^3)$ . Tenemos:

$$\int x^3 \sqrt[3]{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int t^{1/3} dt = \frac{1}{4} \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3(x^4+1)\sqrt[3]{x^4+1}}{16} + C.$$

b) Efectuemos la sustitución  $t = 2x+1$ , entonces  $dt = 2 dx$ , luego  $dx = dt/2$ . Tenemos:

$$\int (2x+1)^{25} dx = \frac{1}{2} \int t^{25} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{26}}{26} + C = \frac{(2x+1)^{26}}{52} + C.$$

c) Efectuemos la sustitución  $t = 2 \log x + 3$ , entonces  $dt = 2dx/x$ , luego  $dx = (x dt)/2$ . Tenemos:

$$\int \frac{(2 \log x + 3)^3}{x} dx = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{t^4}{8} + C = \frac{(2 \log x + 3)^4}{8} + C.$$

3. a) Efectuando el cambio  $t = e^{-x}$ ,

$$\begin{aligned} t = e^{-x} &\Rightarrow dt = -e^{-x} dx \Rightarrow dt = -t dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{e^x + 1} \\ &= \int \frac{-dt}{t(\frac{1}{t} + 1)} = \int \frac{-dt}{1+t} = -\log|1+t| + C = -\log(1+e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

b) Efectuando el cambio  $t = \cos x$ , queda  $dt = -\sin x dx$ . Entonces,

$$\int \sin x \cos^7 x dx = -\int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

c) Efectuando el cambio  $t = \cos^2 x$ , queda  $dt = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx$ . Entonces,

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsen t + C = -\arcsen(\cos^2 x) + C.$$

4. Tenemos  $dx = a \cos t$ , por tanto,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} a \cos t dt = a^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \operatorname{sen} 2t}{4} + C. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $x = a \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(x/a)$ , y además

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Es decir,  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$ .

5. Usando la conocida fórmula  $\operatorname{Arg sh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} &= \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} \\ &= \int dt = t + C = \operatorname{Arg sh} x + C \\ &= \log(x + \sqrt{1 + x^2}) + C. \end{aligned}$$

## 8.4. Integración por partes

1. Usando integración por partes, calcular:

$$a) \int \log x dx. \quad b) \int x e^x dx. \quad c) \int x^2 e^x dx.$$

2. Usando integración por partes, calcular:

$$a) \int \arctan x dx. \quad b) \int x \cos 5x dx. \quad c) \int x 3^{-x} dx.$$

3. Usando integración por partes, calcular:

$$a) \int \frac{x dx}{\operatorname{sen}^2 x}. \quad b) \int 2^x \cos x dx.$$

4. Calcular  $I = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), usando el método de integración por partes.

5. Sea  $P(x)$  un polinomio real de grado 2 y  $a \neq 0$  un número real.

(i) Demostrar que  $\int P(x)e^{ax} dx = Q(x)e^{ax}$ , para algún polinomio real  $Q(x)$  de grado 2.

(ii) Calcular  $\int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx$ , usando el apartado anterior.

(iii) Calcular la misma integral usando integración por partes.

6. Demostrar la fórmula de la integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Solución.** 1. a) Las relaciones  $\begin{cases} u = \log x \\ dv = dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C.$$

b) Las relaciones  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

c) Las relaciones  $\begin{cases} u = x^2 dx \\ dv = e^x dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x, \end{cases}$  por tanto, y usando la integral calculada en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(e^x(x - 1)) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

2. a) Las relaciones  $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$$

b) Las relaciones  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 5x dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{5} \sin 5x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int x \cos 5x dx = \frac{x \sin 5x}{5} - \frac{1}{5} \int \sin 5x dx = \frac{x \sin 5x}{5} + \frac{\cos 5x}{25} + C.$$

c) Las relaciones  $\begin{cases} u = x \\ dv = 3^{-x} dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{\log 3} 3^{-x}, \end{cases}$  por tanto:

$$\begin{aligned} \int x 3^{-x} dx &= -\frac{x 3^{-x}}{\log 3} + \frac{1}{\log 3} \int 3^{-x} dx = -\frac{x 3^{-x}}{\log 3} - \frac{3^{-x}}{\log^2 3} + C. \\ &= -\frac{x \log 3 + 1}{3^x \log^2 3} + C. \end{aligned}$$

3. a) Las relaciones  $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x, \end{cases}$  por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\operatorname{sen}^2 x} &= -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x} \\ &= -x \cot x + \log |\operatorname{sen} x| + C. \end{aligned}$$

b) Las relaciones  $\begin{cases} u = 2^x \\ dv = \cos x dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = 2^x \log 2 dx \\ v = \operatorname{sen} x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int 2^x \cos x dx = 2^x \operatorname{sen} x - \log 2 \int 2^x \operatorname{sen} x dx. \quad (1)$$

Calculemos ahora  $\int 2^x \operatorname{sen} x dx$ . Las relaciones  $\begin{cases} u = 2^x \\ dv = \operatorname{sen} x dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = 2^x \log 2 dx \\ v = -\cos x, \end{cases}$  por tanto:

$$\int 2^x \operatorname{sen} x dx = -2^x \cos x + \log 2 \int 2^x \cos x dx. \quad (2)$$

Llamando  $I = \int 2^x \cos x dx$ , y usando las igualdades (1) y (2) :

$$I = 2^x \operatorname{sen} x - \log 2 (-2^x \cos x + I \log 2).$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos:

$$I = \int 2^x \cos x dx = \frac{2^x (\operatorname{sen} x - \log 2 \cdot \cos x)}{1 + \log^2 2} + C.$$

4. Las relaciones  $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \operatorname{sen} bx dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = ae^{ax} dx \\ v = -\frac{1}{b} \cos bx, \end{cases}$  por tanto:

$$I = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx. \quad (1)$$

Calculemos ahora  $J = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ . Las relaciones  $\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \cos bx \, dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = ae^{ax} \, dx \\ v = \frac{1}{b} \sin bx, \end{cases}$  por tanto:

$$\begin{aligned} J &= \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx. \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx - \frac{a}{b} I. \quad (2) \end{aligned}$$

Usando las igualdades (1) y (2) :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left( \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I \right) \\ &= \frac{e^{ax}}{b^2} (a \sin bx - b \cos bx) - \frac{a^2}{b^2} I. \end{aligned}$$

Despejando  $I$  en la igualdad anterior:

$$I = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

5. (i) Derivando ambos miembros de la igualdad:

$$P(x)e^{ax} = Q'(x)e^{ax} + aQ(x)e^{ax}.$$

Dado que  $e^{ax} \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , la igualdad anterior equivale a

$$P(x) = Q'(x) + aQ(x).$$

Si  $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  y  $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ , la igualdad anterior equivale a  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2Ax + B + a(Ax^2 + Bx + C)$ . Identificando coeficientes, obtenemos el sistema en las incógnitas  $A, B, C$  :

$$\begin{cases} aA = \alpha \\ 2A + aB = \beta \\ B + aC = \gamma \end{cases}$$

El determinante de la matriz del sistema es:

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} = a^3 \neq 0,$$

por tanto el sistema es compatible, siendo además  $A = \alpha/a \neq 0$ , lo cual implica que existe el polinomio de segundo grado  $Q(x)$  satisfaciendo la igualdad



dada.

(ii) Expresando  $\int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$ , y derivando:

$$(x^2 + 3x - 1)e^{2x} = (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}.$$

Dividiendo entre  $e^{2x}$  e identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 3 \\ B + 2C = -1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $A = 1/2$ ,  $B = 1$ ,  $C = -1$ . La integral pedida es por tanto:

$$\int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right) e^{2x} + K, \quad (K \text{ constante}).$$

(iii) Las relaciones  $\begin{cases} u = x^2 + 3x - 1 \\ dv = e^{2x} dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = (2x + 3)dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x}, \end{cases}$  por tanto:

$$\int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x^2 + 3x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 3)e^{2x} dx. \quad (1)$$

Calculemos  $\int (2x + 3)dx$ . Las relaciones  $\begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = e^{2x} dx, \end{cases}$  implican  $\begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x}, \end{cases}$  por tanto:

$$\int (2x + 3)dx = \frac{1}{2}(2x + 3)e^{2x} - \int e^{2x} dx = (x + 1) e^{2x}. \quad (2)$$

Usando la igualdades (1) y (2) :

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx &= \frac{1}{2}(x^2 + 3x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2} (x + 1) e^{2x} + K \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right) e^{2x} + K. \end{aligned}$$

6. Si  $u = u(x)$  y  $v = v(x)$  son funciones derivables, entonces  $(uv)' = u'v + v'u$ . La diferencial de  $uv$  es por tanto:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = (u' dx)v + u(v' dx) = v du + u dv.$$

En consecuencia, podemos escribir  $u dv = d(uv) - v du$ . Integrando ambos miembros, y teniendo en cuenta que integración y derivación son procesos inversos:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

### 8.5. Integración de funciones racionales (1)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ .
2. Calcular  $\int \frac{x^3 dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ .
3. Calcular  $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx$ .
4. Calcular  $\int \frac{dx}{x^4 - x^3}$ .
5. Calcular  $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + x - 2)^2}$ .

**Solución.** 1. Las raíces del polinomio  $x^2 - 5x + 6$  son  $x = 2$  y  $x = 3$ , por tanto  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ . Tenemos:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Igualando numeradores y dando a  $x$  los valores  $x = 2$  y  $x = 3$ , obtenemos  $A = -1$  y  $B = 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= - \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\log|x-2| + \log|x-3| + C \\ &= \log \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C. \end{aligned}$$

2. Efectuando la división euclídea, obtenemos

$$\frac{x^3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 1 + \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2},$$

por tanto

$$\int \frac{x^3 dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + \int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx. \quad (1)$$

Una raíz del polinomio  $x^3 - 2x^2 - x + 2$  es  $x = 1$ . Usando el algoritmo de Ruffini, obtenemos la descomposición  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \\ &= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores y dando a  $x$  los valores  $x = 1$ ,  $x = -1$  y  $x = 2$  obtenemos  $A = -1/2$ ,  $B = -1/6$  y  $C = 8/3$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log|x+1| + \frac{8}{3} \log|x-2| + C. \end{aligned}$$

Usando (1) y simplificando las expresiones con logaritmos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} &= x + \\ &\frac{1}{6} (-3 \log|x-1| - \log|x+1| + 16 \log|x+2|) + C \\ &= x + \frac{1}{6} \log \left| \frac{(x+2)^{16}}{(x-1)^3(x+1)} \right| + C. \end{aligned}$$

3. Expresamos

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Igualando los numeradores:

$$x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1). \quad (1)$$

Para determinar los coeficientes indeterminados, podemos dar en (1) valores a  $x$ , y para mayor simplicidad, los primeros que damos son los de las raíces del denominador, en este caso  $x = 1$  y  $x = -2$ . Tenemos:

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 9A \Rightarrow A = 2/9.$$

$$x = -2 \Rightarrow -1 = -3C \Rightarrow C = 1/3.$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = 4A - 2B - C \Rightarrow B = -2/9.$$

La integral pedida es por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2}{9} \log|x-1| - \frac{2}{9} \log|x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + C. \\ &= \frac{2}{9} \left( \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{3}{2(x+2)} \right) + C. \end{aligned}$$

4. El denominador es  $x^3(x-1)$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} \\ &= \frac{Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) + Dx^3}{x^3(x-1)}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores y dando a  $x$  los valores 1, 0, -1 y 2 :

$$x = 1 \Rightarrow 1 = D, \quad x = 0 \Rightarrow 1 = -C.$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -2A + 2B - 2C - D.$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + C + 8D.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $A = -1$ ,  $B = -1$ ,  $C = -1$ , y  $D = 1$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - x^3} &= - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\log|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \log|x-1| + C = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \log\left|\frac{x-1}{x}\right| + C. \end{aligned}$$

5. Las raíces de  $x^2 + x - 2$  son  $x = 1$  y  $x = -2$ , luego  $(x^2 + x - 2)^2 = (x-1)^2(x+2)^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores y dando a  $x$  los valores 1, -2, 0 y -1 :

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 9B, \quad x = -2 \Rightarrow -1 = 9D.$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -4A + 4B + 2C + D.$$

$$x = -1 \Rightarrow 0 = -2A + B + 4C + 4D.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $A = -1/27$ ,  $B = 2/9$ ,  $C = 1/27$ , y  $D = -1/9$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + x - 2)^2} &= -\frac{1}{27} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{27} \int \frac{dx}{x+2} \\ &\quad - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{27} \log|x-1| - \frac{2}{9(x-1)} \\ &\quad + \frac{1}{27} \log|x+2| + \frac{1}{9(x+2)} + C. \end{aligned}$$

Agrupando logaritmos y simplificando:

$$\int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{1}{27} \left( \frac{3}{x+2} - \frac{6}{x-1} + \log\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \right) + C.$$

## 8.6. Integración de funciones racionales (2)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$ .
2. Calcular  $\int \frac{4x - 5}{3x^2 - x + 1} dx$ .
3. Sea el trinomio  $ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ). Demostrar que si dicho trinomio no tiene raíces reales, entonces

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C.$$

**Solución.** 1. El denominador no tiene raíces. Completamos cuadrados:

$$3x^2 - x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} = 3x^2 + 6kx + 3k^2 + l.$$

Identificando coeficientes,  $3 = 3$ ,  $6k = -1$ ,  $3k^2 + l = 1$ . Resolviendo, queda  $k = -1/6$  y  $l = 11/12$ , con lo cual

$$3x^2 - x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} &= \int \frac{dx}{3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}} = \frac{12}{11} \int \frac{dx}{\frac{36}{11}\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{12}{11} \int \frac{dx}{\left(\frac{6}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{1}{6}\right)\right)^2 + 1} = \frac{12}{11} \frac{\sqrt{11}}{6} \int \frac{\frac{6}{\sqrt{11}} dx}{\left(\frac{6}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{1}{6}\right)\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{6}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{1}{6}\right)\right) + C = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{6x - 1}{\sqrt{11}} + C. \end{aligned}$$

2. La derivada del denominador es  $6x - 1$ . Escribamos  $4x - 5 = \alpha(6x - 1) + \beta$ . Identificando coeficientes, obtenemos  $4 = 6\alpha$  y  $-5 = -\alpha + \beta$ , con lo cual  $\alpha = 2/3$  y  $\beta = -13/3$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x - 5}{3x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{\frac{2}{3}(6x - 1) - \frac{13}{3}}{3x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{6x - 1}{3x^2 - x + 1} dx \\ &- \frac{13}{3} \int \frac{1}{3x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{3} \log |3x^2 - x + 1| - \frac{13}{3} \int \frac{1}{3x^2 - x + 1} dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, la última integral ya la habíamos calculado en el ejercicio anterior:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{6x - 1}{\sqrt{11}} + C.$$

Queda:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5} dx = \frac{2}{3} \log|x^2+2x+5| - \frac{26}{3\sqrt{11}} \arctan \frac{6x-1}{\sqrt{11}} + C.$$

3. Completamos cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = a(x+k)^2 + l = ax^2 + 2akx + ak^2 + l.$$

Identificando coeficientes,  $a = a$ ,  $2ak = b$ ,  $ak^2 + l = c$ . Resolviendo, queda  $k = b/2a$  y  $l = (4ac - b^2)/4a$ , con lo cual

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (1)$$

Por hipótesis, el trinomio  $ax^2 + bx + c$  no tiene raíces reales, por tanto  $4ac - b^2 > 0$ , y al ser  $a > 0$ , el último término de (1) es positivo. Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}} \\ &= \frac{4a}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{\frac{4a^2}{4ac - b^2} \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{4a}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{\left( \frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} \left( x + \frac{b}{2a} \right) \right)^2 + 1} \\ &= \frac{4a}{4ac - b^2} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \int \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} dx}{\left( \frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} \left( x + \frac{b}{2a} \right) \right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C. \end{aligned}$$

## 8.7. Integración de funciones racionales (3)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$ .
2. Calcular  $I = \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$ .

**Solución.** 1. El denominador tiene la raíz  $x = 1$ . Aplicando la regla de Ruffini, obtenemos  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ , y el polinomio  $x^2 + x + 1$  no tiene raíces reales. La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 - 1} &= \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

Iguando numeradores y dando a  $x$  los valores 1, 0 y  $-1$ :

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 3A$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A - C.$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = A + (-B + C)(-2).$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $A = 1/3$ ,  $B = -1/3$  y  $C = -2/3$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x - 1| - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Calculemos la última integral. La derivada de  $x^2 + x + 1$  es  $2x + 1$ . Escribamos  $x + 2 = \alpha(2x + 1) + \beta$ . Identificando coeficientes, obtenemos  $1 = 2\alpha$  y  $2 = \alpha + \beta$ , con lo cual  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 3/2$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \log|x^2 + x + 1| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\frac{4}{3}(x + \frac{1}{2})^2 + 1} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})\right)^2 + 1} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3 \cdot 2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) + C. \quad (3) \end{aligned}$$

Usando (1), (2), y (3):

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \log|x - 1| - \frac{1}{6} \log|x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. El denominador tiene la raíz  $x = 1$ . Aplicando la regla de Ruffini, obtenemos la descomposición:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + 1),$$

y el polinomio  $x^2 + 1$  no tiene raíces reales. La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores y dando a  $x$  los valores 1, 0,  $-1$  y  $2$ :

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow 1 = 2B \\ x = 0 &\Rightarrow 0 = -A + B + D. \\ x = -1 &\Rightarrow -1 = -4A + 2B + 4(-C + D). \\ x = 2 &\Rightarrow 2 = 5A + 5B + 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $A = 0$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = 0$  y  $D = -1/2$ . Entonces,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

## 8.8. Integración de funciones racionales, método de Hermite (4)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ .
2. Calcular  $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx$ .
3. Calcular  $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$ .
4. a) Descomponer en suma de fracciones racionales simples:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

- b) Usando la descomposición del apartado anterior, hallar  $\int f(x) dx$ .



**Solución.** 1. Recordemos el método de Hermite. Si en la fracción racional  $P(x)/Q(x)$ , el denominador contiene un factor de segundo grado sin raíces reales y elevado a una potencia mayor que 1, se verifica la fórmula de Hermite-Ostrogradski:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (*)$$

siendo  $Q_1(x) = \text{mcd}\{Q(x), Q'(x)\}$  y  $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ .

$P_1(x)$  y  $P_2(x)$  son polinomios con coeficientes indeterminados con grados menores en una unidad que los grados de  $Q_1(x)$  y  $Q_2(x)$  respectivamente. Estos coeficientes indeterminados se calculan derivando ambos miembros de la igualdad (\*).

El polinomio  $x^2 + 1$  no tiene raíces reales. En este caso,  $Q(x) = (x^2 + 1)^2$ . Entonces:

$$Q_1(x) = \text{mcd}\{(x^2 + 1)^2, 2(x^2 + 1)(2x)\} = x^2 + 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2 + 1} = x^2 + 1.$$

La igualdad (\*), se transforma en:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 1} dx.$$

Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{A(x^2 + 1) - 2x(Ax + B)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + 1) - 2x(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores, identificando coeficientes y resolviendo el correspondiente sistema obtenemos  $A = D = 1/2$  y  $B = C = 0$ , con lo cual:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

2. El polinomio  $x^2 + 2x + 2$  no tiene raíces reales. Apliquemos la fórmula de Hermite-Ostrogradski:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx. \quad (*)$$

En este caso,  $Q(x) = (x^2 + 2x + 2)^2$ . Entonces:

$$Q_1(x) = \text{mcd}\{(x^2 + 2x + 2)^2, 2(x^2 + 1)(2x + 2)\} = x^2 + 2x + 2,$$

$$Q_2(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)^2}{x^2 + 2x + 2} = x^2 + 2x + 2.$$

La igualdad (\*), se transforma en:

$$\int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2} &= \frac{A(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(Ax + B)}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{A(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores, identificando coeficientes y resolviendo el correspondiente sistema obtenemos  $A = 1$ ,  $B = -1/2$ ,  $C = 0$ , y  $D = 1$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{x - \frac{1}{2}}{2(x^2 + 2x + 2)} + \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{2x - 1}{4(x^2 + 2x + 2)} + \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} \\ &= \frac{2x - 1}{4(x^2 + 2x + 2)} + \arctan(x + 1) + C. \end{aligned}$$

3. El polinomio  $x^2 + x + 1$  no tiene raíces reales. Además,  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ , con lo cual,

$$I = \int \frac{dx}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2} = \int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}.$$

Aplicamos la fórmula de Hermite-Ostrogradski:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx. \quad (*)$$

En este caso,  $Q(x) = (x^3 - 1)^2$ . Entonces:

$$Q_1(x) = \text{mcd}\{(x^3 - 1)^2, 6x^2(x^3 - 1)\} = x^3 - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{(x^3 - 1)^2}{x^3 - 1} = x^3 - 1.$$

La igualdad (\*), se transforma en:

$$\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 - 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1} dx.$$

Como hicimos en otros ejercicios, derivando, identificando coeficientes y resolviendo el sistema correspondiente, obtenemos:

$$A = 0, B = -\frac{1}{3}, C = 0, D = 0, E = 0, F = -\frac{2}{3},$$

con lo cual,

$$I = -\frac{x}{3(x^3 - 1)} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3 - 1}.$$

Ahora bien, la última integral ya la habíamos calculado en otro ejercicio:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \log|x - 1| - \frac{1}{6} \log|x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Por tanto:

$$I = -\frac{x}{3(x^3 - 1)} - \frac{2}{9} \log|x - 1| + \frac{1}{9} \log|x^2 + x + 1| + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. a) El polinomio  $x^2 + 1$  no tiene raíces reales, luego la descomposición pedida es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}.$$

Equivalentemente,

$$f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1)^2 + B(x^2 + 1)^2}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} + \frac{(Cx + D)(x + 1)^2(x^2 + 1) + (Ex + F)(x + 1)^2}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2}.$$

Igualando numeradores, identificando coeficientes, y resolviendo el correspondiente sistema obtenemos:

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{4}, E = -\frac{1}{2}, F = 0,$$

con lo cual,

$$f(x) = \frac{1/2}{x + 1} + \frac{1/4}{(x + 1)^2} + \frac{(-1/2)x + 1/4}{x^2 + 1} + \frac{(-1/2)x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b) Aparecen las integrales inmediatas:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1|, \quad \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}, \quad \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \log(x^2+1),$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x, \quad \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Usando la linealidad de la integral indefinida y simplificando, obtenemos:

$$\int f(x) dx = \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctan x + C.$$

## 8.9. Integración de funciones irracionales (1)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[4]{3x+1}}$ .
2. Calcular  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$ .
3. Calcular  $I = \int \frac{dx}{(2x-5)^{2/3} - (2x-5)^{1/2}}$ .

**Solución.** Recordamos que las integrales del tipo:

$$\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_1/q_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_m/q_m} \right] dx$$

en donde  $R$  es una función racional y los  $p_i, q_i$ , son enteros, se transforman en integrales racionales efectuando la sustitución:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad n = \text{mcm}\{q_1, \dots, q_m\}.$$

1. Si  $t^4 = 3x+1$ , entonces  $4t^3 dt = 3 dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[4]{3x+1}} &= \frac{4}{3} \int \frac{t^3 dt}{t^2 - t} = \frac{4}{3} \int \frac{t^2 dt}{t-1} \\ &= \frac{4}{3} \int \left( t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{4}{3} \left( \frac{t^2}{2} + t + \log|t-1| \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{3x+1} + |\sqrt[4]{3x+1} - 1| + C. \end{aligned}$$

2. Si  $t^2 = x+2$ , entonces  $2t dt = dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}} &= 2 \int \frac{(t^2-2)^3 t dt}{t} = 2 \int (t^2-2)^3 dt = \\ &= 2 \int (t^6 - 6t^4 + 12t^2 - 8) dt = 2 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + 4t^3 - 8t \right) + C. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $t = \sqrt{x+2}$  y simplificando:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}} = \frac{2\sqrt{x+2}}{35} (5(x+2)^3 - 42(x+2)^2 + 140(x+2) - 280) + C.$$

3. Si  $t^6 = 2x - 5$ , entonces  $6t^5 dt = 2 dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(2x-5)^{2/3} - (2x-5)^{1/2}} = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ &= 3 \int \left( t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{3t^2}{2} + 3t + 3 \log|t-1| + C. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $t = (2x-5)^{1/6}$ :

$$I = \frac{3\sqrt[3]{2x-5}}{2} + 3\sqrt[6]{2x-5} + 3 \log|\sqrt[6]{2x-5} - 1| + C.$$

## 8.10. Integración de funciones irracionales (2)

1. Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ .

2. Calcular las integrales:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+6}}, \quad I_2 = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+6}} dx.$$

3. Calcular las integrales:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \quad I_2 = \int \frac{2x-3}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx.$$

4. Calcular  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ .

5. Se consideran las integrales:

$$I = \int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad J = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

con  $m \neq 0$ . Demostrar que la sustitución  $t = \frac{1}{mx+n}$ , transforma las integrales del tipo  $I$  en integrales del tipo  $J$ .

**Solución.** Recordemos las siguientes cuestiones teóricas:

(a) Integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Para resolver estas integrales, basta descomponer el trinomio en la forma

$$ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l,$$

y aplicar alguna de las fórmulas:

$$(i) \int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2 + a}} = \log|u + \sqrt{u^2 + a}| + C \quad (a \neq 0).$$

$$(ii) \int \frac{u' dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

(b) Integrales del tipo

$$\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

La derivada de  $ax^2 + bx + c$  es  $2ax + b$ . Expresemos:

$$mx + n = \alpha(2ax + b) + \beta.$$

Identificando coeficientes, obtenemos  $m = 2\alpha a$ ,  $n = \alpha b + \beta$ , con lo cual,  $\alpha = m/2a$  y  $\beta = (2na - mb)/2a$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax + b) + \frac{2na - mb}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\ &= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \frac{2na - mb}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

La primera integral es inmediata, y la segunda es del tipo (a).

1. Expresando  $-2x^2 + 3x + 2 = -2(x + k)^2 + l = -2x^2 - 4kx - 2k^2 + l$ , e identificando coeficientes obtenemos  $-2 = -2$ ,  $3 = -4k$  y  $2 = -2k^2 + l$ . Resolviendo obtenemos  $k = -3/4$  y  $l = 25/8$ , por tanto:

$$2 + 3x - 2x^2 = \frac{25}{8} - 2 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 - \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{3}{4}\right)\right)^2.$$

Entonces, aplicando la fórmula (ii) :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 - \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{3}{4}\right)\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \frac{\sqrt{2} \left(x - \frac{3}{4}\right)}{\frac{5}{\sqrt{8}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \frac{4x - 3}{5} + C. \end{aligned}$$

2. Podemos expresar  $x^2 + 2x + 6 = (x + 1)^2 + 5$ . Usando

$$\int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2 + a}} = \log|u + \sqrt{u^2 + a}| + C,$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 5}} = \log|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 6}| + C.$$

La derivada de  $x^2 + 2x + 6$  es  $2x + 2$ . Expresemos  $x + 3 = \alpha(2x + 2) + \beta$ . Identificando coeficientes obtenemos  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 2$ . Entonces,

$$I_2 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x + 2) + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} dx = \int \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 6}} dx + 2I_1$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 6} + 2 \log|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 6}| + C.$$

3. Expresando  $1 - 2x - x^2 = 2 - (x + 1)^2$  y usando

$$\int \frac{u' dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C,$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (x + 1)^2}} = \arcsen \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

La derivada de  $1 - 2x - x^2$  es  $-2x - 2$ . Expresemos  $2x - 3 = \alpha(-2x - 2) + \beta$ . Identificando coeficientes obtenemos  $\alpha = -1$  y  $\beta = -5$ . Entonces,

$$I_2 = \int \frac{-(-2x - 2) - 5}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx = - \int \frac{-2x - 2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx - 5I_1$$

$$= -2\sqrt{1 - 2x - x^2} - 5 \arcsen \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

4. Efectuando la sustitución  $t = \frac{1}{x}$ ,  $dt = -\frac{1}{x^2} dx = -t^2 dx$  y  $x = \frac{1}{t}$ . Entonces,

$$I = \int \frac{\frac{dt}{-t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$= - \log|t + \sqrt{t^2 - 1}| + C.$$

Sustituyendo  $t = 1/x$ :

$$I = - \log \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right| + C = - \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$= \log \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C.$$

5. Despejando  $x$  en  $t = \frac{1}{mx+n}$  y diferenciando:

$$x = \frac{1-nt}{mt}, \quad dt = -\frac{m}{(mx+n)^2} dx = -mt^2 dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dt}{-mt^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{a \left(\frac{1-nt}{mt}\right)^2 + b \left(\frac{1-nt}{mt}\right) + c}} = -\frac{1}{m} \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{a(1-nt)^2 + b(1-nt)mt + cm^2t^2}{m^2t^2}}} \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{a(1-nt)^2 + b(1-nt)mt + cm^2t^2}}. \end{aligned}$$

El radicando es de la forma  $At^2 + Bt + C$ , en consecuencia obtenemos una integral del tipo  $J$ .

### 8.11. Integración de funciones irracionales (3)

1. Calcular  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$ .

2. Calcular  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ .

3. Mediante un adecuado cambio de variable, transformar la integral

$$I = \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}},$$

en otra en la que sea aplicable el método alemán.

**Solución.** Recordamos las siguientes cuestiones teóricas:

(i) *Método alemán.* Las integrales del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

en donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , se resuelven usando la igualdad:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

siendo  $Q_{n-1}(x)$  un polinomio de grado  $n-1$  con coeficientes indeterminados, y  $\lambda$  un número real. Estos coeficientes, y  $\lambda$  se calculan derivando la igualdad



anterior.

(ii) Las integrales del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

se reducen a las del tipo (i) mediante la sustitución  $t = \frac{1}{x - \alpha}$ .

1. Usemos el método alemán. Expresemos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &= A\sqrt{x^2 - x + 1} \\ &+ (Ax + B)\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - x + 1}}. \end{aligned}$$

Tomando común denominador  $2\sqrt{x^2 - x + 1}$ , e igualando numeradores:

$$2x^2 = 2A(x^2 - x + 1) + (Ax + B)(2x - 1) + 2\lambda.$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 4A = 2 \\ -3A + 2B = 0 \\ 2A - B + 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos  $A = 1/2$ ,  $B = 3/4$  y  $\lambda = -1/8$ . Por tanto:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

La última integral, corresponde a un tipo conocido:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \dots = \log|2x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}| + C.$$

Por tanto, la integral  $I$  pedida es:

$$I = \frac{1}{8} \left( \sqrt{x^2 - x + 1} (4x + 6) - \log|2x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}| \right) + C.$$

2. Usemos el método alemán. Expresemos

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Derivando:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + (Ax^2 + Bx + C)\frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Tomando común denominador  $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ , e igualando numeradores:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (2Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 1) + \lambda$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 3Ax^3 + (5A + 2B)x^2 + (4A + 3B + C)x + 2B + C + \lambda.$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 5A + 2B = 2 \\ 4A + 3B + C = 3 \\ 2B + C + \lambda = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos  $A = 1/3$ ,  $B = 1/6$ ,  $C = 7/6$  y  $\lambda = 5/2$ .

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

La última integral, corresponde a un tipo conocido:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \dots = \log|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C.$$

Por tanto, la integral  $I$  pedida es:

$$I = \frac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 2}(2x^2 + x + 7) + \frac{5}{2}\log|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C.$$

3. Efectuando la sustitución  $t = \frac{1}{x}$ , queda  $dt = -\frac{1}{x^2}dx = -t^2 dx$ . Entonces,

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)^5 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} = - \int \frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{-t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

integral a la cual es aplicable el método alemán.

### 8.12. Integración de funciones irracionales (4)

1. Calcular  $I = \int \sqrt{x^2 + 2x + 7} dx$ .

2. Calcular  $I = \int \sqrt{x - x^2} dx$ .

3. Demostrar que

$$\int \sqrt{A + u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A + u^2} + \frac{A}{2} \log|u + \sqrt{A + u^2}| + C.$$

4. Demostrar que:

$$\int \sqrt{A^2 - u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A^2 - u^2} + \frac{A^2}{2} \arcsen \frac{u}{A} + C \quad (A \neq 0).$$

**Solución.** Recordamos que las integrales del tipo  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$  ( $a \neq 0$ ) se resuelven efectuando la conocida descomposición  $ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l$ , y usando alguna de las fórmulas:

$$\int \sqrt{A + u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A + u^2} + \frac{A}{2} \log|u + \sqrt{A + u^2}| + C \quad (A \neq 0),$$

$$\int \sqrt{A^2 - u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A^2 - u^2} + \frac{A^2}{2} \arcsen \frac{u}{A} + C \quad (A \neq 0).$$

1. Descomponiendo  $x^2 + 2x + 7 = (x + k)^2 + l$ , obtenemos  $x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6$ . Usando

$$\int \sqrt{A + u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A + u^2} + \frac{A}{2} \log|u + \sqrt{A + u^2}| + C,$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{6 + (x + 1)^2} dx \\ &= \frac{x + 1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 7} + 3 \log|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 7}| + C. \end{aligned}$$

2. Descomponiendo  $x - x^2 = -(x + k)^2 + l$ , obtenemos  $x - x^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ . Usando

$$\int \sqrt{A^2 - u^2} u' dx = \frac{u}{2} \sqrt{A^2 - u^2} + \frac{A^2}{2} \arcsen \frac{u}{A} + C,$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{2x + 1}{4} \sqrt{x - x^2} + \frac{1}{8} \arcsen(2x - 1) + C. \end{aligned}$$

3. Para  $u = x$ , se verifica:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2} \sqrt{A+x^2} + \frac{A}{2} \log|x + \sqrt{A+x^2}| + C \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{A+x^2} + \frac{x}{2} \frac{x}{\sqrt{A+x^2}} + \frac{A}{2} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{A+x^2}}}{x + \sqrt{A+x^2}} \\ &= \frac{A+x^2+x^2}{2\sqrt{A+x^2}} + \frac{A}{2} \frac{\sqrt{A+x^2} + x}{(x + \sqrt{A+x^2})\sqrt{A+x^2}} \\ &= \frac{A+2x^2}{2\sqrt{A+x^2}} + \frac{A}{2\sqrt{A+x^2}} = \frac{A+x^2}{\sqrt{A+x^2}} = \sqrt{A+x^2}. \end{aligned}$$

Para  $u = u(x)$ , y usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{2} \sqrt{A+u^2} + \frac{A}{2} \log|u + \sqrt{A+u^2}| + C \right) = \sqrt{A+u^2} u',$$

lo cual demuestra la validez de la fórmula dada.

4. Para  $u = x$ , se verifica:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2} \sqrt{A^2-x^2} + \frac{A^2}{2} \arcsen \frac{x}{A} + C \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{A^2-x^2} + \frac{x}{2} \frac{-x}{\sqrt{A^2-x^2}} + \frac{A^2}{2} \frac{1/A}{\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}} \\ &= \frac{A^2-x^2-x^2}{2\sqrt{A^2-x^2}} + \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{A^2-x^2}{A^2}}} = \frac{A^2-x^2}{\sqrt{A^2-x^2}} = \sqrt{A^2-x^2}. \end{aligned}$$

Para  $u = u(x)$ , y usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{2} \sqrt{A^2-u^2} + \frac{A^2}{2} \arcsen \frac{u}{A} + C \right) = \sqrt{A^2-u^2} u',$$

lo cual demuestra la validez de la fórmula dada.

### 8.13. Integración de diferenciales binomias

1. Calcular  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}$ .
2. Calcular  $I = \int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}$ .
3. Calcular  $I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$ .

**Solución.** Recordamos que se llaman *integrales de diferenciales binomias* a las integrales del tipo:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (*)$$

donde  $m, n$  y  $p$  son números racionales y los coeficientes  $a$  y  $b$ , números reales. Estas integrales se pueden expresar en términos de funciones elementales en los siguientes casos:

- 1)  $p \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la sustitución  $x = t^s$ , con  $s$  el mínimo común múltiplo de los denominadores de  $m$  y  $n$ , convierte (\*) en una integral racional.
- 2)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la sustitución  $a + bx^n = t^s$ , siendo  $s$  el denominador de la fracción  $p$ , convierte (\*) en una integral racional.
- 3)  $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la sustitución  $a + bx^{-n} = t^s$ , siendo  $s$  el denominador de la fracción  $p$ , convierte (\*) en una integral racional.

1. Podemos expresar  $I = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{-10} dx$ . Se trata pues de una diferencial binomia con  $p = -10$ ,  $m = -1/2$  y  $n = 1/4$ . Dado que  $p$  es entero, estamos en el primer caso de integrabilidad. El mínimo común múltiplo de los denominadores de  $m$  y  $n$  es 4. Efectuando el cambio  $x = t^4$ ,  $dx = 4t^3 dt$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int t^{-2} (1+t)^{-10} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t dt}{(t+1)^{10}} = 4 \int \frac{(t+1) - 1}{(t+1)^{10}} dt \\ &= 4 \left( \int (t+1)^{-9} dt - \int (t+1)^{-10} dt \right) = 4 \left( -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} \right) + C \\ &= \frac{4}{(t+1)^8} \left( \frac{1}{9(t+1)} - \frac{1}{8} \right) + C = \frac{4}{(t+1)^8} \frac{8 - 9(t+1)}{72(t+1)} + C \\ &= \frac{1 - 9t - 1}{18(t+1)^9} + C = -\frac{9\sqrt[4]{x} + 1}{18(\sqrt[4]{x} + 1)^9} + C. \end{aligned}$$

2. Podemos expresar  $I = \int x^3 (a^2 - x^2)^{-3/2} dx$ . Se trata pues de una diferencial binomia con  $p = -3/2$ ,  $m = 3$  y  $n = 2$ . Dado que  $(m+1)/n = 2$  es entero, estamos en el segundo caso de integrabilidad y el denominador de  $p$  es 2. Efectuando el cambio  $a^2 - x^2 = t^2$ ,  $-2x dx = 2t dt$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 (a^2 - x^2)^{-3/2} x dx = \int (a^2 - t^2) t^{-3} (-t dt) \\ &= \int (1 - a^2 t^{-2}) dt = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2 + a^2}{t} + C = \frac{2a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

3. Podemos expresar  $I = \int x^{-4} (1 + x^2)^{-1/2} dx$ . Se trata pues de una diferencial binomia con  $p = -1/2$ ,  $m = -4$  y  $n = 2$ . Dado que  $p + (m+1)/n = -2$  es entero, estamos en el tercer caso de integrabilidad y el denominador de  $p$  es 2. Efectuando el cambio  $x^{-2} + 1 = t^2$ :

$$-x^{-3} dx = t dt, \quad t = \sqrt{1 + x^{-2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-4} (x^2(x^{-2} + 1))^{-1/2} dx = \int x^{-5} (x^{-2} + 1)^{-1/2} dx \\ &= \int x^{-2} (x^{-2} + 1)^{-1/2} (x^{-3} dx) = \int (t^2 - 1)t^{-1}(-t dt) \\ &= \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = t \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \left(1 - \frac{x^2 + 1}{3x^2}\right) + C = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

## 8.14. Integración de funciones trigonométricas (1)

1. Calcular  $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x dx$ .
2. Calcular  $I = \int \operatorname{sen}^5 x dx$ .
3. Calcular  $I = \int \operatorname{sen}^{10} x \cos^3 x dx$ .
4. Calcular  $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$ .
5. Calcular  $I = \int \operatorname{sen}^4 x dx$ .

**Solución.** Consideremos las integrales del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx, \quad (m, n \text{ enteros}).$$

(a) Si  $m$  es impar y positivo, efectuamos la sustitución  $t = \cos x$ , y si  $n$  es impar y positivo, la sustitución  $t = \operatorname{sen} x$ .

(b) Si  $m$  y  $n$  son pares y positivos, usamos las fórmulas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \operatorname{sen} x \cos x &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x,\end{aligned}$$

las cuales permiten ir rebajando sucesivamente los exponentes  $m$  y  $n$  hasta obtener una integral inmediata.

1. Efectuando la sustitución  $t = \operatorname{sen} x$ ,  $dt = \cos x \, dx$  y por tanto:

$$\begin{aligned}I &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^4 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 \, dt \\ &= \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \, dt \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2 \operatorname{sen}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C.\end{aligned}$$

2. Efectuando la sustitución  $t = \cos x$ ,  $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$  y por tanto:

$$\begin{aligned}I &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\ &= - \int (1 - t^2)^2 \, dt = - \int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt \\ &= -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

3. Efectuando la sustitución  $t = \operatorname{sen} x$ ,  $dt = \cos x \, dx$  y por tanto:

$$\begin{aligned}I &= \int \operatorname{sen}^{10} x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^{10} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int t^{10} (1 - t^2) \, dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} - \frac{\operatorname{sen}^{13} x}{13} + C.\end{aligned}$$

4. Usando  $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$  y  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  :

$$I = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \, dx = \int \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x \right) + C = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C.$$

5. Usando  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx. \quad (*) \end{aligned}$$

Usando  $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$  :

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + C.$$

Sustituyendo en (\*) :

$$I = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C.$$

## 8.15. Integración de funciones trigonométricas (2)

1. Calcular  $I = \int \tan^4 x dx$ .
2. Calcular  $I = \int \tan^5 x dx$ .
3. Calcular  $I = \int \cot^4 x dx$ .
4. Calcular  $I = \int \tan^2 7x dx$ .

**Solución.** Consideremos las integrales:

$$(i) \int \tan^m x dx. \quad (ii) \int \cot^m x dx. \quad (m \text{ entero positivo}).$$

La integral (i) se pueden reducir sucesivamente de grado, usando la fórmula de trigonometría  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$  :

$$\begin{aligned} \int \tan^m x dx &= \int \tan^{m-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{m-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{m-2} x dx. \end{aligned}$$

La integral  $\int \tan^{m-2} x \sec^2 x dx$  se convierte en inmediata con la sustitución  $t = \tan x$  y la integral  $\int \tan^{m-2} x dx$  es la de partida, con el exponente



rebajado. Para la integral del tipo (ii) se procede de la misma manera, usando la fórmula de trigonometría  $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ .

1. Tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio  $t = \tan x$ ,  $dt = \sec^2 x$ , por tanto

$$\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + C.$$

Por otra parte:

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$$

En consecuencia,

$$I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$$

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^5 x \, dx = \int \tan^3 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^3 x \, dx. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio  $t = \tan x$ ,  $dt = \sec^2 x$ , por tanto

$$\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\tan^4 x}{4} + C.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \tan^2 x \, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \log|\cos x| + C. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$I = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x| + C.$$

3. Tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \cot^4 x \, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x \, dx = \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio  $t = \cot x$ ,  $dt = -\csc^2 x$ , por tanto

$$\int \cot^2 x \csc^2 x \, dx = - \int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cot^3 x}{3} + C.$$

Por otra parte:

$$\int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) \, dx = -\cot x - x + C.$$

En consecuencia,

$$I = -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + C.$$

4. Tenemos:

$$I = \int \tan^2 7x \, dx = \int (\sec^2 7x - 1) \, dx = \frac{1}{7} \tan 7x - x + C.$$

## 8.16. Integración de funciones trigonométricas (3)

1. Calcular  $\int \sen 5x \cos 7x \, dx$ .
2. Calcular  $\int \sen 13x \sen 8x \, dx$ .
3. Calcular  $\int \cos(ax + b) \cos(ax - b) \, dx$ .
4. Demostrar:

$$(a) \sen px \cos qx = \frac{1}{2} [\sen(p + q)x + \sen(p - q)x].$$

$$(b) \sen px \sen qx = \frac{1}{2} [\cos(p - q)x - \cos(p + q)x].$$

$$(c) \cos px \cos qx = \frac{1}{2} [\cos(p - q)x + \cos(p + q)x].$$

**Solución.** Las integrales de los tipos:

$$\int \sen px \cos qx \, dx, \quad \int \sen px \sen qx \, dx, \quad \int \cos px \cos qx \, dx,$$

con  $p, q$  números reales, se transforman en inmediatas usando las fórmulas de trigonometría:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} px \cos qx &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x], \\ \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx &= \frac{1}{2} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x], \\ \cos px \cos qx &= \frac{1}{2} [\cos(p-q)x + \cos(p+q)x].\end{aligned}$$

1. Usando  $\operatorname{sen} px \cos qx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x]$  :

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 7x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 12x + \operatorname{sen}(-2x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 12x \, dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{24} \cos 12x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

2. Usando  $\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx = \frac{1}{2} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]$  :

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 13x \operatorname{sen} 8x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x - \cos 21x) \, dx \\ &= \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x - \frac{1}{42} \operatorname{sen} 21x + C.\end{aligned}$$

3. Usando  $\cos px \cos qx = \frac{1}{2} [\cos(p-q)x + \cos(p+q)x]$  :

$$\begin{aligned}\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2b - \cos 2ax) \, dx \\ &= \frac{x \operatorname{sen} 2b}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C.\end{aligned}$$

4. Consideremos las conocidas fórmulas:

$$\operatorname{sen}(p+q)x = \operatorname{sen}(px+qx) = \operatorname{sen} px \cos qx + \cos px \operatorname{sen} qx. \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}(p-q)x = \operatorname{sen}(px-qx) = \operatorname{sen} px \cos qx - \cos px \operatorname{sen} qx. \quad (2)$$

$$\cos(p+q)x = \cos(px+qx) = \cos px \cos qx - \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx. \quad (3)$$

$$\cos(p-q)x = \cos(px-qx) = \cos px \cos qx + \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx. \quad (4)$$

Sumando (1) y (2) :  $\operatorname{sen} px \cos qx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x]$ .

Restando (3) a (4) :  $\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx = \frac{1}{2} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]$ .

Sumando (3) y (4) :  $\cos px \cos qx = \frac{1}{2} [\cos(p-q)x + \cos(p+q)x]$ .

### 8.17. Integración de funciones trigonométricas (4)

1. Calcular  $I = \int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{cos} x}$ .
2. Calcular  $I = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x}$ .
3. Calcular  $I = \int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{cos} x}$ .
4. Calcular  $I = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{cos}^2 x}$ .
5. Demostrar que si  $t = \tan \frac{x}{2}$ , entonces:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

6. Demostrar que si  $t = \tan x$ , entonces:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

**Solución.** Sean las integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx, \quad (*)$$

en donde  $R$  es una función racional. Efectuando el cambio de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$  (llamado cambio universal), se verifica:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2},$$

con lo cual las integrales (\*) se transforman en integrales de funciones racionales en  $t$ .

Si  $R(-\operatorname{sen} x, -\operatorname{cos} x) = R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)$ , es más conveniente usar el cambio  $t = \tan x$ , verificándose:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

1. Efectuando la sustitución  $t = \tan \frac{x}{2}$ :

$$I = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{5 + 4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{5(1+t^2) + 8t + 3(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2 dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 2} + C.$$

2. Efectuando la sustitución  $t = \tan \frac{x}{2}$  :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{1+t^2 + 2t + 1-t^2} \\ &= \int \frac{2 dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} = \log |1+t| + C = \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

3. Efectuando la sustitución  $t = \tan \frac{x}{2}$  :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{3 + 5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{3(1+t^2) + 5(1-t^2)} \\ &= \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \left( \frac{1/4}{2+t} + \frac{1/4}{2-t} \right) dt = \frac{1}{4} \log |2+t| - \frac{1}{4} \log |2-t| + C \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2 + \tan \frac{x}{2}}{2 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

4. Claramente la función integrando  $R$  satisface

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

con lo cual, es más conveniente usar el cambio  $t = \tan x$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

5. Usando  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$  y  $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$  :

$$1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \sec^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1 + t^2 &= \frac{2}{1 + \cos x} \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{2}{1 + t^2} \\ \Rightarrow \cos x &= \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{2 - 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Usando  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  :

$$\begin{aligned}\sin x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = \frac{\sqrt{4t^2}}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Diferenciando  $t = \tan \frac{x}{2}$  :

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1 + t^2}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

6. Si  $t = \tan x$ , entonces  $1 + t^2 = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  y por tanto,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Por otra parte:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + t^2}} = \sqrt{\frac{t^2}{1 + t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Diferenciando  $t = \tan x$  :

$$dt = \sec^2 x dx = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

## 8.18. Integración de funciones hiperbólicas

1. Calcular  $\int \cosh^2 x dx$ .
2. Calcular  $\int \sinh^3 x dx$ .
3. Calcular  $\int \sinh^3 x \cosh x dx$ .
4. Calcular  $I = \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx$ .
5. Calcular  $\int \tanh^3 x dx$ .

**Solución.** La integración de funciones hiperbólicas es análoga a la integración de funciones trigonométricas. Recordamos algunas fórmulas relativas a las funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$\operatorname{csch}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1).$$

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x.$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x.$$

1. Tenemos:

$$\int \cosh^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x) \, dx = \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{4} \cosh 2x + C.$$

2. Si  $t = \cosh x$ , entonces  $dt = \sinh x \, dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \int \sinh^3 x \, dx &= \int \sinh^2 x \sinh x \, dx = \int (\cosh^2 x - 1) \sinh x \, dx \\ &= \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x + C. \end{aligned}$$

3. Si  $t = \sinh x$ , entonces  $dt = \cosh x \, dx$ , por tanto:

$$\int \sinh^3 x \cosh x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sinh^4 x}{4} + C.$$

4. Usando  $\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x$  y  $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$ :

$$\begin{aligned} I &= \int (\sinh x \cosh x)^2 \, dx = \int \frac{1}{4} \sinh^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (\cosh 4x - 1) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \sinh 4x - x \right) + C = \frac{\sinh 4x}{32} - \frac{x}{8} + C. \end{aligned}$$

5. Tenemos:

$$\begin{aligned} \int \tanh^3 x \, dx &= \int \tanh^2 x \tanh x \, dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \tanh x \, dx \\ &= \int \tanh x \, dx - \int \operatorname{sech}^2 x \tanh x \, dx = \log(\cosh x) - \frac{\tanh^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

## 8.19. Miscelánea (1)

1. Calcular:

a)  $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx, (a \neq 0).$

b)  $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx.$

c)  $\int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

2. Usando integración por partes, calcular  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a \neq 0).$

3. Usando integración por partes, calcular  $I = \int \sqrt{A + x^2} dx.$

*Nota.* Se puede usar la igualdad  $\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = \log \left| x + \sqrt{A + x^2} \right|.$

4. Calcular  $\int \frac{x^2 dx}{(x + 1)^6}.$

*Sugerencia.* Puede ser útil buscar una alternativa a la tradicional descomposición en suma de fracciones racionales simples.

5. Calcular  $\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx$  siendo  $m \neq 0$  y  $x^2 + px + q$  sin raíces reales.

6. Se considera la integral  $I = \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)}.$

a) Esbozar una posible solución por descomposición en suma de fracciones simples.

b) Efectuar una adecuada manipulación en el numerador, que transforme  $I$  en una integral inmediata.

7. ¿ Existe  $\int \sqrt{-x^2 + 6x - 10} dx$ ? Justificar la respuesta.

**Solución.** 1. a)  $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx = \int (e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) dx$   
 $= \frac{e^{2ax}}{2a} + 2x - \frac{e^{-2ax}}{2a} + C = 2x + \frac{\operatorname{sh} 2ax}{a} + C.$

b)  $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx = \int 2^x 9^x 125^x dx = \int (2 \cdot 9 \cdot 125)^x dx$   
 $= \int 2250^x dx = \frac{2250^x}{\log 2250} + C.$

c)  $\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx$   
 $= \int (\tan^2 x + 1) dx + \int (\cot^2 x + 1) dx$



$$= \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \tan x - \cot x + C.$$

2.

$$\begin{cases} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ v = x. \end{cases}$$

Usando la fórmula de la integración por partes:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx. \quad (1)$$

Transformemos la última integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\ &+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = -I + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (2)$$

De las relaciones (1) y (2), obtenemos:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$$

3.

$$\begin{cases} u = \sqrt{A + x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{A + x^2}} dx \\ v = x. \end{cases}$$

Usando la fórmula de la integración por partes:

$$I = \int \sqrt{A + x^2} \, dx = x\sqrt{A + x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{A + x^2}} \, dx. \quad (1)$$

Transformemos la última integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{A + x^2}} \, dx &= - \int \frac{(A + x^2) - A}{\sqrt{A + x^2}} \, dx = - \int \sqrt{A + x^2} \, dx \\ &+ A \int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = -I + A \log \left| x + \sqrt{A + x^2} \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

De las relaciones (1) y (2), obtenemos:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{A + x^2} + \frac{A}{2} \log \left| x + \sqrt{A + x^2} \right| + C.$$

4. Podríamos usar el método tradicional, es decir, expresar:

$$\frac{x^2}{(x+1)^6} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{A_6}{(x+1)^6},$$

etc. Ahora bien, en este caso es más conveniente usar la sustitución  $t = x + 1$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x+1)^6} &= \int \frac{(t-1)^2}{t^6} dt = \int \frac{t^2 - 2t + 1}{t^6} dt \\ &= \int \frac{dt}{t^4} - 2 \int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{dt}{t^6} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{5t^5} + C. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^6} = -\frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^4} - \frac{1}{5(x+1)^5} + C.$$

5. La derivada de  $x^2 + px + q$  es  $2x + p$ . Expresemos:

$$mx + n = \alpha(2x + p) + \beta.$$

Identificando coeficientes,  $m = 2\alpha$  y  $n = \alpha p + \beta$ , por tanto  $\alpha = m/2$  y  $\beta = (2n - pm)/2$ . En consecuencia,

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \frac{m}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{2n - pm}{2} \int \frac{dx}{x^2 + px + q}. \quad (1)$$

Descompongamos  $x^2 + px + q$  es suma de cuadrados:

$$x^2 + px + q = 1(x + h)^2 + k = x^2 + 2hx + k^2 + l.$$

Identificando coeficientes, queda  $h = p/2$  y  $l = (4q - p^2)/4$ , es decir:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Nótese que al no tener  $x^2 + px + q$  raíces reales,  $(4q - p^2)/4$  es positivo. Tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}} \\ &= \frac{4}{4q - p^2} \int \frac{dx}{\frac{4}{4q - p^2} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{4}{4q - p^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right)^2 + 1} \\ &= \frac{4}{4q - p^2} \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Usando ahora (1) :

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \frac{m}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2n - pm}{\sqrt{4qp^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

6. a) Una raíz de  $g(x) = x^7 + 1$  es  $x = -1$ . Dado que  $g'(x) = 7x^6$  es positiva tanto en  $(-\infty, 0)$  como en  $(0, +\infty)$ , es estrictamente creciente en estos intervalos. Como  $g(-1) = 0$ , se deduce que  $x = -1$  es la única raíz de  $g(x)$ . Es además simple pues  $g'(-1) \neq 0$ . Entonces,  $g(x)$  se factoriza en la forma:

$$g(x) = (x + 1)q_1(x)q_2(x)q_3(x),$$

con los  $q_i(x)$ , polinomios de segundo grado sin raíces reales. Incluso en el caso de ser factible determinar los polinomios  $q_i(x)$ , esto nos conduciría a un largo proceso de descomposición en suma de fracciones simples para la función integrando.

b) Usemos la igualdad  $1 = (x^7 + 1) - x^7$ . Tenemos,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)} = \int \frac{(x^7 + 1) - x^7}{x(x^7 + 1)} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x^6}{x^7 + 1} \right) dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{7} \log|x^7 + 1| + C. \end{aligned}$$

7. Efectuando la descomposición  $-x^2 + 6x - 10 = -(x + k)^2 + l$  :

$$-x^2 + 6x - 10 = -x^2 - 2kx - k^2 + l.$$

Identificando coeficientes, obtenemos  $-1 = -1$ ,  $6 = -2k$  y  $-10 = -k^2 + l$ , es decir  $k = -3$  y  $l = -1$ . Por tanto, para todo  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-x^2 + 6x - 10 = -(x - 3)^2 - 1 < 0,$$

es decir  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 10}$  no representa una función real de variable real, luego no existe  $\int f(x) dx$ .

## 8.20. Miscelánea (2)

1. Sea la integral de diferencial binomia  $I = \int x^m(a + bx^n)^p dx$ . Demostrar que si  $p \in \mathbb{Z}$ , entonces la sustitución  $x = t^s$  en donde  $s$  es el mínimo común

múltiplo de los denominadores de  $m$  y  $n$ , transforma  $I$  en una integral racional en  $t$ .

2. Sea la integral de diferencial binomia  $I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$ . Demostrar que si  $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$ , entonces la sustitución  $a + bx^n = t^s$  en donde  $s$  es el denominador de la fracción  $p$ , transforma  $I$  en una integral racional en  $t$ .

3. Sea la integral de diferencial binomia  $I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$ . Demostrar que si  $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , entonces la sustitución  $ax^{-n} + b = t^s$  en donde  $s$  es el denominador de la fracción  $p$ , transforma  $I$  en una integral racional en  $t$ .

4. Calcular  $\int \cos^6 x dx$ .

5. Calcular  $I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ .

6. Calcular  $I = \int \frac{dx}{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos x}$ .

**Solución.** 1. Llamemos:

$$m = \frac{m_1}{m_2}, \quad n = \frac{n_1}{n_2} \quad (m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}).$$

Si  $x = t^s$ , entonces  $dx = st^{s-1} dt$ . Por otra parte,  $s$  es múltiplo de  $m_2$  y de  $n_2$ , por tanto  $s/m_2$  y  $s/n_2$  son enteros. Tenemos:

$$I = \int t^{m_1(s/m_2)} (a + bt^{n_1(s/n_2)})^p st^{s-1} dt.$$

Todos los exponentes son enteros, en consecuencia  $I$  es una integral racional en  $t$ .

2. Llamemos  $p = p_1/s$  con  $p_1, s$  enteros. Si  $a + bx^n = t^s$ :

$$nbx^{n-1} dx = st^{s-1} dt, \quad x = \left( \frac{t^s - a}{b} \right)^{1/n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int x^m t^{sp} \frac{st^{s-1} dt}{nbx^{n-1}} = \frac{s}{nb} \int x^{m-n+1} t^{sp+s-1} dt \\ &= \frac{s}{nb} \int \left( \frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{m-n+1}{n}} t^{p_1+s-1} dt = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int \left( \frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{p_1+s-1} dt. \end{aligned}$$

Dado que  $s, \frac{m+1}{n} - 1$ , y  $p_1 + s - 1$  son enteros, la integral  $I$  es racional en  $t$ .

3. Llamemos  $p = p_1/s$  con  $p_1, s$  enteros. Si  $ax^{-n} + b = t^s$  :

$$-nax^{-n-1}dx = st^{s-1}dt, \quad x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{1/n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int x^m x^{np} [x^{-n} (a + bx^n)]^p dx = \int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \frac{st^{s-1} dt}{-nax^{-n-1}} \\ &= -\frac{s}{na} \int x^{m+np+n+1} t^{sp} t^{s-1} dt = -\frac{s}{na} \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{p+\frac{m+1}{n}+1} t^{sp+s-1} dt \end{aligned}$$

Dado que  $s, p + \frac{m+1}{n} + 1$ , y  $sp + s - 1 = p_1 + s - 1$  son enteros, la integral  $I$  es racional en  $t$ .

4. Usando  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  :

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x dx &= \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx. \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3x}{16} + \frac{3 \operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx. \quad (*) \end{aligned}$$

Efectuando la sustitución  $t = \operatorname{sen} 2x$ , queda  $dt = 2 \cos 2x dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x dx &= \int \cos^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + C = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6} + C. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (\*):

$$\int \cos^6 x dx = \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3 \operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C.$$

5. Usando  $\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx = \frac{1}{2} [\cos(p - q)x - \cos(p + q)x]$  :

$$I = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx = \int \frac{1}{2} (\cos(-x) - \cos 3x) \operatorname{sen} 3x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x \operatorname{sen} 3x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x \operatorname{sen} 3x \, dx. \quad (1)$$

Usando  $\operatorname{sen} px \cos qx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x]$ :

$$\begin{aligned} \int \cos x \operatorname{sen} 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x) \, dx \\ &= -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4} + C. \quad (2) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\int \cos 3x \operatorname{sen} 3x \, dx = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 6x \, dx = -\frac{\cos 6x}{12} + C. \quad (3)$$

Sustituyendo los resultados de (2) y (3) en (1):

$$I = \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

6. Efectuando la sustitución  $t = \tan \frac{x}{2}$ :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 \, dt}{1+t^2}}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 \, dt}{(a^2 + b^2)(1+t^2) - (a^2 - b^2)(1-t^2)} \\ &= \int \frac{2 \, dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{2}{b^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}t\right)^2 + 1} = \frac{2}{b^2} \frac{b}{a} \int \frac{\frac{a}{b} \, dt}{\left(\frac{a}{b}t\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{ab} \arctan \frac{at}{b} + C = \frac{2}{ab} \arctan \left( \frac{a \tan (x/2)}{b} \right) + C. \end{aligned}$$

## Capítulo 9

# Integrales definidas

### 9.1. Integral definida como límite de sumas

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Demostrar las fórmulas:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Calcular  $\int_1^{10} (1+x) dx$  por medio del límite de una sucesión de sumas integrales.

3. Calcular  $\int_0^a x^2 dx$  por medio del límite de una sucesión de sumas integrales.

**Solución.** 1. La longitud de cada subintervalo es  $(b-a)/n$ . Los correspondientes subintervalos son

$$\left[ a, a + \frac{b-a}{n} \right], \left[ a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n} \right], \left[ a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n} \right], \\ \dots, \left[ a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n} \right].$$

Eligiendo el extremo izquierdo de cada subintervalo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Eligiendo el extremo derecho:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Particionamos  $[1, 10]$  en  $n$  partes iguales. La longitud de cada intervalo será  $(10 - 1)/n = 9/n$ . La partición correspondiente es:

$$1, 1 + 1 \cdot \frac{9}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{9}{n}, \dots, 1 + n \cdot \frac{9}{n} = 10.$$

Elijamos como punto de cada subintervalo el extremo izquierdo del mismo. La suma integral correspondiente será:

$$\begin{aligned} S_n &= f(1) \cdot \frac{9}{n} + f\left(1 + 1 \cdot \frac{9}{n}\right) \cdot \frac{9}{n} + f\left(1 + 2 \cdot \frac{9}{n}\right) \cdot \frac{9}{n} \\ &+ \dots + f\left(1 + (n-1) \cdot \frac{9}{n}\right) \cdot \frac{9}{n} \\ &= \frac{9}{n} \left[ 2 + \left(2 + 1 \cdot \frac{9}{n}\right) + \left(2 + 2 \cdot \frac{9}{n}\right) + \dots + \left(2 + (n-1) \cdot \frac{9}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Simplifiquemos la expresión anterior usando la conocida fórmula

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n-1) &= \frac{(n-1)n}{2}. \\ S_n &= \frac{9}{n} \left[ 2n + \frac{9(n-1)n}{2} \right] = \frac{9}{n} \frac{4n^2 + 9n^2 - 9n}{2n} \\ &= \frac{117n^2 - 81n}{2n^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_1^{10} (1+x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{117n^2 - 81n}{2n^2} = \frac{117}{2}.$$

3. Particionamos  $[0, a]$  en  $n$  partes iguales. La longitud de cada intervalo será  $a/n$ . La partición correspondiente es:

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{na}{n} = a.$$

Elijamos como punto de cada subintervalo el extremo derecho del mismo. La suma integral correspondiente será:

$$\begin{aligned} S_n &= f\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + f\left(\frac{3a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} + \dots + f\left(\frac{na}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a}{n} \left( \frac{a^2}{n^2} + \frac{2^2 a^2}{n^2} + \frac{3^2 a^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2 a^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$



Usando la conocida fórmula

$$1^2 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

obtenemos la integral pedida:

$$\int_0^a x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{a^3}{3}.$$

## 9.2. Cálculo de límites de sucesiones mediante integrales

1. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ .
2. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$ .
3. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$ .
4. Calcular  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$ .
5. Relacionar el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

con la integral  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . Calcular el límite anterior.

**Solución.** Las conocidas fórmulas de la integral de Riemann de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

se pueden usar para calcular límites de sucesiones. En particular, para el intervalo  $[0, 1]$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left( \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f \left( \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

1. Llamemos  $L$  al límite pedido. Entonces,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Llamemos  $L$  al límite pedido. Entonces,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot n \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2.$$

3. Tenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \left( \frac{1}{n} \right)^p + \left( \frac{2}{n} \right)^p + \cdots + \left( \frac{n}{n} \right)^p \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^p = \int_0^1 x^p \, dx = \left[ \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

4. Tenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^2 = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5. La función  $f(x) = 1/x$  es continua en el intervalo  $[1, 2]$ . Dividiendo este intervalo en  $n$  partes iguales obtenemos la partición

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_n = 1 + \frac{n}{n}$$

La integral de Riemann de la función  $f(x) = 1/x$  en  $[1, 2]$  es

$$\int_1^2 dx/x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

siendo

$$\begin{aligned} S_n &= f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(1 + \frac{n}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= f\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{n} + f\left(\frac{n+2}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n+n}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} + \frac{n}{n+2} \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n+n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \end{aligned}$$

El límite pedido es por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

### 9.3. Teorema fundamental del Cálculo

1. Demostrar el teorema fundamental del Cálculo:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, y sea la función

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Entonces,  $F$  es derivable en  $[a, b]$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a) F(x) = \int_1^x \log t dt. \quad (b) G(x) = \int_3^x \sqrt{1+t^2} dt.$$

3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a) F(x) = \int_{2x+3}^{x^3+1} \operatorname{sen} t dt. \quad (b) G(x) = F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

4. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{3/2}} \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^{1/4} dt$ .

**Solución.** 1. Sean  $x$  y  $x+h$  dos puntos del intervalo  $[a, b]$ . Usando el teorema de la media del cálculo integral:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt = hf(c), \end{aligned}$$

en donde  $c$  está comprendido entre  $x$  y  $x + h$ . Entonces,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c).$$

Dado que  $c \rightarrow x$  cuando  $h \rightarrow 0$ , se verifica  $F'(x) = f(x)$ .

2. Usando el teorema fundamental del cálculo:

- (a)  $F'(x) = \log x \quad \forall x > 0$ .  
 (b)  $G'(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

3. Como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo y de la regla de la cadena, se verifica:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x),$$

en el supuesto de que existan los objetos que aparecen en la fórmula anterior.

En consecuencia,

- (a)  $F'(x) = 3x^2 \sin(x^3 + 1) - 2 \sin(2x + 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $G'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

4. Aparece una indeterminación del tipo  $0/0$  y la función  $\sin t^{1/4}$  es continua en todo intervalo  $[0, x^2]$ . Usando la regla de L'Hopital, el teorema fundamental del Cálculo y que  $\sin \epsilon \sim \epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^{1/4} dt}{x^{3/2}} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin(x^2)^{1/4}}{(3/2)x^{1/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{3} x \cdot \frac{\sin x^{1/2}}{x^{1/2}} = \frac{4}{3} \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

## 9.4. Regla de Barrow

1. Calcular  $\int_{-1}^2 x^3 dx$ .
2. Calcular  $I = \int_0^\pi \sin^5 x dx$ .
3. Demostrar la regla de Barrow:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $F$  una primitiva de  $f$  en  $[a, b]$ . Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Solución.** 1. Usando la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4}.$$

2. Hallemos una primitiva de  $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$ . Efectuando la sustitución  $t = \cos x$ ,  $dt = -\operatorname{sen} x dx$  y por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x dx \\ &= - \int (1 - t^2)^2 dt = - \int (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = -\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5}. \end{aligned}$$

Usando la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen}^5 x dx &= \left[ -\cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} \right]_0^\pi \\ &= \left( -\cos \pi + \frac{2 \cos^3 \pi}{3} - \frac{\cos^5 \pi}{5} \right) - \left( -\cos 0 + \frac{2 \cos^3 0}{3} - \frac{\cos^5 0}{5} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left( -1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

3. Consideremos la función

$$G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo,  $G$  es una primitiva de  $f$  que además se anula en  $a$ . Pero la función  $F(x) - F(a)$  es también una primitiva de  $f$  que se anula en  $a$ , lo cual implica

$$G(x) = F(x) - F(a) + C \quad (C \text{ constante}),$$

y para  $a = 0$  queda  $0 = C$ , luego  $G(x) = F(x) - F(a)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Haciendo  $x = b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

## 9.5. Miscelánea

1. Calcular la integral de la función  $f(x) = \sqrt{32 + 4x - x^2}$  en el intervalo en donde esta función está definida.

2. Calcular  $\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx$  mediante la sustitución  $t = \log x$ .

3. Ordenar, sin calcularlas, las siguientes integrales

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 x dx.$$

4. Calcular  $I = \int_0^1 (|x| + |3x - 1|) dx$ .

5. Acotar las siguientes integrales

$$a) \int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx. \quad b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}. \quad c) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$$

6. Calcular  $f'(\pi/2)$  siendo

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{dt}{1+7t+5t^2}.$$

7. Deducir la fórmula del área de un círculo.

**Solución.** 1. Factorizando obtenemos  $32 + 4x - x^2 = (8 - x)(x + 4)$  que toma valores  $\geq 0$  en el intervalo  $[-4, 8]$ . Tenemos pues que calcular

$$I = \int_{-4}^8 \sqrt{32 + 4x - x^2} dx.$$

Podemos calcular  $I$  hallando previamente la integral indefinida, sin embargo usaremos en su lugar una elegante interpretación geométrica. Elevando al cuadrado  $y = f(x)$  obtenemos

$$y^2 = 32 + 4x - x^2, \text{ o bien } (x - 2)^2 + y^2 = 36.$$

que representa una circunferencia de centro el punto  $(2, 0)$  y radio 6. La circunferencia corta al eje  $OX$  en los puntos  $(-4, 0)$  y  $(8, 0)$ , luego  $I$  es el área del semicírculo superior limitado por la circunferencia. Es decir,

$$I = \frac{1}{2} \pi \cdot 6^2 = 18\pi.$$

2. Si  $x = 1$ ,  $t = \log x = 0$  y si  $x = e$ ,  $t = \log x = 1$ . Por otra parte  $dt = dx/x$ . en consecuencia:

$$\int_1^e \frac{\log^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\Rightarrow x^2 \leq 1 + x^2 \Rightarrow x \leq \sqrt{1 + x^2} \\ &\Rightarrow I_2 = \int_0^1 x \, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} \, dx = I_1, \end{aligned}$$

es decir  $I_2 \leq I_1$ .

4. Tenemos  $3x - 1 = 3(x - 1/3)$ , con lo cual  $3x - 1 \leq 0$  si  $x \leq 1/3$  y  $3x - 1 \geq 0$  si  $x \geq 1/3$ . Entonces,

$$|x| + |3x - 1| = \begin{cases} x - 3x + 1 = -2x + 1 & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ x + 3x - 1 = 4x - 1 & \text{si } x \in [1/3, 1]. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/3} (-2x + 1) \, dx + \int_{1/3}^1 (4x - 1) \, dx \\ &= [-x^2 + x]_0^{1/3} + [2x^2 - x]_{1/3}^1 = \dots = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. Llamemos  $I_1, I_2, I_3$  a las integrales de los apartados a), b) y c) respectivamente.

$$a) \quad x \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{4 + x^2} \leq \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2(1 - 0) \leq \int_0^1 \sqrt{4 + x^2} \, dx \leq \sqrt{5}(1 - 0) \Rightarrow I_1 \in [2\sqrt{5}].$$

$$b) \quad x \in [0, 1] \Rightarrow 7 \leq 8 + x^3 \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{8 + x^3} \leq \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} ((1 - (-1))) \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8 + x^3} \leq \frac{1}{7} ((1 - (-1))) \Rightarrow I_2 \in [2/9, 2/7].$$

$$c) \quad x \in [0, 2\pi] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 7 \leq 10 + 3 \cos x \leq 13$$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq \frac{1}{10 + 3 \cos x} \leq \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{13} (2\pi - 0) \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3 \cos x} \leq \frac{1}{7} (2\pi - 0)$$

$$\Rightarrow I_3 \in [2\pi/13, 2\pi/7].$$

6. Usando el teorema fundamental del Cálculo:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + 7 \operatorname{sen} x + 5 \operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x$$

$$- \frac{1}{1 + 7 \operatorname{sen} x + 5 \operatorname{sen}^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x).$$

$$\text{Por tanto, } f'(\pi/2) = \frac{0}{13} + \frac{1}{1} = 1.$$

7. Consideremos el círculo de centro el origen y radio  $r$ . La circunferencia que lo delimita tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ . Por razones de simetría, el área  $A$  del círculo será cuatro veces el área correspondiente al primer cuadrante. Es decir:

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Efectuando la sustitución  $x = r \operatorname{sen} t$ :

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} r \cos t dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt \\ &= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= 4r^2 \left[ \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = 4r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi r^2. \end{aligned}$$

## 9.6. Cotas de la longitud de una elipse

El objeto de este problema es encontrar cotas de la longitud de una elipse.

1. Demostrar que el cálculo de la longitud de una elipse se reduce al cálculo de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta.$$

2. Verificar que la integral del apartado anterior coincide con la integral

$$\int_0^{\pi/4} \left( \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \sqrt{1 + k^2 \cos^2 \theta} \right) d\theta.$$

3. Determinar los extremos de la función integrando de la integral del apartado anterior en el intervalo de integración.

4. Aplicar a demostrar que si  $L$  es la longitud de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , se tiene

$$a + b < \frac{L}{\pi} < (a + b) \sqrt{1 + \left( \frac{a - b}{a + b} \right)^2}.$$

(Propuesto en examen de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. Consideremos la elipse

$$E : \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad a > b > 0.$$



Su longitud es

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \operatorname{cos}^2 \theta} d\theta = \\ &4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta, \end{aligned}$$

siendo  $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} > 0$ .

2. Consideremos la integral

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta.$$

Efectuando el cambio de variable  $\theta = \pi/2 - t$ :

$$I = - \int_{\pi/4}^0 \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 t} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 t} dt.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta + \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left( \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 \theta} \right) d\theta. \end{aligned}$$

3. Sea la función

$$f : [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 \theta}.$$

Hallemos sus puntos críticos

$$f'(\theta) = \frac{k^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} - \frac{k^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 \theta}} = 0,$$

$$k^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \left( \sqrt{1 + k^2 \operatorname{cos}^2 \theta} - \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) = 0.$$

Los puntos críticos de  $f$  corresponden a los valores de  $\theta$  en  $[0, \pi/4]$  tales que:

- a)  $\sin \theta = 0$ . Solamente se verifica para  $\theta = 0$ .  
 b)  $\cos \theta = 0$ . No se verifica en  $[0, \pi/4]$ .  
 c)  $\sqrt{1 + k^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \theta}$ .

Elevando al cuadrado queda  $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ , lo cual implica  $\sin \theta = \pm \cos \theta$ , relación que sólo se cumple en  $[0, \pi/4]$  para  $\theta = \pi/4$ .

En  $(0, \pi/4)$ ,  $\sin \theta < \cos \theta$  lo cual implica  $f'(\theta) > 0$ . La función es  $f$  es estrictamente creciente, por tanto:

$$f(0) = 1 + \sqrt{1 + k^2} \text{ es mínimo absoluto de } f,$$

$$f(\pi/4) = 2\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}} \text{ es máximo absoluto de } f.$$

4. La longitud de la elipse es  $L = 4b \int_0^{\pi/4} f(\theta) d\theta$ . Por otra parte,

$$1 + \sqrt{1 + k^2} \leq f(\theta) \leq 2\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}} \quad \forall x \in [0, \pi/4],$$

y las igualdades sólo se verifican para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/4$  respectivamente. Por tanto, integrando:

$$4b \int_0^{\pi/4} \left(1 + \sqrt{1 + k^2}\right) d\theta \leq L \leq 4b \int_0^{\pi/4} \left(2\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}}\right) d\theta$$

$$\Rightarrow \pi b \left(1 + \sqrt{1 + k^2}\right) \leq L \leq 2\pi b \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow b \left(1 + \sqrt{1 + k^2}\right) \leq \frac{L}{\pi} \leq 2b \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}}\right)$$

Teniendo en cuenta que  $k^2 = (a^2 - b^2)/b^2$ :

$$\begin{aligned} b \left(1 + \sqrt{1 + k^2}\right) &= b \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}}\right) \\ &= b \left(1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\right) = b \left(1 + \frac{a}{b}\right) = b \cdot \frac{a + b}{b} = a + b. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$2b\sqrt{1 + \frac{k^2}{2}} = 2b\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2}} = \sqrt{4b^2 + 2(a^2 - b^2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2a^2 - 2b^2} = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \\
 &= \sqrt{(a+b)^2 \left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)} = (a+b) \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$a + b < \frac{L}{\pi} < (a+b) \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}.$$

## 9.7. Pi es irracional

En este problema se demuestra que el número pi es irracional.

1. Sean  $p, q, n \in \mathbb{N}^*$ . Se considera la función polinómica

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (qx - p)^n.$$

Demostrar que  $P_n^{(r)}(0) \in \mathbb{Z}$  para todo  $r = 0, 1, 2, \dots$

2. Demostrar  $P_n^{(r)}(p/q) \in \mathbb{Z}$  para todo  $r = 0, 1, 2, \dots$

3. Hallar el máximo de la función  $|P_n(x)|$  sobre el intervalo  $[0, p/q]$ .

4. Sean  $p$  y  $q$  tales que  $\pi \leq p/q$ . Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , siendo:

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx.$$

5. Supongamos que  $\pi$  sea racional e igual a  $p/q$ , demostrar que  $|I_n|$  es entero positivo para todo  $n$ . ¿Qué conclusión se saca de estos resultados?

**Solución.** 1. El polinomio  $P_n(x)$  tiene grado  $2n$ . Esto implica que  $P_n^{(r)}(0) = 0$  para  $r > 2n$ . Aplicando la fórmula de Maclaurin a  $P_n(x)$  obtenemos:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{p_n^{(r)}(0)}{r!} x^r = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{p_n^{(r)}(0)}{r!} x^r + \sum_{r=n}^{2n} \frac{p_n^{(r)}(0)}{r!} x^r. \quad (1)$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} q^{n-k} p^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k x^{2n-k}. \quad (2)$$

Cuando  $k$  varía de 0 a  $n$ ,  $2n-k$  varía de  $2n$  a  $n$ . En consecuencia,  $P_n^{(r)}(0) = 0$  si  $0 \leq r < n$ . Falta pues demostrar que  $P_n^{(r)}(0) \in \mathbb{Z}$  si  $n \leq r \leq 2n$ . Haciendo el cambio  $r = 2n - k$  e identificando coeficientes en (1) y (2) obtenemos:

$$P_n^{(r)}(0) = \frac{r!}{n!} (-1)^{2n-r} \binom{n}{2n-r} q^{r-n} p^{2n-r} \in \mathbb{Z}.$$

2. Se verifica:

$$P_n \left( \frac{p}{q} - x \right) = \frac{1}{n!} \left( \frac{p}{q} - x \right)^n (-qx)^n = \frac{1}{n!} (qx - p)^n x^n = P_n(x). \quad (3)$$

Derivando la igualdad  $P_n(p/q - x) = P_n(x)$  deducida de (3) y sustituyendo en 0 obtenemos:

$$P_n^{(r)} \left( \frac{p}{q} - x \right) = (-1)^r P_n^{(r)}(x), \quad P_n^{(r)} \left( \frac{p}{q} \right) = (-1)^r P_n^{(r)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

3. Podemos escribir  $|P_n(x)| = (1/n!) |x(qx - p)|^n$ , por tanto el máximo de  $|P_n(x)|$  sobre  $[0, p/q]$  se obtiene en el mismo punto que el máximo de  $|x(qx - p)|$ . La función  $f(x) = x(qx - p) = qx^2 - px$  representa una parábola. Tenemos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2qx - p = 0 \Leftrightarrow x = p/2q, \quad f(0) = f(p/q) = 0.$$

El máximo de  $f$  en  $[0, p/q]$  es 0 y el mínimo  $f(p/(2q)) = -p^2/(4q)$ . El máximo de  $|f(x)|$  en  $[0, p/q]$  es por tanto  $p^2/(4q)$  y el de  $|P_n(x)|$  es:

$$M = \frac{1}{n!} \left( \frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

4. Por el teorema de la media del cálculo integral podemos escribir:

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx = \pi P_n(c) \sin c, \quad (0 < c < \pi \leq p/q).$$

Por el apartado anterior  $0 \leq |I_n| \leq \pi M$ . Como  $M$  es de la forma  $a^n/n!$ , tiende a 0. En consecuencia  $|I_n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

5. Sea  $Q(x)$  un polinomio cualquiera. Aplicando dos veces la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Q(x) \sin x \, dx &= Q(\pi) + Q(0) + \int_0^\pi Q'(x) \cos x \, dx \\ &= Q(\pi) + Q(0) - \int_0^\pi Q''(x) \sin x \, dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Aplicando reiteradamente (4) obtenemos:

$$I_n = [P_n(\pi) + P_n(0)] - [P_n''(\pi) + P_n''(0)] + \dots + (-1)^n [P_n^{(2n)}(\pi) + P_n^{(2n)}(0)]$$

Usando los resultados del segundo apartado:

$$P_n^{(r)}(\pi) = P_n^{(r)} \left( \frac{p}{q} \right) = (-1)^r P_n^{(r)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Con lo cual obtenemos:

$$I_n = 2[P_n(0) - P_n''(0) + P_n^{(4)}(0) - \dots + (-1)^n P_n^{(2n)}(0)] \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte,  $I_n = \pi P_n(c)$  sin  $c$  con  $0 < c < \pi \leq p/q$ . Del estudio hecho de la parábola  $f(x) = x(qx - p)$  deducimos que  $P_n(c) \neq 0$ , además sin  $c \neq 0$ . Esto implica que  $I_n$  es un entero no nulo, en consecuencia  $|I_n| \geq 1$  para todo  $n$ . Entonces, de la hipótesis de ser  $\pi = p/q$  un número racional hemos demostrado que existe una sucesión  $|I_n|$  con límite 0 tal que  $|I_n| \geq 1$  para todo  $n$  lo cual es absurdo. Se concluye pues que  $\pi$  es un número irracional.

### 9.8. Fórmula de Wallis

En este problema se demuestra la fórmula de Wallis.

Sea  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \forall n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Establecer una relación de recurrencia entre  $I_n$  e  $I_{n-2}$ .
- (b) Establecer una fórmula que permita calcular  $I_n$  conocido  $n$ .
- (c) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$  y deducir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi}.$$

**Solución.** (a) Usando integración por partes con  $u = \sin^{n-1} x$  y  $dv = \sin x \, dx$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto la relación:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\forall n \geq 2).$$

(b) Para  $n$  par obtenemos:

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3) \dots \cdot 1}{n(n-2) \dots \cdot 2} I_0 = \frac{(n-1)(n-3) \dots \cdot 1}{n(n-2) \dots \cdot 2} \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3) \cdot \dots \cdot 1}{n(n-2) \cdot \dots \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}.$$

Para  $n$  impar:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(n-1)(n-3) \cdot \dots \cdot 2}{n(n-2) \cdot \dots \cdot 3} I_1 = \frac{(n-1)(n-3) \cdot \dots \cdot 2}{n(n-2) \cdot \dots \cdot 3} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\ &= \frac{(n-1)(n-3) \cdot \dots \cdot 2}{n(n-2) \cdot \dots \cdot 3} \cdot 1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}. \end{aligned}$$

(c) Veamos que  $(I_n)$  es una sucesión decreciente de términos positivos. En efecto, para todo  $x \in [0, \pi/2]$  y para todo  $n \geq 1$  se verifica  $0 \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x \leq 1$ . Tenemos pues la relación  $1/I_{n-1} \leq 1/I_n \leq 1/I_{n+1}$ . Multiplicando por  $I_{n+1}$  y por el apartado (a):

$$\frac{n}{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Teniendo en cuenta que  $(a_{2n}) = (I_{2n+1}/I_{2n})$  es una subsucesión de  $(I_{n+1}/I_n)$ , se verifica  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$ . Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2(2n-2)^2 \dots 2^2}{(2n-1)^2(2n-3)^2 \dots 3^2} \cdot \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

Por otra parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1/2) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n$  y la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua, por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi}.$$

## 9.9. Concepto de integral impropia en intervalos infinitos

1. Calcular:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}. \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}. \quad (c) \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx.$$

$$2. \text{ Calcular: } (a) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}. \quad (b) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}.$$

$$3. \text{ Calcular } (a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}. \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

$$4. \text{ Calcular } I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ con } p \in \mathbb{R}.$$

5. Sean  $f, g : [a, +\infty)$  continuas a trozos en todo intervalo  $[a, b]$  y supongamos que  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  y  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  son convergentes. Demostrar que:

a)  $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$  es convergente y

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

b) Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^{+\infty} \lambda f(x) dx$  es convergente y

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

6. Calcular  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

7. Calcular  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3}$ .

8. (a) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^s \frac{t}{t^4+1} dt$$

en función del valor  $s \in \mathbb{R}$ .

(b) Calcular los límites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  siendo

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{t}{t^4+1} dt.$$

9. Sabiendo que  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , calcular

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx. \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx. \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2} dx.$$

10. Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos en cualquier intervalo  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente, y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que  $A = 0$ .

**Solución.** 1. Recordemos que si  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \underbrace{=}_{\text{def.}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Si el límite anterior existe y es finito, la integral se dice que es convergente. Si es infinito, o no existe, la integral se dice que es divergente.  $\square$

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b - \log 1) = +\infty.$$

La integral es divergente.

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

La integral es convergente.

$$(c) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-\cos x]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + 1).$$

No existe  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ , por tanto la integral es divergente.

2. Recordemos que si  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx \underbrace{=}_{\text{def.}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Si el límite anterior existe y es finito, la integral se dice que es convergente.

Si es infinito, o no existe, la integral se dice que es divergente.  $\square$

$$(a) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) = 1.$$

La integral es convergente.

$$(b) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_a^0 \\ = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \arctan \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

La integral es convergente.

3. Recordemos que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$  y existe un  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\int_{-\infty}^c f(x) \, dx$  y  $\int_c^{+\infty} f(x) \, dx$  son convergentes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx \underbrace{=}_{\text{def.}} \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx$$

y la integral del primer miembro se dice que es convergente. Si no existe tal  $c$ , la integral se dice que es divergente. Además, si la integral del primer miembro es convergente, para todo  $c' \in \mathbb{R}$  se verifica

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{c'} f(x) \, dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x) \, dx,$$



con lo cual podemos escribir

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx.} \quad \square$$

(a) Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_{-\infty}^0 + [\arctan x]_0^{+\infty} \\ &= (\arctan 0 - \arctan(-\infty)) + (\arctan(+\infty) - \arctan 0) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4x+9} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \arctan \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

4. Caso 1.  $p = 1$ . Tenemos

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log 1 = +\infty.$$

Caso 2.  $p \neq 1$ . En este caso,

$$I = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \frac{1}{1-p} [x^{1-p}]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right).$$

Si  $p > 1$ ,  $p-1 > 0$ , por tanto

$$I = \frac{1}{1-p} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}.$$

Si  $p < 1$ ,  $1-p > 0$ . Entonces,

$$I = \frac{1}{1-p} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-p} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} \cdot (+\infty - 1) = +\infty.$$

Podemos concluir en que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

5. a) Usando la convergencia de  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  y  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx. \end{aligned}$$

b) Usando la convergencia de  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \lambda f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \lambda f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lambda \int_a^b f(x) dx \\ &= \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

6. Tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &\stackrel{t=1/x}{=} \int \frac{dt/(-t^2)}{(1/t)\sqrt{(1/t^2)-1}} = - \int \frac{dt}{t\sqrt{(1-t^2)/t^2}} \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t = \arccos \frac{1}{x} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \arccos \frac{1}{x} \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \arccos \frac{1}{b} - \arccos \frac{1}{2} \right) = \arccos 0 - \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

7. Efectuando la descomposición en fracciones simples obtenemos

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Las respectivas integrales indefinidas son

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\log|1-x| = -\log(x-1),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + 3 \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{1-x^3} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{6} \log \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{6} \log \frac{b^2+b+1}{(b-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left( b + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} \log 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \log 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(+\infty) \\ &\quad - \frac{1}{6} \log 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{6} \log 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{6} \left( \sqrt{3}\pi - \log 7 - 2\sqrt{3} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}} \right).$$

8. (a) La función integrando es continua en  $\mathbb{R}$ , luego existen y son finitas las integrales

$$\int_{-1}^s \frac{t}{t^4+1} dt \text{ si } s > -1 \text{ y } \int_s^{-1} \frac{t}{t^4+1} dt \text{ si } -1 > s.$$

En consecuencia, la convergencia de la integral dada equivale a la convergencia de

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{t}{t^4+1} dt$$

y dado que la función integrando es impar, la convergencia a su vez equivale a la de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^4+1} dt.$$

Ahora bien,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{t^4 + 1} : \frac{1}{t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4}{t^4 + 1} = 1 \neq 0.$$

Dado que  $\int_1^{+\infty} dt/t^3$  es convergente, la integral dada es convergente para todo valor de  $s \in \mathbb{R}$ .

(b) Tenemos

$$\int \frac{t}{t^4 + 1} dt = \int \frac{t}{(t^2)^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2)^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \arctan t^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{t}{t^4 + 1} dt = \left[ \frac{1}{2} \arctan t^2 \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} (\arctan x^2 - \arctan(+\infty)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \arctan x^2 - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( \arctan x^2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \arctan(+\infty) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( \arctan x^2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \arctan(+\infty) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

9. Recordemos el siguiente teorema:

Sean  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , y  $u, v \in C^1[a, b]$ . Si dos de los siguientes términos son convergentes, lo es el tercero y se verifica la igualdad.

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

(Fórmula de integración por partes).

(a) Llamando  $u = 1 - \cos x$  y  $dv = 1/x^2$ , tenemos  $du = \sin x$  y  $v = -1/x$ .

Por tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \left[ -\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Por otra parte,

$$\left[ -\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Estos límites son

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos x \right) = 0 - 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Llamando  $u = \operatorname{sen}^2 x$  y  $dv = 1/x^2$ , tenemos  $du = \operatorname{sen} 2x$  y  $v = -1/x$ . Por tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \left[ -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} dx.$$

Por otra parte,

$$\left[ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Estos límites son

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1} = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} dx \underbrace{=}_{t=2x} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Podemos expresar

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1 - 2 \cos 2x + 1 - \operatorname{sen}^2 2x}{4} = \frac{2(1 - \cos 2x) - \operatorname{sen}^2 2x}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} dx \\ &\stackrel{\substack{= \\ t=2x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

10. Demostremos el resultado por reducción al absurdo. Supongamos que fuera  $A \neq 0$ . Eligiendo  $\epsilon = |A|/2$  y usando que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , existe  $M$  con  $M \geq a$  y tal que  $|f(x) - A| < \epsilon$  si  $x \geq M$ . Equivalentemente

$$A - \epsilon = A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \epsilon = A + \frac{|A|}{2} \quad \text{si } x \geq M.$$

Si  $A > 0$ , para todo  $x \geq M$  se verifica  $0 \leq A/2 < f(x)$ , por tanto

$$0 \leq \int_M^x \frac{A}{2} dt \leq \int_M^x f(t) dt.$$

Integrando obtenemos

$$0 \leq \frac{A(x-M)}{2} \leq \int_M^x f(t) dt.$$

Pero  $A(x-M)/2 \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , lo cual implica que  $\int_M^{+\infty} f(x) dx = +\infty$  y por ende,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty$  en contradicción con la hipótesis.

Si  $A < 0$ , entonces  $|A| = -A$  y para todo  $x \geq M$  se verifica

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = -|A| + \frac{|A|}{2} = -\frac{|A|}{2}$$

por tanto

$$\int_M^x f(t) dt \leq - \int_M^x \frac{|A|}{2} dt = -|A| \frac{(x-M)}{2}.$$

Pero  $-|A|(x-M)/2 \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , lo cual implica que  $\int_M^{+\infty} f(x) dx = -\infty$  y por ende,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = -\infty$  en contradicción con la hipótesis.

## 9.10. Criterios de convergencia

1. Sea  $f : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$  y  $a' \geq a$ . Demostrar que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_{a'}^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente.}$$

2. Sea  $f \geq 0$  en  $[a, +\infty)$  y continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  existe, pudiendo ser finita o no serlo.

3. Sean  $f, g : [a, +\infty)$  funciones tales que  $0 \leq f \leq g$  y continuas a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que

$$(i) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente.}$$

$$(ii) \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es divergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ es divergente.}$$

4. Sean  $f, g : [a, +\infty)$  funciones tales que  $f \geq 0, g \geq 0$  y continuas a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Supongamos que  $f(x) \sim g(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , es decir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

Demostrar que las integrales  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  y  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  son ambas convergentes o ambas divergentes.

5. Dada la integral impropia  $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x} dx$ ,

(a) Estudiar su convergencia.

(b) Calcularla caso de ser convergente.

6. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx. \quad (c) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+\cos^2 x}}.$$

7. Analizar la convergencia de la integral de Euler  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

8. Estudiar si la integral  $\int_1^{+\infty} \frac{3x dx}{\sqrt{x^4+2x+1}}$  es convergente o divergente.

**Solución.** 1. Dado que  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a'} f(x) dx + \int_{a'}^b f(x) dx$ , y que  $\int_a^{a'} f(x) dx$  es finita,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente} \Rightarrow \exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = L \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{a'}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a'}^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x) dx - \int_a^{a'} f(x) dx \right)$$

$$= L - \int_a^{a'} f(x) dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{a'}^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente.}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente} &\Rightarrow \exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a'}^b f(x) dx = L' \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_a^{a'} f(x) dx + \int_{a'}^b f(x) dx \right) \\ &= \int_a^{a'} f(x) dx + L' \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente.} \end{aligned}$$

2. Si  $b' \geq b \geq a$ , tenemos

$$\int_a^{b'} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_b^{b'} f(x) dx \geq 0,$$

luego la función  $b \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  es creciente en  $[a, +\infty)$ . En consecuencia, tiene límite cuando  $b \rightarrow +\infty$  pudiendo ser finito o no serlo.

3. Dado que  $f \geq 0$  y  $g \geq 0$ , existen  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  pudiendo ser cada una de ellas finita o no. Al ser  $0 \leq f \leq g$ , se verifica para todo  $b \geq a$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Tomando límites cuando  $b \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

y las implicaciones (i) y (ii) son consecuencias inmediatas de la desigualdad anterior.

4. Como  $L \neq 0$ , ha de ser necesariamente  $L > 0$ . Eligiendo  $\epsilon = L/2$ , existe  $c \geq a$  tal que  $|f(x)/g(x) - L| < L/2$  si  $x \geq c$ . De forma equivalente,

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \text{ si } x \geq c.$$

Entonces,

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_c^{+\infty} g(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_c^{+\infty} \frac{3L}{2} g(x) dx \text{ conv.}$$



$$\underbrace{\Rightarrow}_{0 \leq f(x) < (3L/2)g(x)} \int_c^{+\infty} f(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ conv.}$$

Análogamente

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_c^{+\infty} \frac{2}{L} f(x) dx \text{ conv.}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{0 \leq g(x) < (2/L)f(x)} \int_c^{+\infty} g(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ conv.}$$

5. (a) Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x^3+x} : \frac{1}{x^2} \right) = 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x^3+x} \sim \frac{1}{x^2} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

y la integral  $\int_1^{+\infty} dx/x^2$  es convergente, lo cual implica que la integral dada también es convergente.

(b) Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{x+2}{x^3+x} dx &= 2 \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^a \frac{-2x}{x^2+1} dx + \int_1^a \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 2 [\log x]_1^a - [\log(x^2+1)]_1^a + [\arctan x]_1^a \\ &= 2 \log a - \log(a^2+1) + \log 2 + \arctan a - \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( \log \frac{a^2}{a^2+1} + \arctan a + \log 2 - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \log 1 + \arctan(+\infty) + \log 2 - \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{2} + \log 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \log 2. \end{aligned}$$

6. (a) La función integrando es positiva en  $[1, +\infty)$ . Además,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} : \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}} = \sqrt{1} = 1 \neq 0.$$

La integral dada tiene el mismo carácter que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ (convergente),}$$

y por tanto es convergente.

(b) La función integrando es positiva en  $[1, +\infty)$ . Además,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} : \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \neq 0.$$

La integral dada tiene el mismo carácter que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} \text{ (divergente),}$$

y por tanto es divergente.

(c) La función integrando es positiva en  $[1, +\infty)$ . Además,

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x} + \cos^2 x} : \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}}.$$

Pero  $\cos^2 x / \sqrt{x} \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  (acotada por infinitésimo), luego  $L = 1 \neq 0$ . La integral dada tiene el mismo carácter que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} \text{ (divergente),}$$

y por tanto es divergente.

7. Podemos expresar

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

El primer sumando del segundo miembro es la integral de una función continua en un intervalo cerrado, en consecuencia existe y es finita. Por otra parte,

$$x \geq 1 \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

Ahora bien,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{+\infty} = -e^{-\infty} + e^{-1} = 1 \text{ (convergente).}$$

Por tanto, es convergente  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , y también  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

8. La función integrando es continua y positiva en  $[1, +\infty)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x}{\sqrt{x^5 + 2x + 1}} : \frac{1}{x^{3/2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{5/2}}{\sqrt{x^5 + 2x + 1}} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^5 + 2x + 1}} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^5}{x^5 + 2x + 1}} = 3\sqrt{1} = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Pero  $\int_1^{+\infty} dx/x^{3/2}$  es la integral  $\int_1^{+\infty} dx/x^p$  con  $p = 3/2 > 1$  (convergente), luego la integral dada es convergente.

### 9.11. Criterio de Cauchy para integrales impropias en intervalos infinitos

Demostrar el criterio de Cauchy para integrales impropias en intervalos infinitos:

Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ es convergente} \\ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists b_0 \text{ tal que } b' \geq b \geq b_0 \Rightarrow \left| \int_b^{b'} f(x) dx \right| < \epsilon \end{aligned}$$

**Solución.** Se verifica

$$\left| \int_b^{b'} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{b'} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Basta ahora aplicar el criterio de Cauchy a la función  $b \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ .

### 9.12. Convergencia de las integrales de Fresnel

Demostrar que las integrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \sen x^2 dx,$$

son convergentes.

**Solución.** Haremos la demostración para  $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ , el razonamiento es análogo para la otra integral. Efectuando el cambio de variable  $t = x^2$  ( $x > 0$ ), obtenemos para  $0 < b \leq b'$  :

$$\int_b^{b'} \cos x^2 dx = \int_{b^2}^{b'^2} (\cos t) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Aplicando el método de integración por partes, con  $u = 1/(2\sqrt{t})$  y  $dv = \cos t$ , obtenemos  $du = -(1/4)t^{-3/2}$  y  $v = \operatorname{sen} t$ , por tanto

$$\begin{aligned} \int_{b^2}^{b'^2} (\cos t) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt &= \left[ (\operatorname{sen} t) \frac{1}{2\sqrt{t}} \right]_{b^2}^{b'^2} + \frac{1}{4} \int_{b^2}^{b'^2} (\operatorname{sen} t) t^{-3/2} dt \\ &= \frac{\operatorname{sen} b'^2}{2b'} - \frac{\operatorname{sen} b^2}{2b} + \frac{1}{4} \int_{b^2}^{b'^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}} dt \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_b^{b'} \cos x^2 dx \right| &\leq \frac{1}{2b'} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{4} \left| \int_{b^2}^{b'^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2b'} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{4} \int_{b^2}^{b'^2} \left| \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}} \right| dt \leq \frac{1}{2b'} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{4} \int_{b^2}^{b'^2} \frac{1}{t^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Sea ahora  $\epsilon > 0$ . Dado que  $\int_1^{+\infty} dt/t^{3/2}$  es convergente, existe (criterio de Cauchy)  $b_0 > 0$  tal que  $a' \geq a \geq b_0$  implica

$$\int_a^{a'} \frac{dt}{t^{3/2}} < \epsilon.$$

Por otra parte, existe  $b_1$  tal que

$$b \geq b_1 \Rightarrow \frac{1}{2b} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces, para  $b' \geq b \geq \max\{b_1, \sqrt{b_0}\}$  se verifica

$$\left| \int_b^{b'} \cos x^2 dx \right| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{11\epsilon}{12} < \epsilon.$$

Como consecuencia del criterio de Cauchy, la integral  $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$  es convergente.

### 9.13. Convergencia absoluta en intervalos infinitos

1. Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que si  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  es absolutamente convergente, entonces es convergente.
2. Demostrar que  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$  es convergente pero no absolutamente convergente.

**Solución.** 1. Si  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  es absolutamente convergente, entonces  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  es convergente (definición de convergencia absoluta). Aplicando el criterio de Cauchy a esta última integral,

$$\forall \epsilon > 0 \exists b_0 \text{ tal que } b' \geq b \geq b_0 \Rightarrow \int_b^{b'} |f(x)| dx < \epsilon.$$

Dado que  $\left| \int_b^{b'} f(x) dx \right| \leq \int_b^{b'} |f(x)| dx :$

$$\forall \epsilon > 0 \exists b_0 \text{ tal que } b' \geq b \geq b_0 \Rightarrow \left| \int_b^{b'} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Por tanto, la integral  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  satisface el criterio de Cauchy, en consecuencia es convergente.

2. Apliquemos el método de integración por partes. Si  $u = 1/x$  y  $dv = \operatorname{sen} x$ , entonces  $du = -dx/x^2$  y  $v = \cos x$ , por tanto

$$\int_{\pi}^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi}^b - \int_{\pi}^b \frac{\cos x}{x^2} dx. \quad (*)$$

Por otra parte,

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \wedge \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ convergente}$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ abs. convergente} \Rightarrow \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ convergente.}$$

Tomando límites en (\*) cuando  $b \rightarrow +\infty :$

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\cos b}{b} - \frac{-1}{\pi} \right) - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \Rightarrow \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \text{ convergente.}$$

Veamos que no converge absolutamente por reducción al absurdo. Efectivamente, si  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx$  fuera convergente, también lo sería  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$  pues

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})|}{x} dx \stackrel{t=x+\pi/2}{=} \int_{3\pi/2}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t - \pi/2} dx$$

y esta última integral es convergente al ser

$$\frac{|\operatorname{sen} t|}{t - \pi/2} \sim \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} \quad (t \rightarrow +\infty).$$

En consecuencia, la integral  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{x} dx$  sería convergente. Pero esto es absurdo pues  $\frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{x} \geq \frac{1}{x}$  y la integral  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  es divergente.

Concluimos que  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$  es convergente pero no absolutamente convergente.

## 9.14. Valor principal de Cauchy de una integral impropia

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos en todo intervalo  $[a, b]$ . Definimos el *valor principal de Cauchy* (VP) de la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  como

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx.$$

Demostrar que si  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  es convergente, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Demostrar que el valor principal de Cauchy de una integral puede ser finito, siendo la integral divergente.

**Solución.** 1. Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  es convergente, lo son  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  y  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^0 f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_{-t}^0 f(x) dx + \int_0^t f(x) dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Consideremos la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ . Entonces,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-t}^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

Sin embargo,

$$\int_0^{+\infty} x \, dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x \, dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{2} = +\infty,$$

luego  $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$  es divergente.

### 9.15. Integrales impropias en intervalos finitos

1. Calcular (a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ . (b)  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ .
2. Calcular  $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  con  $p \in \mathbb{R}$ .
3. Calcular  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ .
4. Calcular  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .
5. Calcular  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x}$ .
6. Estudiar la convergencia de la integral  $\int_1^2 \frac{dx}{\log x}$ .
7. Estudiar la convergencia de la integral  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ .
8. Analizar la convergencia de la integral  $\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$ .
9. Estudiar el carácter de la integral  $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ .
10. Calcular  $\int_2^4 \frac{1}{E(x)\sqrt{|x-3|}} dx$ , siendo  $E(x)$  la función parte entera de  $x$ .

**Solución.** 1. (a) La función integrando es continua salvo en  $x = 0$ , que tiene un punto de discontinuidad infinita. Entonces,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2.$$

La integral es convergente.

(b) La función integrando es continua salvo en  $x = 0$  (punto interior del intervalo), que tiene un punto de discontinuidad infinita. Entonces,

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x},$$

en el supuesto de que las dos integrales del segundo miembro sean convergentes. Tenemos

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\log \epsilon) = +\infty.$$

La integral dada es divergente.

2. Para  $p = 1$  tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\log \epsilon) = +\infty.$$

Si  $p \neq 1$  tenemos

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1}.$$

Si  $p < 1$ , es  $-p+1 > 0$ , por tanto

$$\frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1} \rightarrow 0 \text{ si } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

con lo cual  $I = 1/(1-p)$ . Si  $p > 1$  es  $-p+1 < 0$ , por tanto

$$\frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1} \rightarrow -\infty \text{ si } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

con lo cual  $I = +\infty$ . Podemos concluir en que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ +\infty & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

3. La función integrando es continua en  $[0, 3]$  salvo en  $x = 1$  que tiene un punto de discontinuidad infinita. Entonces,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1+\delta}^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_{1+\delta}^3 \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( -1 + \frac{1}{\epsilon} \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta} \right) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.
 \end{aligned}$$

La integral dada es divergente.

4. La función integrando es continua salvo en  $x = 1$ , que tiene un punto de discontinuidad infinita. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\arcsen x]_0^{1-\epsilon} \\
 &= \arcsen(1-\epsilon) - \arcsen 0 = (\arcsen 1) - 0 = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

La integral es convergente.

5. La función integrando es continua en  $(0, 1/2]$ . Analicemos su comportamiento cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Usando la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \log x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{\log x} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x^2}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{1/2} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\log |\log x|]_{\epsilon}^{1/2} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\log(\log 1/2) - \log |\log \epsilon|) = \log(\log 1/2) - (+\infty) = -\infty.
 \end{aligned}$$

La integral es divergente.

6. Recordemos el siguiente teorema:

**Teorema.** Sea  $f \geq 0$  continua (o continua a trozos) en  $[a, b]$  salvo en  $c \in [a, b]$  que presenta un punto de discontinuidad infinita. Supongamos que existe  $p \in \mathbb{R}$  tal que

$$L = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-c|^p}} \neq 0 \text{ y finito.}$$

Entonces,  $\int_a^b f(x) dx$  es convergente si, y sólo si  $p < 1$ .

La función  $f(x) = 1/\log x$  es positiva y continua en  $(1, 2]$  y presenta en  $x = 1$  un punto de discontinuidad infinita. Eligiendo  $p = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\log x} \\ &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} \underbrace{=}_{L?H\acute{o}pital} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1/x} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

La integral es divergente.

7. La función integrando es positiva y continua en  $[0, 1)$  y presenta en  $x = 1$  un punto de discontinuidad infinita. Podemos escribir

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Entonces,

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}} \neq 0.$$

Dado que  $p = 1/3 < 1$ , la integral dada es convergente.

8. La función integrando es continua y positiva en  $(0, 1]$ . Analicemos su comportamiento cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Se verifica

$$\log(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x} \quad (x \rightarrow 0^+)$$

pues

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \underbrace{=}_{L?H\acute{o}pital} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1.$$

Por otra parte

$$e^{\text{sen } x} - 1 \sim \text{sen } x, \quad (x \rightarrow 0^+)$$

pues

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \underbrace{=}_{L?H\acute{o}pital} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y}{1} = 1.$$

En consecuencia

$$\frac{\log(1 + \sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x} - 1} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{sen} x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}},$$

con lo cual la función integrando tiene un punto de discontinuidad infinita en  $x = 0$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\log(1 + \sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x} - 1} : \frac{1}{x^{2/3}} \right) = 1 \neq 0.$$

Como  $p = 2/3 < 1$ , la integral dada es convergente.

9. La función integrando es continua en  $(0, 1]$  y tiene un punto de discontinuidad infinita en  $x = 0$ . Por otra parte,

$$\left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ en } (0, 1].$$

Como

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$$

es convergente ( $p = 1/3 < 1$ ), la integral dada es absolutamente convergente y por tanto, convergente.

10. Denominemos  $g(x) = {}^{\operatorname{E}(x)}\sqrt{|x - 3|}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in [2, 3] &\Rightarrow |x - 3| = 3 - x, \operatorname{E}(x) = 2 \Rightarrow g(x) = \sqrt{3 - x}, \\ x \in [3, 4] &\Rightarrow |x - 3| = x - 3, \operatorname{E}(x) = 3 \Rightarrow g(x) = \sqrt[3]{x - 3}, \\ g(4) &= \sqrt[4]{1} = 1. \end{aligned}$$

Podemos por tanto escribir

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{3 - x} & \text{si } x \in [2, 3) \\ \sqrt[3]{x - 3} & \text{si } x \in [3, 4]. \end{cases}$$

La función integrando es continua en  $[2, 4]$  salvo en  $x = 3$  que tiene un punto de discontinuidad infinita. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{{}^{\operatorname{E}(x)}\sqrt{|x - 3|}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_2^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{3 - x}} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{3+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 3}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -2\sqrt{3 - x} \right]_2^{3-\epsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x - 3)^2} \right]_{3+\delta}^4 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{\epsilon} + 2) + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\delta^2}) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

## 9.16. Función Gamma de Euler

1. Para todo  $p \in \mathbb{R}$  se considera la integral

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Demostrar que esta integral es convergente sí y solamente si  $p > 0$ . Esta condición se supondrá en todo lo siguiente.

2. Demostrar que  $I(p) > 0$ .

3. Demostrar que  $I(p) = (p-1)I(p-1)$  para todo  $p > 1$ . Calcular  $I(n)$  siendo  $n$  un entero positivo.

4. Demostrar que para  $n$  entero positivo y  $\beta > 0$  las siguientes integrales son convergentes:

$$\varphi_n(\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x} (\log x)^n dx.$$

5. Para  $x > 0$ , demostrar

$$x^h - 1 = h \log x + \frac{h^2}{2} (\log x)^2 + \frac{h^3}{6} x^{\theta h} (\log x)^3 \quad (0 < \theta < 1).$$

6. Cuando  $h$  tiende a 0 y  $p > 0$  podemos elegir  $|h| < p/2$ . Demostrar así que  $I(p+h) - I(p) - h\varphi_1(x) - \frac{h^2}{2}\varphi_2(x)$  está comprendido entre

$$\frac{h^3}{6}\varphi_3\left(\frac{p}{2}\right) \text{ y } \frac{h^3}{6}\varphi_3\left(\frac{3p}{2}\right).$$

7. Demostrar que  $I(p)$  es continua y derivable para todo  $p > 0$ , que su derivada es  $\varphi_1(p)$  y su derivada segunda  $\varphi_2(p)$ .

Nota La función  $I(p)$  así construida se denomina función gamma de Euler y en general se escribe en la forma

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

8. Demostrar la existencia de un  $p_0 \in (1, 2)$  tal que  $(dI/dp)(p_0) = 0$ .

9. Estudiar el signo de  $d^2I/dp^2$ . Deducir el sentido de las variaciones de  $dI/dp$ , el signo de  $dI/dp$  y el sentido de las variaciones de  $I$ .

10. Sea  $0 < p < 1$ , comparar  $I(p)$  con  $I(p+2)$  y demostrar que  $1/2p < I(p) < 2/p$ . Deducir el límite de  $I(p)$  cuando  $p \rightarrow 0^+$ .

**Solución.** 1. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{1/x^{1-p}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \neq 0.$$

Esto implica que la integral  $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x} dx$  es convergente sii lo es  $\int_0^1 dx/x^{1-p}$ , es decir sii  $1 - p < 1$  o de forma equivalente cuando  $p > 0$ . Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}x^{p-1}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0.$$

Esto implica que  $0 \leq e^{-x}x^{p-1} \leq 1/x^2$  para  $x$  suficientemente grande. Dado que la integral  $\int_1^{+\infty} dx/x^2$  es convergente, así lo es  $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ . Concluimos pues que  $I(p)$  es convergente sii  $p > 0$ .

2. Escribamos  $I(p)$  en la forma

$$I(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t), \quad f(t) = \int_0^t x^{p-1}e^{-x} dx.$$

Por el teorema de la media para integrales podemos expresar  $f(t) = t\xi^{p-1}e^{-\xi} > 0$  con  $0 < \xi < t$ . Por otra parte  $df/dt = t^{p-1}e^{-t} > 0$ , es decir  $f(t)$  crece con  $t$ . Se concluye que  $I(p) > 0$ .

3. Usando la fórmula de integración por partes con  $u = x^{p-1}$ ,  $dv = e^{-x}$  obtenemos

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = [-e^{-x}x^{p-1}]_0^{+\infty} + (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2}e^{-x}dx.$$

Por otra parte,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-1}e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-1}e^{-x} = 0$ , lo cual implica que

$$I(p) = (p-1)I(p-1) \text{ si } p > 1,$$

Para  $n$  entero positivo y teniendo en cuenta que  $I(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ ,

$$I(n) = (n-1)(n-2) \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot I(1) = (n-1)! \cdot I(1) = (n-1)!.$$

4. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1/x^{\beta+1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{1/2n}}.$$

Esto implica que  $e^{-x} < 1/x^{\beta+1}$  y  $\log x < 1/x^{2n}$  para  $x$  suficientemente grande. Es decir

$$0 < x^{\beta-1}e^{-x}(\log x)^n < x^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x^{\beta+1}} \cdot x^{1/2} = \frac{1}{1/x^{3/2}}$$

Como  $\int_1^{+\infty} dx/x^{3/2}$  es convergente, concluimos por el criterio de comparación que la integral  $\int_1^{+\infty} x^{\beta-1}e^{-x}(\log x)^n dx$  también es convergente. Por otra parte cuando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x^{\beta-1}|\log x|^n e^{-x}$  es equivalente a  $x^{\beta-1}|\log x|^n$ . Ahora bien,  $|\log x|^n$  es menor que  $x^{-\beta/2n}$ , por tanto

$$x^{\beta-1}|\log x|^n < \frac{1}{x^{1-\frac{\beta}{2}}}.$$

Dado que  $1 - \beta/2 < 1$  la integral  $\int_0^1 dx/x^{1-\beta/2}$  es convergente. Como consecuencia también lo es  $\int_0^1 x^{\beta-1}e^{-x}(\log x)^n dx$ . De todo lo anterior deducimos que  $\varphi_n(\beta)$  es convergente.

5 La función  $f(h) = x^h$  se puede escribir en la forma  $f(h) = e^{h \log x}$ . Entonces

$$f'(h) = (\log x)e^{h \log x}, \quad f''(h) = (\log x)^2 e^{h \log x}, \quad f'''(h) = (\log x)^3 e^{h \log x}.$$

Tenemos pues  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \log x$ ,  $f''(0) = (\log x)^2$ ,  $f'''(c) = (\log x)^3 e^{c \log x}$ . La fórmula de Maclaurin aplicada a  $f(h)$  proporciona

$$x^h - 1 = h \log x + \frac{h^2}{2}(\log x)^2 + \frac{h^3}{6}x^{\theta h}(\log x)^3 \quad (0 < \theta < 1).$$

6. Multiplicando por  $x^{p-1}e^{-x}$  obtenemos

$$\begin{aligned} & x^{p+h-1}e^{-x} - x^{p-1}e^{-x} \\ &= hx^{p-1}e^{-x} \log x + \frac{h^2}{2}x^{p-1}e^{-x}(\log x)^2 + \frac{h^3}{6}x^{p+\theta h-1}e^{-x}(\log x)^3. \end{aligned}$$

Eligiendo  $|h| < p/2$  tenemos  $0 < p/2 < p + \theta h < 3p/2$ . Si  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} x^{\frac{p}{2}-1} &> x^{p+\theta h-1} > x^{\frac{3p}{2}-1} \\ x^{\frac{p}{2}-1}(\log x)^3 &< x^{p+\theta h-1}(\log x)^3 < x^{\frac{3p}{2}-1}(\log x)^3. \end{aligned}$$

Si  $1 < x$ ,

$$x^{\frac{p}{2}-1} < x^{p+\theta h-1} < x^{\frac{3p}{2}-1}, \quad x^{\frac{p}{2}-1}(\log x)^3 < x^{p+\theta h-1}(\log x)^3 < x^{\frac{3p}{2}-1}(\log x)^3.$$

Es decir, para cualquier  $x > 0$  la expresión

$$x^{p+h-1}e^{-x} - x^{p-1}e^{-x} - hx^{p-1}e^{-x} \log x - \frac{h^2}{2}x^{p-1}e^{-x}(\log x)^2$$

está comprendida entre

$$\frac{h^3}{6}x^{\frac{p}{2}-1}(\log x)^3 e^{-x} \text{ y } \frac{h^3}{6}x^{\frac{3p}{2}-1}(\log x)^3 e^{-x}.$$

Por integración,  $I(p+h) - I(p) - h\varphi_1(x) - \frac{h^2}{2}\varphi_2(x)$  está comprendido entre

$$\frac{h^3}{6}\varphi_3\left(\frac{p}{2}\right) \text{ y } \frac{h^3}{6}\varphi_3\left(\frac{3p}{2}\right).$$

7. Del apartado anterior deducimos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (I(p+h) - I(p)) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(p+h) - I(p)}{h} = \varphi_1(p),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{I(p+h) - I(p)}{h} - \varphi_1(p)}{h} = \varphi_2(p).$$

Es decir,  $I(p)$  es continua,  $dI/dp = \varphi_1(p)$  y  $d^2I/dp^2 = \varphi_2(p)$ .

8. Del apartado 2. deducimos  $I(1) = I(2) = 1$ . Esto unido a los resultados del apartado anterior implica que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[1, 2]$  es decir, existe  $p_0 \in (1, 2)$  tal que  $(dI/dp)(p_0) = 0$ .

9. La integral  $\int_0^t x^{p-1}e^{-x}(\log x)^2 dx$  es positiva, crece con  $t$  y su límite cuando  $t \rightarrow +\infty$  es  $\varphi_2(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}(\log x)^2 dx$ . Es decir,  $d^2I/dp^2 > 0$ , en consecuencia  $dI/dp$  es creciente y se anula en  $p_0$ . Entonces

$$\begin{cases} 0 < p < p_0 \Rightarrow \frac{dI}{dp} < 0 \Rightarrow I \text{ decreciente,} \\ p > p_0 \Rightarrow \frac{dI}{dp} > 0 \Rightarrow I \text{ creciente.} \end{cases}$$

10. Si  $0 < p < 1$  se verifica  $I(p+2) = p(p+1)I(p)$  y  $2 < p+2 < 3$ . Como  $I$  es estrictamente creciente en  $[2, 3]$  tenemos  $1 = I(2) < I(p+2) < I(3) = 2$ . Entonces

$$\frac{1}{p(p+1)} < I(p) < \frac{2}{p(p+1)}, \text{ o bien } \frac{1}{2p} < I(p) < \frac{2}{p}.$$

Por tanto,  $\lim_{p \rightarrow 0^+} I(p) = +\infty$ .

### 9.17. Integral mediante las Gamma y Beta de Euler

Utilizando las propiedades de las funciones gamma y beta de Euler, calcular

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x-x^2-x^3}}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Factorizando el radicando obtenemos

$$1 + x - x^2 - x^3 = (1 - x)(x + 1)^2$$

con lo cual la integral pedida es

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^{-1/3} (x + 1)^{2/3} dx.$$

La substitución  $t = (x + 1)/2$  transforma la integral dada en

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2 - 2t)^{-1/3} (2t)^{-2/3} \cdot 2 dt = 2 \cdot 2^{-1/3} \cdot 2 \int_0^1 (1 - t)^{-1/3} (t)^{-2/3} dt \\ &= B(1/3, 2/3) = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3 + 2/3)} = \Gamma(1/3)\Gamma(2/3). \end{aligned}$$

Usando la fórmula del complemento  $\Gamma(p)\Gamma(1 - p) = \pi/\sin(p\pi)$  ( $0 < p < 1$ ) obtenemos

$$I = \Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## 9.18. Convólución de dos campanas de Gauss

La *convólución* de dos funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en  $\mathbb{R}$  es la función  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt$$

en el supuesto de que la integral anterior sea convergente para cada valor del parámetro  $x$ . Este problema tiene por objeto determinar la convólución de dos campanas de Gauss.

(a) Calcular para cada valor real del parámetro  $p$  la integral

$$I(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+pt} dt.$$

(b) Dados dos números reales  $\lambda$  y  $\mu$ , considérense las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  definidas a partir de  $f$  y  $g$  mediante  $\varphi(x) = f(x - \lambda)$ ,  $\psi(x) = g(x - \mu)$ . Establecer la relación que expresa la convólución  $\varphi * \psi$  en términos de la convólución



$f * g$ .

(c) Calcular la convolución de las dos funciones

$$\varphi(x) = \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2}{2a^2}\right\}, \quad \psi(x) = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2b^2}\right\},$$

donde  $\lambda, \mu, a, b$  son números reales dados de los cuales los dos últimos son positivos.

(Propuesto en examen, Amp. de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Sabemos que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-u^2\} du = \sqrt{\pi}$  (integral de Euler). Podemos expresar

$$-t^2 + tp = -\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}.$$

Usando la igualdad anterior y efectuando el cambio  $u = t - p/2$ :

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2 + pt\} dt = \exp\left\{\frac{p^2}{4}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(t - \frac{p}{2}\right)^2\right\} dt \\ &= \exp\left\{\frac{p^2}{4}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-u^2\} du = \exp\left\{\frac{p^2}{4}\right\} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(b) Usando la definición de convolución y efectuando el cambio  $u = t - \lambda$ :

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\lambda)g(x-\mu-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u-\lambda-\mu) du = (f * g)(x-\lambda-\mu). \end{aligned}$$

(c) Elijamos las funciones  $f(x) = \exp\{-x^2/2a^2\}$ ,  $g(x) = \exp\{-x^2/2b^2\}$  y hallemos  $f * g$ :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2a^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2b^2}\right\} dt \\ &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2a^2} + \frac{xt}{b^2} - \frac{t^2}{2b^2}\right\} dt \\ &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} + \frac{xt}{b^2}\right\} dt. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable  $u = \frac{t}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$  :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b^2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -u^2 + \frac{x}{b^2} \frac{\sqrt{2}abu}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\} \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} du \\ &= \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b^2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -u^2 + pu \} du \quad \left( p = \frac{\sqrt{2}ax}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

Por el apartado (a):

$$I(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -u^2 + pu \} du = \exp \left\{ \frac{p^2}{4} \right\} \sqrt{\pi} = \exp \left\{ \frac{a^2 x^2}{2b^2(a^2 + b^2)} \right\} \sqrt{\pi}.$$

Simplificando las exponenciales queda:

$$(f * g)(x) = \frac{\sqrt{2\pi}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(a^2 + b^2)} \right\}.$$

Usando el apartado (b):

$$(\varphi * \psi)(x) = (f * g)(x - \lambda - \mu) = \frac{\sqrt{2\pi}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \lambda - \mu)^2}{2(a^2 + b^2)} \right\}.$$

## 9.19. Integral de Euler-Poisson

Este problema tiene por objeto desarrollar una demostración de la conocida fórmula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (*)$$

a) Se considera la función  $f$  definida para cada  $x \geq 0$  mediante

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Calcular  $f(0)$  y determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Obtener una expresión de la derivada de la función  $f$  en términos de  $g$  y  $g'$ , estando  $g$  definida por:

$$g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

c) Justificar utilizando los dos apartados anteriores la validez de la fórmula (\*).

(Propuesto en examen, Amp. de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** a) Hallemos  $f(0)$  :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4.$$

Para todo  $x, t \in \mathbb{R}$  se verifica  $e^{-x(1+t^2)}/(1+t^2) > 0$ , por tanto  $f(x) \geq 0$ . Por otra parte para  $x \geq 0$  y  $t \in [0, 1]$  tenemos  $x \leq x(t^2 + 1)$ , es decir  $e^{-x(t^2+1)} \leq e^{-x}$ . Queda:

$$0 \leq f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(t^2+1)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt = e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x}}{4}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi e^{-x}/4 = 0$ , se concluye  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b) Usando el conocido teorema de la derivación bajo el signo integral:

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{-(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt = -e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt.$$

Derivemos  $g(x)$  usando el teorema fundamental del Cálculo:

$$g'(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}.$$

Efectuando ahora el cambio  $t = u/\sqrt{x}$  tenemos  $dt = du/\sqrt{x}$  y por tanto:

$$\int_0^1 e^{-xt^2} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}} du = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}.$$

Esto nos permite encontrar la expresión pedida:

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{g(x)}{\sqrt{x}} = -2g'(x)g(x).$$

c) Integrando ambos miembros de la igualdad anterior obtenemos  $f(x) = -g^2(x) + C$ . Para  $x = 0$  obtenemos  $f(0) = -g^2(0) + C$  o bien  $\pi/4 = 0 + C$ . Es decir, tenemos  $f(x) = \pi/4 - g^2(x)$  o bien  $g(x) = \sqrt{\pi/4 - f(x)}$ . Teniendo en cuenta el apartado a) queda:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que  $h(t) = e^{-t^2}$  es par, obtenemos la fórmula de Euler-Poisson :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

## 9.20. Una integral por derivación paramétrica (1)

Usando derivación paramétrica, calcular la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sin x)}{\sin x} dx.$$

**Solución.** En  $[0, \pi/2]$  el denominador se anula sólo para  $x = 0$ . Por otra parte para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\lambda \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda \sin x}{\sin x} = \lambda,$$

por tanto la siguiente función está bien definida (por medio de una integral convergente)

$$I : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\lambda \sin x)}{\sin x} dx.$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de la derivación paramétrica, por tanto

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \lambda^2 \sin^2 x}.$$

Usando la substitución  $t = \tan x$

$$I'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{\lambda^2 t^2}{1+t^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\lambda^2)t^2 + 1}.$$

Usando la substitución  $u = \sqrt{1+\lambda^2}t$

$$I'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{\pi}{2}.$$

Integrando ambos miembros

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2} \log \left| \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \right| + C.$$

Para  $\lambda = 0$  tenemos  $0 = 0 + C$  es decir  $C = 0$ , entonces

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2} \log \left| \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \right|.$$

Como consecuencia

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sin x)}{\sin x} dx = I(1) = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \sinh^{-1} 1.$$

### 9.21. Una integral por derivación paramétrica (2)

Calcular  $\int_0^\pi \frac{1}{(5 - 3 \cos x)^3} dx$ .

Sugerencia: Para adecuados valores de  $\lambda$  considérese:

$$I(\lambda) = \int_0^\pi \frac{1}{\lambda - 3 \cos x} dx$$

**Solución.** Consideremos  $D = [0, \pi] \times (3, +\infty)$  y la función

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 3 \cos x}.$$

Claramente  $\lambda - 3 \cos x \neq 0$  para todo  $(x, \lambda) \in D$  y  $f \in C^\infty(D)$ . Por otra parte

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{-1}{(\lambda - 3 \cos x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = \frac{2}{(\lambda - 3 \cos x)^3}.$$

Es decir, la función integrando es

$$\frac{1}{(5 - 3 \cos x)^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(x, 5).$$

Hallemos ahora  $I(\lambda)$  usando la substitución  $t = \tan(x/2)$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\lambda - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\lambda + 3)t^2 + \lambda - 3} dt \\ &= \frac{2}{\lambda - 3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{\lambda+3}{\lambda-3}} t\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 9}} \left[ \arctan \sqrt{\frac{\lambda+3}{\lambda-3}} t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 9}}. \end{aligned}$$

Hallemos  $I''(\lambda)$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \pi(\lambda^2 - 9)^{-1/2}, \\ I'(\lambda) &= -\pi\lambda(\lambda^2 - 9)^{-3/2} \\ I''(\lambda) &= -\pi(\lambda^2 - 9)^{-3/2} + 3\pi\lambda^2(\lambda^2 - 9)^{-5/2} \\ &= \pi(\lambda^2 - 9)^{-3/2} [-1 + 3\lambda^2(\lambda^2 - 9)^{-1}]. \end{aligned}$$

La derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$  es continua en  $[0, \pi] \times (3, +\infty)$ . Aplicando el teorema de derivación paramétrica obtenemos para todo  $\lambda \in (3, +\infty)$

$$I'(\lambda) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx = - \int_0^\pi \frac{dx}{(\lambda - 3 \cos x)^2} dx.$$

Por análogas consideraciones

$$I''(\lambda) = 2 \int_0^\pi \frac{dx}{(\lambda - 3 \cos x)^3} dx, \quad \forall \lambda \in (3, +\infty).$$

La integral pedida es por tanto

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(5 - 3 \cos x)^3} dx = \frac{1}{2} I''(5) = \dots = \frac{59\pi}{2048}.$$

## 9.22. Integral de Gauss o de probabilidades

Se consideran las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

- (a) Demostrar que las funciones  $f$  y  $g$  son derivables en  $\mathbb{R}$  y hallar sus derivadas.  
 (b) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , demostrar que  $f'(x) + g'(x) = 0$  y deducir de ello el valor de  $f(x) + g(x)$ .  
 (c) Encontrar una función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|g(x)| \leq |h(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 (d) Usar el apartado anterior para deducir el valor de la integral de Gauss o de probabilidades. Es decir, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Al ser la función  $e^{-t^2}$  continua en  $\mathbb{R}$ , deducimos por el teorema fundamental del Cálculo que la función  $\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  es derivable en  $\mathbb{R}$  siendo su derivada  $\varphi'(x) = e^{-x^2}$ . Al ser la función  $\phi(u) = u^2$  derivable en  $\mathbb{R}$ , es derivable la composición  $\phi \circ \varphi = f$  en  $\mathbb{R}$ . Usando la regla de la cadena:

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Para todo  $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$  la función integrando en  $g(x)$  tiene derivadas parciales continuas y por el teorema de la derivación paramétrica, existe  $g'(x)$  en  $\mathbb{R}$  siendo ésta:

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \right) dt = \int_0^1 \frac{-2x(t^2+1)e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

$$= \int_0^1 -2xe^{-x^2t^2} e^{-x^2} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 xe^{-x^2t^2} dt.$$

Efectuando el cambio de variable  $v = tx$  obtenemos:

$$\int_0^1 xe^{-x^2t^2} dt = \int_0^x xe^{-v^2} \frac{1}{x} dv = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

En consecuencia,  $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

(b) Del apartado anterior deducimos inmediatamente que  $f'(x) + g'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (conjunto conexo), en consecuencia ha de ser  $f(x) + g(x) = C$  (constante) para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $x = 0$  :

$$C = f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Es decir,  $f(x) + g(x) = \pi/4$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(c) Si  $t \in [0,1]$  es claro que  $1 \leq t^2 + 1 \leq 2$ . Por otra parte, siempre  $e^{-x^2(t^2+1)} \leq e^{-x^2}$ , en consecuencia:

$$0 \leq \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1} \leq e^{-x^2}.$$

De lo anterior deducimos que

$$|g(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1} dt \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

Es decir, la función  $h(x) = e^{-x^2}$  satisface  $|g(x)| \leq |h(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

(d) Se verifica  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ , y de la relación  $0 \leq |g(x)| \leq |h(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$  deducimos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = 0$  y por tanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . De la relación obtenida en el apartado (b) deducimos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi/4$ . Entonces:

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

Esto implica:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que la función  $e^{-t^2}$  es par en  $\mathbb{R}$  queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

### 9.23. Derivación paramétrica y límite

1. Calcular  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} \quad (x > 0)$ .

2. Calcular  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^{n+1}}$ .

Indicación: derivar la integral respecto de un parámetro y razonar por inducción.

3. Calcular  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$ .

4. Como aplicación de lo anterior, calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \sqrt{n}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} &= \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t/x)^2} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{(1/x) dt}{1 + (t/x)^2} = \frac{1}{x} \left[ \arctan \frac{t}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}. \end{aligned}$$

2. Por el apartado anterior,  $\int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-1} dt = \frac{\pi}{2} x^{-1}$ . Derivando sucesivamente respecto de  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} -2x(x^2 + t^2)^{-2} dt &= -\frac{\pi}{2} x^{-2} \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-2} dt &= \frac{\pi}{4} x^{-3}, \\ \int_0^{+\infty} -2(2x)(x^2 + t^2)^{-3} dt &= \frac{-3\pi}{2^2} x^{-4} \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-3} dt &= \frac{3\pi}{2^4} x^{-5}, \\ \int_0^{+\infty} -3(2x)(x^2 + t^2)^{-4} dt &= \frac{(-5)3\pi}{2^4} x^{-6} \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-4} dt &= \frac{3 \cdot 5\pi}{2 \cdot 3 \cdot 2^4} x^{-7}. \end{aligned}$$



El cálculo de estas primeras derivadas sugiere la fórmula:

$$\int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-n-1} dt = \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} x^{-2n-1}. \quad (*)$$

Veamos que la fórmula anterior es cierta aplicando el método de inducción. Es cierta para  $n = 1$  como inmediatamente se comprueba. Sea cierta para  $n$ , es decir supongamos que se verifica (\*). Derivando respecto de  $x$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} (-n-1)2x(x^2 + t^2)^{-n-2} dt \\ &= \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} (-2n-1)x^{-2n-2}. \end{aligned}$$

De forma equivalente podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (x^2 + t^2)^{-(n+1)-1} dt &= \frac{\pi}{2^{n+2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(n+1)!} x^{-2n-3} \\ &= \frac{\pi}{2^{(n+1)+1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2(n+1)-1)}{(n+1)!} x^{-2(n+1)-1}. \end{aligned}$$

La fórmula (\*) es por tanto cierta para  $n + 1$ .

3. Efectuando el cambio de variable  $u = t/\sqrt{n}$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n} du}{(1 + u^2)^n}.$$

Usando la fórmula (\*) para  $n - 1$  y  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} &= \frac{\sqrt{n}\pi}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{(n-1)!} \\ &= \frac{\sqrt{n}\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}. \end{aligned}$$

4. De la igualdad anterior deducimos que el límite pedido es

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \sqrt{n} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

Usando el conocido valor de la integral de Euler:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \sqrt{n} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \pi^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

## Capítulo 10

# Series numéricas reales

### 10.1. Concepto de serie numérica real

1. Dada la serie  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$ , hallar el término enésimo y escribirla en forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .
2. Dada la serie  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$ , hallar el término enésimo, escribirla en forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y hallar la suma parcial enésima  $S_n$ .

**Solución.** 1. Claramente, el término enésimo es  $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ , por tanto podemos escribir la serie en la forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ .

2. Claramente, el término enésimo es  $u_n = \frac{1}{4^n}$ , por tanto podemos escribir la serie en forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ . Usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{(1/4)((1/4)^n - 1)}{1/4 - 1} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right). \end{aligned}$$

## 10.2. Convergencia y divergencia de series numéricas

1. Aplicar a las siguientes series el teorema de la condición necesaria de convergencia

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{7n+2}. \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}. \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}. \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} 5. \quad e) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n.$$

2. Demostrar el teorema de la condición necesaria para la convergencia de una serie, es decir si  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente, entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

3. Sea  $p > 0$  un entero. Demostrar que la serie  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  es convergente si, y sólo si la serie  $u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots$  es convergente.

4. Calcular la suma de una serie cuyas sumas parciales son

$$S_n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 6}{3n^3 + 6n + 2}.$$

5. Demostrar que la suma de una serie convergente y una divergente, es divergente.

6. Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \cos \frac{1}{2^n}$ .

Sugerencia. Usar la fórmula  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ .

7. Calcular  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$  usando la definición de suma de una serie.

**Solución.** 1. a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+5}{7n+2} = \frac{3}{7} \neq 0$ , por tanto la serie es divergente.

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , por tanto no podemos deducir del teorema de la condición necesaria de convergencia el carácter de la serie.

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ , por tanto no podemos deducir del teorema de la condición necesaria de convergencia el carácter de la serie.

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \neq 0$ , por tanto la serie es divergente.

e) No existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n$ , por tanto la serie es divergente.

2. Por hipótesis existe  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  y dicho límite es finito. Por otra parte.  $u_n = S_n - S_{n-1}$  para todo  $n \geq 2$ , por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

3. Si llamamos  $S_1, S_2, \dots$  a las sumas parciales de la primera serie y  $S'_1, S'_2, \dots$  a las de la segunda se tiene

$$S'_n = S_{n+p} - S_p,$$

luego para que  $S_n$  tenga límite finito cuando  $n \rightarrow +\infty$ , es necesario y suficiente que  $S'_n$  tenga límite finito cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

4. Por definición de suma de una serie:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 - 3n^2 + 6}{3n^3 + 6n + 2} = \frac{4}{3}.$$

5. Supongamos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente de suma  $U$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$  es divergente. Sean  $S_n$  y  $S'_n$  las respectivas sumas parciales enésimas. La sumas parciales enésimas de la serie suma  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u'_n)$  son  $S_n + S'_n$ . Si la serie suma fuera convergente con suma  $W$ , tendríamos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((S_n + S'_n) - S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + S'_n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = W - U,$$

lo cual implicaría que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$  es convergente (contradicción).

6. Se verifica

$$\log \sen 2a = \log(2 \sen a \cos a) = \log 2 + \log \sen a + \log \cos a. \quad (*)$$

Haciendo  $a = 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n$  y usando (\*), obtenemos los  $n$  primeros términos de la serie:

$$\begin{aligned} u_1 &= \log \cos \frac{1}{2} = \log \sen 1 - \log \sen \frac{1}{2} - \log 2, \\ u_2 &= \log \cos \frac{1}{2^2} = \log \sen \frac{1}{2} - \log \sen \frac{1}{2^2} - \log 2, \\ &\dots \\ u_n &= \log \cos \frac{1}{2^n} = \log \sen \frac{1}{2^{n-1}} - \log \sen \frac{1}{2^n} - \log 2. \end{aligned}$$

La suma parcial enésima es por tanto

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \log \sen 1 - \log \sen \frac{1}{2^n} - n \log 2,$$

y su suma

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{\operatorname{sen} 1}{2^n \operatorname{sen}(1/2^n)}.$$

Usando  $\operatorname{sen}(1/2^n) \sim 1/2^n$  para  $n \rightarrow +\infty$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{\operatorname{sen} 1}{2^n(1/2^n)} = \log \operatorname{sen} 1.$$

7. Hallemos las sumas parciales enésimas.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{4}, \\ S_2 &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{8}{9}, \\ S_3 &= \frac{8}{9} + \frac{7}{144} = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Estas sumas las podemos escribir en la forma

$$S_1 = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2}, \quad S_2 = \frac{2(2+2)}{(2+1)^2}, \quad S_3 = \frac{3(3+2)}{(3+1)^2},$$

lo cual sugiere la fórmula  $S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ . Vamos a demostrarla por inducción. Supongamos que es cierta para  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= \frac{n(n+2)^3 + 2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{n^4 + 6n^3 + 12n^2 + 10n + 3}{(n+1)^2(n+2)^2}. \end{aligned}$$

El numerador es igual a  $P(n)$  con  $P(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 3 \in \mathbb{R}[x]$ . Este polinomio se anula para  $x = -1$ , y usando el algoritmo de Ruffini:

$$P(x) = (x+1)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3).$$

El polinomio de la derecha también se anula para  $x = -1$ . Usando de nuevo el algoritmo de Ruffini:

$$P(x) = (x+1)^2(x^2 + 4x + 3) = (x+1)^3(x+3),$$

por tanto  $S_{n+1}$  es

$$S_{n+1} = \frac{P(n)}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2},$$

lo cual implica que la fórmula es cierta para  $n+1$ . La suma de la serie es por tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1.$$

### 10.3. Esquemas de asociación de series

1. Se considera la serie  $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ .

a) Demostrar que no tiene suma.

b) Aplicar un esquema de asociación de términos a la serie anterior, para obtener una serie que tenga suma.

2. Se considera la serie

$$1 + (-2) + 2 + (-3) + 3 + (-4) + 4 + \dots$$

a) Demostrar que no tiene suma.

b) Aplicar dos esquemas de asociación de términos a la serie anterior, uno para obtener una serie con suma  $-\infty$  y otro para obtener una serie convergente con suma con suma 1.

3. Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  una serie con suma  $S$  (finita o no). Demostrar que cualquier esquema de asociación de términos en paquetes finitos aplicada a dicha serie da lugar a una nueva serie con la misma suma  $S$ .

**Solución.** Recordamos que dada una serie  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ , un *esquema de asociación de términos en paquetes finitos* viene dada por

$$(u_1 + \dots + u_{\varphi(1)}) + (u_{\varphi(1)+1} + \dots + u_{\varphi(2)}) + \dots$$

en donde  $1 \leq \varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \dots$ , y  $\varphi(n)$  es número natural para todo  $n$ .

1. a) La sucesión de las sumas parciales enésimas es:

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots,$$

por tanto no existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , es decir la serie no tiene suma.

b) Si aplicamos el siguiente esquema de asociación:

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots,$$

obtenemos la serie  $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ , que claramente es convergente con suma  $S = 0$ .

2. a) La sucesión de las sumas parciales enésimas es:

$$S_1 = 1, S_2 = -1, S_3 = 1, S_4 = -2, S_5 = 1, S_6 = -3, S_7 = 1 \dots,$$

por tanto no existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , es decir la serie no tiene suma.

b) Si aplicamos el siguiente esquema de asociación:

$$(1 - 2) + (2 - 3) + (3 - 4) + (4 - 5) + \dots,$$

obtenemos la serie  $(-1) + (-1) + (-1) + \dots$ , que claramente es divergente con suma  $S = -\infty$ .

Para el esquema de asociación

$$1 + (-2 + 2) + (-3 + 3) + (-4 + 4) + \dots,$$

obtenemos la serie  $1 + 0 + 0 + \dots$ , que claramente es convergente con suma  $S = 1$ .

3. Sea  $\varphi(n)$  un esquema de asociación de términos en paquetes finitos. Es claro que  $S_{\varphi(n)}$  es una subsucesión de  $S_n$ , por tanto tendrá como límite  $S$ .

## 10.4. Serie geométrica

1. Analizar el carácter de las siguientes series y hallar su suma cuando sean convergentes.

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad . \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n \quad . \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n} \quad . \quad 4) \sum_{n=0}^{+\infty} a^2 \quad . \quad 5) 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$$

2. Demostrar que:

a) La serie geométrica  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  es convergente si, y sólo si  $|x| < 1$ .

b) Si es convergente, su suma es  $S = \frac{1}{1-x}$ .

3. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3\sqrt{\frac{1}{2^n}}.$$

4. Si  $f(x) = e^{-x}$ , hallar la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(n)$ .

**Solución.** 1. 1) Es serie geométrica con  $x = 1/5$ . Como  $|x| = 1/5 < 1$ , la serie es convergente. Su suma es  $S = \frac{1}{1-1/5} = \frac{5}{4}$ .

2) Es serie geométrica con  $x = -1/5$ . Como  $|x| = 1/5 < 1$ , la serie es convergente. Su suma es  $S = \frac{1}{1+1/5} = \frac{5}{6}$ .

3) Es serie geométrica con  $x = 3/2$ . Como  $|x| = 3/2 \not< 1$ , la serie es divergente.

4) Es serie geométrica, con  $x = a^2$  que será convergente si, y sólo si  $|a^2| < 1$  o de forma equivalente, si, y sólo si  $|a| < 1$  y en este caso su suma es  $S = \frac{1}{1-a^2}$ .



5) Es serie geométrica con  $x = -1$ . Como  $|x| = 1 \not< 1$ , la serie es divergente.

2. El término enésimo de la serie es  $u_n = x^{n-1}$ . Si  $|x| \geq 1$ , también  $|x^{n-1}| = |x|^{n-1} \geq 1$ . Es decir,  $\{u_n\}$  no tiende a 0, lo cual implica que la serie no es convergente.

Sea  $|x| < 1$ . La suma parcial enésima es:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

por tanto,

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{0 - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x},$$

finito. Quedan pues demostrados los apartados a) y b).

3. Podemos escribir:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} 3\sqrt{\frac{1}{2^n}} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots \right).$$

Ahora bien, usando el teorema relativo a la suma de series geométricas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots \\ &= -1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots\right) \\ &= -1 + \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

La suma pedida es por tanto  $S = 3(1 + \sqrt{2})$ .

4. Las derivadas sucesivas de  $f$  son  $f'(x) = -e^{-x}$ ,  $f''(x) = e^{-x}$ ,  $f'''(x) = -e^{-x}$ , ...,  $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$ . Entonces,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-n} = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \cdots.$$

Es una serie geométrica de razón  $-1/e$ , y  $|-1/e| < 1$ , por tanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(n) = \frac{1}{1 + 1/e} = \frac{e}{e + 1}.$$

## 10.5. Álgebra de series

- Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right)$ .
- Demostrar el teorema del álgebra de series: supongamos que las series  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  son convergentes de sumas respectivas  $U$  y  $V$ . Entonces,
  - La serie suma  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$  es convergente con suma  $U + V$ .
  - Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es convergente con suma  $\lambda U$ .

**Solución.** 1. Usando el teorema del álgebra de series y la fórmula de la suma de las series geométricas convergentes:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{5}{2^n} - \frac{3}{4^n} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{3}{4^n} \\ &= 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{5}{1 - 1/2} - \frac{3}{1 - 1/4} = 6. \end{aligned}$$

2. a) Sean  $U_n$  y  $V_n$  las sumas parciales  $n$ -ésimas de las series dadas, respectivamente. Entonces la suma parcial  $n$ -ésima de la serie suma es  $U_n + V_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = U + V,$$

es decir la serie suma es convergente con suma  $U + V$ .

b) La suma parcial  $n$ -ésima de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es  $\lambda U_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lambda U,$$

es decir la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es convergente con suma  $\lambda U$ .

## 10.6. Series de términos positivos

1. Analizar el carácter de las series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2. \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n\sqrt{n}} \right).$$

2. Usando el criterio de comparación por cociente, analizar el carácter de las series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{3n^4 + n^3 - 2}; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 2\sqrt[4]{n} + 1}{2n + 5\sqrt{n} + 6}.$$

3. Usando el criterio de las series mayorante y minorante, analizar el carácter de las series:

$$a) 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad b) 1 + \frac{2^2 + 1}{2^3 + 1} + \frac{3^2 + 1}{3^3 + 1} + \frac{4^2 + 1}{4^3 + 1} + \dots$$

4. Demostrar que toda serie de términos positivos tiene siempre una suma y que esta suma es finita, si y sólo si las sumas parciales estén acotadas.

5. Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  dos series de términos positivos con  $u_n \leq v_n$  para todo  $n$ . Demostrar que:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ es divergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ es divergente.}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ es convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ es convergente.}$$

6. Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  dos series de términos positivos tales que existe  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n)$ . Demostrar el criterio de comparación por cociente, es decir:

- i) Si  $L \neq 0$  y finito, ambas series tienen el mismo carácter.
- ii) Si  $L = 0$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente.
- iii) Si  $L = +\infty$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es divergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es divergente.

$$7. \text{ Calcular } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+3} \right).$$

**Solución.** 1. a) Es serie de Riemann con  $p = 2 > 1$ , por tanto es convergente.

b) Es serie de Riemann con  $p = 1/3 \leq 1$ , por tanto es divergente.

c) Es serie de Riemann con  $p = -2 \leq 1$ , por tanto es divergente.

d) La series  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  son series de Riemann con  $p = 4 > 1$  y

$p = 3/2 > 1$  respectivamente, por tanto convergentes. Por el teorema del álgebra de series, concluimos que la serie dada es convergente.

2. a) La serie es de términos positivos y su término enésimo es función racional en  $n$ . La diferencia entre el grado del denominador y del numerador es 2. Comparamos con la serie de término general  $1/n^2$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{3n^4 + n^3 - 2} : \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente, luego también lo es  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{3n^4 + n^3 - 2}$  como consecuencia del criterio de comparación por cociente.

b) La serie es de términos positivos y la podemos expresar en la forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1/3} + 2n^{1/4} + 1}{2n + 5n^{1/2} + 6}.$$

La diferencia entre la mayor potencia del denominador y del numerador es  $1 - 1/3 = 2/3$ . Comparamos con la serie de término general  $1/n^{2/3}$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/3} + 2n^{1/4} + 1}{2n + 5n^{1/2} + 6} : \frac{1}{n^{2/3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2n^{11/12} + n^{2/3}}{2n + 5n^{1/2} + 6} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$  es divergente, luego también lo es  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 2\sqrt[4]{n} + 1}{2n + 5\sqrt{n} + 6}$  como consecuencia del criterio de comparación por cociente.

3. a) La serie es de términos positivos. Como  $n! \geq 2^{n-1}$ ,  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Por tanto, la serie dada es término a término menor o igual que la geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots,$$

y esta última es convergente, luego también lo es la serie dada.

b) La serie es de términos positivos. Como  $n(n^2 + 1) = n^3 + n \geq n^3 + 1$ ,  $\frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} \geq \frac{1}{n}$ . Por tanto, la serie dada es término a término mayor o igual que la armónica (que es de términos positivos),

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

y esta última es divergente, luego también lo es la serie dada.

4. Si una serie es de términos positivos, la sucesión de sumas parciales  $S_n$  es creciente. Si está acotada, sabemos por teoría de sucesiones que  $S_n$  tiene límite finito  $S$ . Si  $S_n$  no está acotada, para todo  $K > 0$  existe  $n_0$  natural con  $S_{n_0} \geq K$  y al ser  $S_n$  creciente,  $S_n \geq K$  para todo  $n \geq n_0$ , lo cual implica que  $S_n \rightarrow +\infty$ .

5. Llamemos  $S_n$  y  $S'_n$  a las sumas parciales de las series  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  respectivamente. Evidentemente,  $S_n \leq S'_n$  para todo  $n$ .

a) Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es divergente,  $S_n \rightarrow +\infty$  con lo cual la sucesión  $S_n$  no está acotada y como consecuencia tampoco lo está  $S'_n$ , luego  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es divergente.

b) Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente,  $S'_n$  tiene límite finito con lo cual la sucesión  $S'_n$  está acotada y como consecuencia también lo está  $S_n$ , luego  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente.

6. i) Si  $L \neq 0$ , ha de ser necesariamente  $L > 0$ . Eligiendo  $\epsilon = L/2$ , existe  $n_0$  natural tal que  $|u_n/v_n - L| < L/2$  si  $n \geq n_0$ . De forma equivalente,

$$\frac{L}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3L}{2} \text{ si } n \geq n_0.$$

Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} (3L/2)v_n$  es convergente (álgebra de series). Como  $u_n < (3L/2)v_n$  para todo  $n \geq n_0$  se deduce (criterio de comparación), que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente.

Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} (2/L)u_n$  es convergente (álgebra de series). Como  $v_n < (2/L)u_n$  para todo  $n \geq n_0$  se deduce (criterio de comparación), que  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente.

Hemos demostrado que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente si, y sólo si  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente, o equivalentemente que ambas series tienen el mismo carácter.

ii) Si  $L = 0$ , para  $\epsilon = 1$  existe  $n_0$  natural tal que  $u_n/v_n < 1$  si  $n \geq n_0$ . Es decir  $u_n < v_n$  si  $n \geq n_0$ . Entonces, si  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es convergente, también lo es  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  (criterio de comparación).

iii) Si  $L = +\infty$ , para  $K = 1$  existe  $n_0$  natural tal que  $u_n/v_n > 1$  si  $n \geq n_0$ . Es decir  $u_n > v_n$  si  $n \geq n_0$ . Entonces, si  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  es divergente, también lo es  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  (criterio de comparación).

7. La expresión  $S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n+3}$  es la suma parcial  $n$ -ésima

de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$ , por tanto  $L$  es la suma de tal serie, que es de términos

positivos. Si la comparamos por cociente con  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ , deducimos que es divergente y por tanto  $L = +\infty$ .

## 10.7. Series absolutamente convergentes

1. Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  es convergente.
2. Calcular la suma  $S$  de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{b_0}{5^n} + \frac{b_1}{5^{n-1}} + \frac{b_2}{5^{n-1}} + \cdots + b_n \right),$$

sabiendo que  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  es absolutamente convergente con suma 3.

3. Demostrar el criterio de Cauchy:

Una serie de números reales  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  es convergente si, y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  natural tal que  $n \geq m \geq n_0 \Rightarrow |u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m| < \epsilon$ .

4. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

**Solución.** 1. La serie de los valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

que es una serie de Riemann con  $p = 2 > 1$ . La serie dada es por tanto absolutamente convergente, luego es convergente.

2. La serie dada es el producto de Cauchy de las series  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  y  $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/5^n$ . La primera es absolutamente convergente por hipótesis. La segunda es de términos positivos, geométrica y con suma  $1/(1 - 1/5) = 5/4$ , luego también es absolutamente convergente. En consecuencia,

$$S = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}.$$

3. Sea  $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ . Se verifica que para  $n \geq m$ ,

$$|S_n - S_{m-1}| = |u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m|,$$

por tanto, el teorema resulta del criterio de Cauchy para sucesiones.

4. Sea  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  absolutamente convergente. Sea  $\epsilon > 0$ . Por el criterio de Cauchy para series, existe  $n_0$  natural tal que

$$n \geq m \geq n_0 \Rightarrow |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_m| < \epsilon$$

$$= |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_m| < \epsilon.$$

Pero  $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m| \leq |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_m|$ , lo cual implica, de nuevo por el criterio de Cauchy, que la serie  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  es convergente.

## 10.8. Criterios de la raíz, cociente y Raabe

1. Usando el criterio de la raíz, analizar el carácter de las siguientes series de términos positivos:

$$1) \sum \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n. \quad 2) \sum \left( \frac{3n-1}{2n+1} \right)^{n+2}. \quad 3) \sum \frac{1}{n}.$$

2. Usando el criterio del cociente, analizar el carácter de las siguientes series de términos positivos:

$$1) \sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}. \quad 2) \sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}. \quad 3) \sum \frac{1}{n}. \quad 4) \sum \frac{n!}{3^n}.$$

3. Usando el criterio del cociente, analizar el carácter de las siguientes series de términos positivos:

$$1) \sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}. \quad 2) \sum \frac{5^n}{n!}. \quad 3) \sum \frac{n}{2^n}.$$

4. Usar el criterio del cociente, y después el de Raabe para analizar el carácter de la serie  $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$ .

5. Demostrar el criterio de la raíz:

Sea  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  una serie. Supongamos que  $\sqrt[n]{|u_n|}$  tiene límite  $L$ . Entonces: *i)* Si  $L < 1$ , la serie es absolutamente convergente. *ii)* Si  $L > 1$ , la serie es divergente.

6. Demostrar la regla de D'Alembert o criterio del cociente :

Sea  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  una serie. Supongamos que  $|u_{n+1}/u_n|$  tiene límite  $L$ . Entonces: *i)* Si  $L < 1$ , la serie es absolutamente convergente. *ii)* Si  $L > 1$ , la serie es divergente.

7. Demostrar que si para una serie el límite  $L$  correspondiente al criterio del cociente es 1, de este hecho no podemos deducir el carácter de la misma.

8. Demostrar que si para una serie el límite  $L$  correspondiente al criterio de la raíz es 1, de este hecho no podemos deducir el carácter de la misma.

9. Usando el criterio del cociente, analizar el carácter de las siguientes series de términos positivos:

$$1) \sum \frac{3^{2n-1}}{n^2 - n}. \quad 2) \sum \frac{(n+1)2^n}{n!}. \quad 3) \sum n \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

10. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series de términos positivos

$$1) \sum \frac{1}{n!}. \quad 2) \sum \frac{1}{(n+3)^2 - 2}. \quad 3) \sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}. \quad 4) \sum \frac{2n^2}{n^2 + 1}.$$

11. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series de términos positivos

$$1) \sum \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n. \quad 2) \sum \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^{n/2}. \quad 3) \sum \frac{n^3}{e^n}. \quad 4) \sum \frac{2^{n+1}}{n^n}.$$

12. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series de términos positivos

$$1) \sum \arcsen \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad 2) \sum \sen \frac{1}{n^2}. \quad 3) \sum \log \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad 4) \sum \frac{2^n n!}{n^n}.$$

13. Demostrar que si  $|a| < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \log n}{n+4}$  es absolutamente convergente.

**Solución.** 1. Al ser las series de términos positivos, tenemos en cada caso

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{\frac{1}{n}}.$$

$$1) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1 \text{ (convergente)}.$$

$$2) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{3n-1}{2n+1} \right)^{n+2} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n-1}{2n+1} \right)^{\frac{n+2}{n}} = \left( \frac{3}{2} \right)^1 = \frac{3}{2} > 1 \text{ (divergente)}.$$

$$3) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1. \text{ El criterio de la raíz no decide. No obstante, es la serie armónica, que sabemos que es divergente.}$$



2. Llamemos en cada caso  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n$ .

$$1) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{(\sqrt{2})^{n+1}} \frac{(\sqrt{2})^n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{2}(3n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ (convergente).}$$

$$2) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)(4n+1)} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1 \text{ (convergente).}$$

3)  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1$ . El criterio del cociente no decide. No obstante, es la serie armónica, que sabemos que es divergente.

$$4) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! 3^n}{3^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1 \text{ (divergente).}$$

3. Llamemos en cada caso  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n$ .

$$1) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)^2} = 0 < 1 \text{ (convergente).}$$

$$2) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1 \text{ (convergente).}$$

$$3) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \text{ (convergente).}$$

4. La serie es de términos positivos. Usando el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1 \text{ (caso dudoso).}$$

Usando el criterio de Raabe:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{2n+2}{2n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1,$$

luego la serie es divergente.

5. *i*) Como  $L < 1$ , consideremos un número  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Por definición de límite, para  $n$  suficientemente grande se verifica  $\sqrt[n]{|u_n|} < r$ , o de forma equivalente  $|u_n| < r^n$ . Como la serie de término general  $r^n$  es convergente (geométrica de razón un número en módulo menor que 1), se deduce

que la serie de término general  $|u_n|$  es convergente.

ii) Si  $L > 1$ , por definición de límite se verifica para  $n$  suficientemente grande  $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$ , o de forma equivalente  $|u_n| > 1$ . El límite de  $u_n$  no tiende a 0, luego la serie es divergente.

6. i) Como  $L < 1$ , consideremos un número  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Por definición de límite, para  $n$  suficientemente grande se verifica  $|u_{n+1}/u_n| < r$ . Si pérdida de generalidad, podemos suprimir un número finito de términos de la serie de tal manera que se verifique  $|u_{n+1}/u_n| < r$  para todo  $n$ . Tenemos pues

$$|u_n| = \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{u_2}{u_1} \right| \cdot |u_1| < |u_1| r^{n-1}.$$

Como  $r$  tiene valor absoluto menor que 1, la serie de término general  $|u_1| r^{n-1}$  es convergente (álgebra de series y teorema de convergencia de la serie geométrica). Por el criterio de comparación, la serie de término general  $|u_n|$  es convergente.

ii) Si  $L > 1$ , entonces para  $n$  suficientemente grande se verifica  $|u_{n+1}/u_n| > 1$ , o de forma equivalente  $|u_{n+1}| > |u_n|$ , luego el término general  $u_n$  no tiende a 0 y como consecuencia la serie es divergente.

7. En efecto, elijamos las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Los límites correspondientes al criterio del cociente son respectivamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} = 1,$$

sin embargo, la primera serie es divergente y la segunda convergente, según el conocido teorema acerca de las series de Riemann.

8. En efecto, elijamos las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Usando el conocido resultado  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ , obtenemos los límites correspondientes al criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n^{1/n})^2} = 1.$$

Sin embargo, la primera serie es divergente y la segunda convergente, según el conocido teorema acerca de las series de Riemann.

9. Llamemos en cada caso  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n$ .

$$1) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^2 - (n+1)} \frac{n^2 - n}{3^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9(n^2 - n)}{n^2 + n} = 9 > 1 \text{ (divergente).}$$

$$2) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+2)}{(n+1)^2} = 0 < 1 \text{ (convergente).}$$

$$3) L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \frac{n+1}{n} = \frac{3}{4} < 1 \text{ (convergente).}$$

10. 1) Usamos el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

La serie es convergente.

2) Usamos el criterio de comparación por cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+3)^2 - 2} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+3)^2 - 2} = 1 \neq 0.$$

La serie tiene el mismo carácter que  $\sum 1/n^2$  que es convergente.

3) Usamos el criterio de comparación por cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{16} \neq 0.$$

La serie tiene el mismo carácter que  $\sum 1/n^2$  que es convergente.

4) Usamos el teorema de la condición necesaria para la convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1} = 2 \neq 0,$$

por tanto la serie es divergente.

11. 1) Usamos el criterio de la raíz.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^n \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{3n+1} = \frac{4}{3} > 1.$$

La serie es divergente.

2) Usamos el criterio de la raíz.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{2n+1}{5n+2} \right)^{n/2} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{5n+2}} = \sqrt{\frac{2}{5}} < 1.$$

La serie es convergente.

3) Usamos el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{en^3} = \frac{1}{e} < 1.$$

La serie es convergente.

4) Usamos el criterio de la raíz.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2^{n+1}}{n^n} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{(n+1)/n}}{n} = \frac{2^1}{+\infty} = 0 < 1.$$

La serie es convergente.

12. 1) Usamos el criterio de comparación por cociente y que  $\arcsen x \sim x$  para  $x \rightarrow 0$ , lo cual implica que  $\arcsen 1/\sqrt{n} \sim 1/\sqrt{n}$  para  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsen 1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = 1 \neq 0,$$

por tanto la serie dada tiene el mismo carácter que la  $\sum 1/\sqrt{n} = \sum 1/n^{1/2}$ , que es divergente.

2) Usamos el criterio de comparación por cociente y que  $\sen x \sim x$  para  $x \rightarrow 0$ , lo cual implica que  $\sen 1/n^2 \sim 1/n^2$  para  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sen 1/n^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n^2}{1/n^2} = 1 \neq 0,$$

por tanto la serie dada tiene el mismo carácter que la  $\sum 1/n^2$ , que es convergente.

3) Usamos el criterio de comparación por cociente y que  $\log(1+x) \sim x$  si  $x \rightarrow 0$ , lo cual implica que  $\log(1+1/n) \sim 1/n$  para  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1 \neq 0,$$

por tanto la serie dada tiene el mismo carácter que la  $\sum 1/n$ , que es divergente.

4) Usamos el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Ahora bien,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \{1^{+\infty}\} = e^\lambda \text{ con } \lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} - 1 \right) n = e^{-1}.$$

Es decir,  $L = 2/e < 1$ , luego la serie es convergente.

13. Apliquemos el criterio del cociente.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a|^{n+1} \log(n+1)}{n+5} \frac{n+4}{|a|^n \log n} \\ &= |a| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4}{n+5} \frac{\log(n+1)}{\log n} = |a| \cdot 1 \cdot 1 = |a|. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $L = |a| < 1$  la serie es absolutamente convergente.

## 10.9. Criterio integral

1. Usando el criterio integral, estudiar el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ .
2. Usando el criterio integral, estudiar el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$ .

3. Demostrar el criterio integral:

Sea  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supongamos además que  $f$  es decreciente y positiva para  $x$  suficientemente grande. Entonces,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  es convergente  $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$  es convergente.

**Solución.** 1. Consideremos la función  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x/(x^2 + 1)$ . Esta función es elemental y está definida en todo  $\mathbb{R}$ , en consecuencia es continua en los reales y en particular en  $[1, +\infty)$ . Por otra parte,  $f$  es claramente positiva en  $[1, +\infty)$ .

Veamos ahora que es decreciente a partir de un  $x \geq 1$ . Derivando:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \leq 0 \text{ si } x \geq 1,$$

es decir  $f$  es decreciente en  $[1, +\infty)$ . De acuerdo con el criterio integral, la serie dada es convergente si, y sólo si es convergente la integral impropia  $\int_1^{+\infty} x dx / (x^2 + 1)$ . Ahora bien,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} [\log(x^2 + 1)]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} (+\infty - 0) = +\infty.$$

La integral es divergente, por tanto también es divergente la serie dada.

2. Consideremos la función  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{-x^2}$ . Esta función es elemental y está definida en todo  $\mathbb{R}$ , en consecuencia es continua en los reales y en particular en  $[1, +\infty)$ . Por otra parte,  $f$  es claramente positiva en  $[1, +\infty)$ .

Veamos ahora que es decreciente a partir de un  $x \geq 1$ . Derivando:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < 0 \text{ si } x \geq 1,$$

es decir  $f$  es decreciente en  $[1, +\infty)$ . De acuerdo con el criterio integral, la serie dada es convergente si, y sólo si es convergente la integral impropia  $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ . Ahora bien,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_1^{+\infty} = -\frac{1}{2}(0 - e^{-1}) = \frac{1}{2e}.$$

La integral es convergente, por tanto también es convergente la serie dada.

3. Podemos suponer para la demostración que  $f$  es positiva y decreciente para  $x \geq 1$ , de esta manera variará solamente un número finito de términos de la serie, lo cual no afecta a su carácter. Sea  $p \geq 1$  entero y llamemos  $u_n = f(n)$ . En el intervalo  $[p, p+1]$  se verifica

$$u_{p+1} = f(p+1) \leq f(x) \leq f(p) = u_p,$$

por tanto

$$\int_p^{p+1} u_{p+1} dx \leq \int_p^{p+1} f(x) dx \leq \int_p^{p+1} u_p dx,$$

e integrando,

$$u_{p+1} \leq \int_p^{p+1} f(x) dx \leq u_p.$$

Para  $p = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$u_2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq u_1$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &\leq \int_2^3 f(x) dx \leq u_2 \\
 &\dots \\
 u_n &\leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq u_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}.$$

La segunda desigualdad anterior demuestra que si la serie  $u_1 + u_2 + \dots$  es convergente, entonces  $\int_1^{+\infty} f(x) < +\infty$ , luego la integral es convergente. La primera desigualdad anterior demuestra que si la integral es convergente, entonces  $u_1 + u_2 + \dots < +\infty$ , luego la serie es convergente.

### 10.10. Convergencia de las series de Riemann

Se consideran la series de Riemann

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Analizar su convergencia usando el criterio integral y el teorema de la condición necesaria.

**Solución.** Para  $p \neq 1$  se verifica

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} + C.$$

*Primer caso:*  $p > 1$ . Entonces, la función  $f(x) = 1/x^p$  cumple evidentemente las hipótesis del criterio integral. Tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}.
 \end{aligned}$$

La integral es convergente, por tanto también lo es la serie.

*Segundo caso:*  $0 < p < 1$ . La función  $f(x) = 1/x^p$  cumple evidentemente las hipótesis del criterio integral. Procediendo de manera análoga al caso anterior:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} (+\infty - 1) = +\infty.$$

La integral es divergente, por tanto también lo es la serie.

*Tercer caso:*  $p = 1$ . También la función  $f(x) = 1/x$  cumple evidentemente las hipótesis del criterio integral. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log |x|]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b - \log 1) = +\infty - 0 = +\infty. \end{aligned}$$

La integral es divergente, por tanto también lo es la serie.

*Cuarto caso:*  $p \leq 0$ . En este caso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ +\infty & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

El límite del término enésimo de la serie no es 0, por tanto la serie es divergente. Concluimos pues que una serie de Riemann es convergente, si y sólo si,  $p > 1$ .

## 10.11. Series alternadas, criterio de Leibniz

1. Analizar la convergencia de las siguientes series alternadas:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}. \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2 + 5}.$$

2. Analizar la convergencia de las siguientes series alternadas. Si son convergentes, estudiar si la convergencia es absoluta o condicional.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{7n - 3}.$$

3. Analizar la convergencia absoluta y condicional de las series:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}. \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

4. Estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \log^2 k$ .

5. Si  $a_n$  es la raíz mayor y  $b_n$  la menor de  $x^2 - 2nx + 1 = 0$ , analizar el carácter de las series

$$1) \sum (-1)^n b_n. \quad 2) \sum \frac{1}{a_n}. \quad 3) \sum b_n^2. \quad 4) \sum e^{-(a_n+b_n)}.$$



**Solución.** 1. 1) Llamemos  $v_n = 1/n$ . Como,  $1/(n+1) < 1/n$ , la sucesión  $v_n$  es decreciente. Por otra parte,  $1/n \rightarrow 0$ . Por el criterio de Leibniz, la serie es convergente.

2) Llamemos  $v_n = 1/\sqrt{n}$ . Como,  $1/\sqrt{n+1} < 1/\sqrt{n}$ , la sucesión  $v_n$  es decreciente. Por otra parte,  $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ . Por el criterio de Leibniz, la serie es convergente.

3) La subsucesión de los términos pares tiene límite  $1/3$ , y la de los impares  $-1/3$ , luego el término general de la serie no tiende a 0. Como consecuencia, la serie es divergente.

2. 1) La serie es convergente según vimos en el ejercicio anterior. Tomando valores absolutos obtenemos la serie armónica, que es divergente. Por tanto, la serie es condicionalmente convergente.

2) Tomando valores absolutos obtenemos una serie de Riemann con  $p = 2 > 1$ , que es convergente, en consecuencia la serie dada es absolutamente convergente.

3) Claramente el término enésimo de la serie dada no tiene límite 0, luego es divergente.

3. 1) Llamemos  $v_n = (2n+1)/n(n+1)$ . Tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} v_{n+1} \leq v_n &\Leftrightarrow \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{2n+3}{n+2} \leq \frac{2n+1}{n} \\ &\Leftrightarrow 2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 5n + 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2n + 2, \end{aligned}$$

y la última desigualdad se cumple trivialmente para todo  $n$ , luego  $v_n$  es decreciente. Además, tiene límite 0, por tanto la serie dada es convergente (criterio de Leibniz).

Podemos comprobar fácilmente que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  de los valores absolutos es divergente comparando con la armónica, usando el criterio de comparación por cociente. Concluimos que la serie dada es condicionalmente convergente.

2) Usando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

luego la serie dada es absolutamente convergente.

3) Usando el criterio de la raíz:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n \right|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

luego la serie dada es absolutamente convergente.

4. Es una serie alternada. Veamos si cumple las hipótesis del criterio de Leibniz. Llamando  $u_k = \log^2 k/k$  tenemos:

i) La sucesión  $u_k$  es decreciente. Efectivamente, llamando  $f(x) = \log^2 x/x$ ,

$$f'(x) = \frac{(2 \log x) \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log^2 x}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}.$$

Si  $x = e^2$ , tenemos  $\log e^2 = 2 \log e = 2$ . Como la función logaritmo neperiano es creciente, se deduce que si  $x > e^2$  entonces  $\log x > 0$  y  $2 - \log x < 0$ , lo cual implica que  $f'(x) < 0$  si  $x > e^2$  y por tanto  $f$  es decreciente si  $x > e^2$ .

La sucesión es decreciente a partir de un cierto término (en concreto a partir del noveno pues  $9 > e^2$ ). Esto no afecta a la convergencia, pues según sabemos, se puede suprimir un número finito de términos.

ii) La sucesión  $u_k$  tiene límite 0. Efectivamente, elijamos la función auxiliar  $f(x) = \log^2 x/x$ . Usando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \log x) \cdot \frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0. \end{aligned}$$

Como consecuencia, la sucesión  $u_k$  tiene límite 0. Deducimos del criterio de Leibniz que la serie dada es convergente.

5. Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 4}}{2} = \frac{2n \pm 2\sqrt{n^2 - 1}}{2} = n \pm \sqrt{n^2 - 1},$$

por tanto  $a_n = n + \sqrt{n^2 - 1}$  y  $b_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$ .

1)  $\sum (-1)^n b_n$  es una serie alternada, veamos que se verifican las hipótesis del criterio de Leibniz.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = 0.$$

Por otra parte,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n + 1 + \sqrt{(n + 1)^2 - 1}} - \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0,$$

lo cual implica que  $b_n$  es decreciente. La serie dada es convergente.

2)  $\sum \frac{1}{a_n} = \sum \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$  es serie de términos positivos. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = 1 \neq 0,$$

y la serie de términos positivos  $\sum \frac{1}{n}$  es divergente. Por el criterio de comparación por cociente, la serie  $\sum \frac{1}{a_n}$  es divergente.

3)  $\sum b_n^2 = \sum (n - \sqrt{n^2 - 1})^2$  es serie de términos positivos. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\sum b_n^2 = \sum \frac{1}{(n + \sqrt{n^2 - 1})^2}.$$

Ahora bien,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n + \sqrt{n^2 - 1})^2} : \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

y la serie de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  es convergente, luego también lo es  $\sum b_n^2$  como consecuencia del criterio de comparación por cociente.

4) Como  $a_n + b_n = 2n$ , la serie dada es:

$$\sum e^{-(a_n + b_n)} = \sum e^{-2n} = \sum \left(\frac{1}{e^2}\right)^n,$$

y  $1/e^2 < 1$  luego  $\sum e^{-(a_n + b_n)}$  es convergente por el conocido teorema sobre la convergencia de series geométricas.

## 10.12. Series telescópicas

1. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \arctan \frac{1}{n+1} - \arctan \frac{1}{n} \right)$ .

2. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

3. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}$ .

4. Demostrar que si  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es telescópica con  $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1)$ , su suma es

$$S = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) \right) - \varphi(0),$$

en el supuesto de que exista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n)$ .

5. Sea la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y supongamos que existe una función  $\varphi$  tal que  $u_n = \varphi(n+2) - \varphi(n)$  para todo  $n$ . Demostrar que la suma de la serie es

$$S = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2)),$$

en el supuesto de que exista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n)$ .

6. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-1}{n+1} - \arctan n + \arctan(n+1) \right)$ .

7. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2 + 5n + 6}$ .

8. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{(2n-1)(2n+1)}$ .

9. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-3}{n^2 + 5n + 4}$ .

10. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+q)}$ , siendo  $q$  un entero positivo.

11. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \log \frac{n^2}{n^2 - 1}$ .

12. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

**Solución.** Recordamos que una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  se dice que es *telescópica* si existe una función  $\varphi$  definida en  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  tal que:

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \quad \forall n \geq 1.$$

Se verifica:

**Teorema.** (Suma de una serie telescópica). Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es telescópica con  $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1)$ , su suma es

$$S = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) \right) - \varphi(0),$$

en el supuesto de que exista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n)$ .

**Teorema.** (Generalización del teorema anterior). Sea la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y supongamos que existe una función  $\varphi$  tal que  $u_n = \varphi(n+q) - \varphi(n)$  para todo  $n$ , con  $q$  número natural. Entonces, la suma de la serie es

$$S = q \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(q)),$$

en el supuesto de que exista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n)$ .

1. Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \text{ con } \varphi(n) = \arctan \frac{1}{n+1},$$

por tanto la suma de la serie telescópica dada es

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{n+1} - \varphi(0) = \arctan 0 - \arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

2. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \text{ con } \varphi(n) = -\frac{1}{n+1},$$

por tanto la suma de la serie telescópica dada es

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} - \varphi(0) = 0 + 1 = 1.$$

3. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{n^2 + 4n} = \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1/4}{n} - \frac{1/4}{n+4}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n+4) - \varphi(n) \text{ con } \varphi(n) = \frac{-1/4}{n},$$

por tanto la suma de la serie es

$$\begin{aligned} S &= 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4)) \\ &= 0 - \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \right) = \frac{25}{48}. \end{aligned}$$

4. Tenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(1) - \varphi(0), \\ u_2 &= \varphi(2) - \varphi(1), \\ u_3 &= \varphi(3) - \varphi(2), \\ &\dots \\ u_n &= \varphi(n) - \varphi(n-1). \end{aligned}$$

La suma  $S$  de la serie es por tanto

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(n) - \varphi(0)) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) \right) - \varphi(0).$$

5. Podemos expresar

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(3) - \varphi(1), \\ u_2 &= \varphi(4) - \varphi(2), \\ u_3 &= \varphi(5) - \varphi(3), \\ u_4 &= \varphi(6) - \varphi(4), \\ &\dots \\ u_{n-1} &= \varphi(n+1) - \varphi(n-1), \\ u_n &= \varphi(n+2) - \varphi(n). \end{aligned}$$

Efectuando las correspondientes cancelaciones:

$$S_n = \varphi(n+2) + \varphi(n+1) - \varphi(1) - \varphi(2).$$

La suma de la serie es

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n+2) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n+1) - (\varphi(1) + \varphi(2))$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2)).$$

6. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n},$$

por tanto el término general  $u_n$  se puede escribir en la forma

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \text{ con } \varphi(n) = \frac{1}{n+1} + \arctan(n+1).$$

Se trata pues de una serie telescópica cuya suma es

$$\begin{aligned} S &= \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) \right) - \varphi(0) = (0 + \arctan(+\infty)) - (1 + \arctan 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1. \end{aligned}$$

7. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{-1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \text{ con } \varphi(n) = \frac{1}{n+3},$$

por tanto la suma de la serie serie telescópica dada es

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} - \varphi(0) = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

8. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{7}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{7/2}{2n-1} - \frac{7/2}{2n+1}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \text{ con } \varphi(n) = \frac{-7/2}{2n+1},$$

por tanto la suma de la serie serie telescópica dada es

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7/2}{2n+1} - \varphi(0) = 0 - \left( -\frac{7}{2} \right) = \frac{7}{2}.$$

9. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{-3}{n^2 + 5n + 4} = \frac{-3}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+1}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n+3) - \varphi(n) \text{ con } \varphi(n) = \frac{1}{n+1},$$

por tanto la suma de la serie es

$$\begin{aligned} S &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)) \\ &= 0 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{13}{12}. \end{aligned}$$

10. Descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{n(n+q)} = \frac{1/q}{n} - \frac{1/q}{n+q}.$$

Podemos expresar el término enésimo en la forma

$$u_n = \varphi(n+q) - \varphi(n) \text{ con } \varphi(n) = \frac{-1/q}{n},$$

por tanto la suma de la serie es

$$\begin{aligned} S &= q \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) - (\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(q)) \\ &= \frac{1}{q} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

11. El término enésimo  $u_n$  es

$$\begin{aligned} u_n &= \log \frac{n^2}{n^2-1} = -\log \frac{n^2-1}{n^2} = -\log \frac{n+1}{n} \frac{n-1}{n} \\ &= -\log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n-1}{n} = \log \frac{n}{n-1} - \log \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u_2 &= \log 2 - \log \frac{3}{2}, \\ u_3 &= \log \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3}, \\ u_4 &= \log \frac{4}{3} - \log \frac{5}{4}, \end{aligned}$$



...

$$u_n = \log \frac{n}{n-1} - \log \frac{n+1}{n},$$

y la suma parcial enésima es

$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \log 2 - \log \frac{n+1}{n}.$$

La suma  $S$  de la serie es por tanto

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \log 2 - \log \frac{n+1}{n} \right) = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

12. Tenemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+2)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

La serie dada tiene por término general

$$u_n = \frac{n!}{2^n \cdot \frac{(n+2)!}{2^{n+1}}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}.$$

$$u_1 = 1 - \frac{2}{3},$$

$$u_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{4},$$

$$u_3 = \frac{2}{4} - \frac{2}{5},$$

...

$$u_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}.$$

La suma  $S$  de la serie es por tanto

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{n+2} \right) = 1 - 0 = 1.$$

### 10.13. Series hipergeométricas

1. Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  es hipergeométrica y hallar su suma.

2. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ .

3. Sea  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie hipergeométrica. Demostrar que:

i) Si  $\alpha + \beta < \gamma$ , la serie es convergente con suma  $S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)}$ .

ii) Si  $\alpha + \beta \geq \gamma$ , la serie es divergente.

4. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ .

5. Dada la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)} \quad (a > 0),$$

analizar su carácter según los valores de  $a$ , y hallar la suma cuando sea convergente.

**Solución.** Recordamos que una serie de términos positivos  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  se dice que es *hipergeométrica* cuando

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \quad \text{con } \alpha > 0 \text{ y } \gamma \neq 0.$$

Además, si  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie hipergeométrica se verifica

i) Si  $\alpha + \beta < \gamma$ , la serie es convergente con suma  $S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)}$ .

ii) Si  $\alpha + \beta \geq \gamma$ , la serie es divergente.

1. Se verifica

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+2} = \frac{1 \cdot n + 0}{1 \cdot n + 2}.$$

Como  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  y  $\gamma = 2$ , la serie es claramente hipergeométrica. Además,  $\alpha + \beta < \gamma$  y por tanto es convergente de suma:

$$S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)} = \frac{2(1/2)}{2 - (1 + 0)} = 1.$$

Nota. Está serie ya se sumó como telescópica.

2. Se verifica

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} : \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{2n-1}{2n+5} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$  y  $\gamma = 5$ , la serie es claramente hipergeométrica. Además,  $\alpha + \beta < \gamma$  y por tanto es convergente de suma:

$$S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)} = \frac{5(1/15)}{5 - (2 - 1)} = \frac{1}{12}.$$

3. *i*) Apliquemos el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{\gamma - \beta}{\alpha n + \gamma} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha + \beta < \gamma$ , entonces  $\alpha < \gamma - \beta$ , luego  $L = (\gamma - \beta)/\alpha > 1$  y la serie es convergente. Hallemos en este caso su suma. Dando valores  $k = 1, 2, \dots, n-1$  en la relación  $u_{k+1}(\alpha k + \gamma) = u_k(\alpha k + \beta)$ , y añadiendo la igualdad trivial  $u_n(n\alpha + \beta) = u_n(n\alpha + \beta)$ :

$$\begin{aligned} u_2(\alpha + \gamma) &= u_1(\alpha + \beta) \\ u_3(2\alpha + \gamma) &= u_2(2\alpha + \beta) \\ u_4(3\alpha + \gamma) &= u_3(3\alpha + \beta) \\ &\dots \\ u_n((n-1)\alpha + \gamma) &= u_{n-1}((n-1)\alpha + \beta) \\ u_n(n\alpha + \beta) &= u_n(n\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades anteriores y agrupando, obtenemos

$$\gamma(S_n - u_1) + (\alpha n + \beta)u_n = (\alpha + \beta)S_n,$$

en donde  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Despejando  $S_n$ :

$$S_n = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)} - \frac{u_n(\alpha n + \beta)}{\gamma - (\alpha + \beta)}.$$

Como la serie es convergente, existe  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , luego también existe el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{u_n(\alpha n + \beta)}{\gamma - (\alpha + \beta)}.$$

Veamos que  $a_n$  tiene límite nulo. En efecto, si  $a_n \rightarrow a \neq 0$ , usando la igualdad anterior,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( u_n : \frac{1}{\alpha n + \beta} \right) = (\gamma - (\alpha + \beta)) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (\gamma - (\alpha + \beta)) a \neq 0,$$

y la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  tendría el mismo carácter que  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(\alpha n + \beta)$  que es divergente (contradicción). Podemos pues concluir que

$$S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)}, \quad (\alpha + \beta < \gamma).$$

ii) Si  $\alpha + \beta > \gamma$ , entonces  $\alpha > \gamma - \beta$ , luego el límite  $L$  asociado al criterio de Raabe que calculamos en el apartado anterior es  $L = (\gamma - \beta)/\alpha < 1$ , es decir la serie es divergente.

Falta analizar el caso  $\alpha + \beta = \gamma$ . En este caso, la igualdad del apartado anterior

$$\gamma(S_n - u_1) + (\alpha n + \beta)u_n = (\alpha + \beta)S_n$$

implica que

$$u_n = \frac{\gamma u_1}{\alpha n + \beta},$$

y por tanto la serie es divergente.

4. Se verifica

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} : \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+2}{n+4} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}.$$

Como  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  y  $\gamma = 4$ , la serie es claramente hipergeométrica. Además,  $\alpha + \beta < \gamma$  y por tanto es convergente de suma:

$$S = \frac{\gamma u_1}{\gamma - (\alpha + \beta)} = \frac{4(1/12)}{4 - (1 + 2)} = \frac{1}{3}.$$

5. La serie es de términos positivos. Usando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)(a+n)} : \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{n!} \\ &= \frac{n+1}{n+a} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+a} = 1 \text{ (caso dudoso)}. \end{aligned}$$

Aplicamos el criterio de Raabe:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{a-1}{n} = a-1.$$

La serie es convergente si  $a > 2$ , divergente si  $0 < a < 2$ , y caso dudoso si  $a = 2$ . En este último caso, la serie es

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1},$$

que claramente es divergente, basta compararla por cociente con la serie armónica. Hallemos la suma de la serie para  $a > 2$ . Podemos expresar

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)} = -\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}$$

y dado que  $u_{n+1}/u_n = (n+1)/(n+a)$ , la última serie es hipergeométrica con  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  y  $\gamma = a > 2$ . La suma  $S$  de la serie es por tanto

$$S = -\frac{1}{a} + \frac{a(1/a)}{a-(1+1)} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a-2} = \frac{2}{a(a-2)} \quad (a > 2).$$

### 10.14. Series aritmético-geométricas

1. Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{3^n}$ .

2. Siendo  $|r| < 1$ , demostrar que

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} cr^n = \frac{c}{1-r}. \quad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} (an+b)r^n = \frac{b}{1-r} + \frac{ar}{(1-r)^2}.$$

**Solución.** Recordamos que se llama serie *aritmético-geométrica* a toda serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{k^n} \text{ con } P \text{ polinomio real y } k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Al número  $r = 1/k$  se le llama *razón* de la serie aritmético-geométrica. Se verifica:

i) Si  $P(n) = c$  constante, la suma de la serie es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} cr^n = \frac{c}{1-r}, \quad (|r| < 1).$$

ii) Si  $P(n) = an + b$ , la suma de la serie es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (an + b)r^n = \frac{b}{1-r} + \frac{ar}{(1-r)^2}, \quad (|r| < 1).$$

1. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{3^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+5) \left(\frac{1}{3}\right)^n = -5 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+5) \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= -5 + \frac{5}{1-1/3} + \frac{2(1/3)}{(1-1/3)^2} = 4. \end{aligned}$$

2. i) Usando el teorema del álgebra de series y el teorema relativo a la suma de series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} cr^n = c \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = c \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{c}{1-r}.$$

ii) Es inmediato comprobar que la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} nr^n$  es convergente (criterio del cociente). Usando el teorema del álgebra de series:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (an + b)r^n = a \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = a \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n + \frac{b}{1-r}.$$

Llamemos  $H$  a la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} nr^n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} H &= r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \dots, \\ rH &= r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + \dots, \end{aligned}$$

y restando a la primera igualdad la segunda, queda

$$\begin{aligned} H(1-r) &= r + r^2 + r^3 + \dots = -1 + (1 + r + r^2 + r^3 + \dots) \\ &= -1 + \frac{1}{1-r} = \frac{r}{1-r}, \text{ por tanto } H = \frac{r}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (an + b)r^n = \frac{b}{1-r} + \frac{ar}{(1-r)^2}.$$

### 10.15. Series con factoriales en el denominador

1. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 2n + 6}{(n+2)!}$ .
2. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n!}$ .
3. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{(n+5)!}$ .

**Solución.** Consideremos las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n+a)!} \text{ con } a \in \mathbb{N} \text{ y } P \text{ polinomio de grado } k.$$

Para hallar la suma de estas series, podemos expresar el numerador de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P(n) = & A_k \underbrace{(n+a)(n+a-1)\dots}_{k \text{ factores}} + A_{k-1} \underbrace{(n+a)(n+a-1)\dots}_{k-1 \text{ factores}} \\
 & + \dots + A_2 \underbrace{(n+a)(n+a-1)}_{2 \text{ factores}} + A_1 \underbrace{(n+a)}_{1 \text{ factor}} + A_0.
 \end{aligned}$$

Los coeficientes indeterminados  $A_0, A_1, \dots, A_k$  se pueden determinar dando a  $n$  los valores  $-a, -(a-1)$ , etcétera. Un vez descompuesto  $P(n)$  en la forma mencionada, expresamos la serie en suma de varias, cancelamos factores en numeradores y denominadores, y aplicamos la fórmula que determina al número  $e$  como suma de una serie:

$$e = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}.$$

1. Descomponemos el numerador en la forma

$$3n^2 + 2n + 6 = A_2(n+2)(n+1) + A_1(n+2) + A_0.$$

Trivialmente,  $A_2 = 3$ , y dando a  $n$  los valores  $-2$  y  $-1$  obtenemos  $A_1 = -7$  y  $A_0 = 14$ . Usando el teorema del álgebra de series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 2n + 6}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(n+2)(n+1) - 7(n+2) + 14}{(n+2)!}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!} + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} \\
&= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 7 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} + 14 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} \\
&= 3 \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) - 7 \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) \\
&+ 14 \left( \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \right) = 3(e-1) - 7(e-2) + 14(e-5/2) \\
&= 10e - 24.
\end{aligned}$$

2. Descomponemos el numerador en la forma

$$n^2 + 5n + 1 = A_2 n(n-1) + A_1 n + A_0.$$

Trivialmente,  $A_2 = 1$ , y dando a  $n$  los valores 0 y 1 obtenemos  $A_1 = 6$  y  $A_0 = 1$ . Usando el teorema del álgebra de series:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1) + 6n + 1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \left( 0 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) + 6 \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\
&+ \left( \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) = e + 6e + e - 1 = 8e - 1.
\end{aligned}$$

3. Descomponemos el numerador en la forma

$$2n^2 + 3n + 1 = A_2(n+5)(n+4) + A_1(n+5) + A_0.$$

Trivialmente,  $A_2 = 2$ , y dando a  $n$  los valores  $-5$  y  $-4$  obtenemos  $A_1 = -15$  y  $A_0 = 36$ . Usando el teorema del álgebra de series:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{(n+5)!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(n+5)(n+4) - 15(n+5) + 36}{(n+5)!} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+5)(n+4)}{(n+5)!} - 15 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+5)}{(n+5)!} + 36 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+5)!}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!} - 15 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)!} + 36 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+5)!} \\
 &= 2 \left( \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \right) - 15 \left( \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots \right) + 36 \left( \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots \right) \\
 &= 2 \left( e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) - 15 \left( e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) \\
 &\quad + 36 \left( e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 23e - \frac{7501}{120}.
 \end{aligned}$$

### 10.16. Suma de series numéricas por desarrollos en serie de funciones

1. Hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \dots + \frac{(-1)^n}{n2^n} + \dots$$

2. Hallar la suma de las siguientes series, usando para ello desarrollos en serie conocidos.

$$1) 2 + \frac{8}{6} + \frac{32}{120} + \frac{128}{5040} + \dots \quad 2) 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{720} + \dots$$

3. Hallar la suma de las siguientes series, usando para ello desarrollos en serie conocidos.

$$1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{3^{n+1}(2n+1)} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$$

4. Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+e}{n!} \cdot 2^n$ .

**Solución.** Recordemos que se verifican las igualdades:

$$\begin{aligned}
 1) e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$4) \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$5) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$6) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| < 1).$$

$$7) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \quad (\forall x \in (-1, 1]).$$

$$8) \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

$$= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \quad (\forall x \in [-1, 1)).$$

$$9) (1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} x^k \quad (p \in \mathbb{R} \text{ y } |x| < 1).$$

1. La podemos expresar en la forma

$$1/2 - \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(1/2)^4}{64} + \cdots + \frac{(-1)^n (1/2)^n}{n} + \cdots.$$

Ahora bien,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \cdots \quad (\forall x \in (-1, 1]),$$

por tanto

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \dots + \frac{(-1)^n}{n2^n} + \dots = \log(1 + 1/2) = \log \frac{3}{2}.$$

2. Tenemos

$$1) 2 + \frac{8}{6} + \frac{32}{120} + \frac{128}{5040} + \dots = \frac{2}{1!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \dots = \sinh 2.$$

$$2) \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{4!} + \frac{1^4}{6!} + \dots = \cosh 1.$$

3. Tenemos

$$1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots = \log(1 + 1) = \log 2.$$

$$2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{3^{n+1}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{-1/2} 3^{n+1}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{(2n+1)/2}(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1/\sqrt{3})^{2n+1}}{2n+1} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

4. Podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+e}{n!} \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \cdot 2^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e \cdot 2^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \cdot 2^{n-1} + e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Por otra parte,  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , por tanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+e}{n!} \cdot 2^n = 2e^2 + e \cdot e^2 = 2e^2 + e^3.$$

### 10.17. El número $e$ es irracional

Se sabe que número  $e$  de Euler se define como el límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

y que dicho número se puede expresar como la suma de una serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}. \quad (*)$$

1. Sea  $s_n$  la suma parcial  $n$ -ésima de la serie que aparece en (\*). Demostrar que

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n! n} \quad (\forall n \geq 1).$$

2. Supongamos que  $e = p/q$  con  $p$  y  $q$  enteros positivos. Demostrar que  $q!(e - s_q)$  es un número entero.

3. Usando la desigualdad del primer apartado, demostrar que

$$0 < q!(e - s_q) < 1.$$

4. ¿Qué conclusión se deduce de los dos apartados anteriores?

**Solución.** 1. La sucesión  $s_n$  es de términos positivos y estrictamente creciente, en consecuencia  $s_n < e$  para todo  $n$  o equivalentemente  $0 < e - s_n$  para todo  $n$ . Por otra parte:

$$\begin{aligned} e - s_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Para  $n \geq 1$  se verifica  $|1/(n+1)| < 1$  y por tanto la serie geométrica que aparece es convergente:

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}.$$

De esta manera, obtenemos:

$$e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n! n} \quad (\forall n \geq 1). \quad (1)$$

2. De la hipótesis  $e = p/q$  con  $p$  y  $q$  enteros positivos deducimos que  $q!e = q!(p/q)$  es entero. Por otra parte:

$$q!s_q = q! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right).$$

es claramente, un número entero, con lo cual  $q!(e - s_q) = q!e - q!s_q$  también es entero.

3. De la igualdad (1) deducimos

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

4. Si fuera  $e = p/q$  con  $p$  y  $q$  enteros positivos, es decir si  $e$  fuera un número racional, se deduciría que el número entero  $q!(e - s_q)$  estaría comprendido entre 0 y 1, lo cual es absurdo. Por tanto,  $e$  es un número irracional.

### 10.18. Suma de una serie a partir de la de Basilea

Hallamos la suma de una serie a partir de la de Basilea  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Se considera la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$ .

(a) Demostrar que es convergente.

(b) Hallar su suma sabiendo que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Solución.** (a) La serie dada es de términos positivos. Además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} : \frac{1}{n^3} \right) = 1.$$

De acuerdo con el criterio de comparación por cociente, la serie dada tiene el mismo carácter que la  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ , siendo ésta convergente. La serie dada es por tanto convergente.

(b) Efectuemos la descomposición

$$\frac{2x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}. \quad (1)$$

Operando, podemos expresar (1) en la forma:

$$\frac{2x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2}{x^2(x+1)^2}. \quad (2)$$

Igualando numeradores en (2) y particularizando  $x = 0$  y  $x = -1$  obtenemos los valores  $B = -1$  y  $D = -3$ . Sustituyendo estos valores e identificando coeficientes, obtenemos un sistema que proporciona los valores  $A = 4$  y  $C = -4$ . La igualdad (2) es una igualdad de funciones válida para todo

$x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ , en consecuencia es válida para todo natural  $n \geq 1$ . Podemos por tanto expresar

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n+1} - \frac{3}{(n+1)^2}. \quad (3)$$

Sea  $S_n$  la suma parcial enésima de la serie dada y  $T_n$  la de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ . Entonces, usando (3) :

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &- \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) - 3 \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= 4 - \frac{4}{n+1} - 4T_n + 3 - \frac{3}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

La suma  $S$  pedida es por tanto:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 7 - \frac{4\pi^2}{6} = \frac{21 - 2\pi^2}{3}.$$

## 10.19. Producto de Cauchy de series, contraejemplo

*Demostramos que el producto de Cauchy de dos series convergentes no es en general convergente.*

Sabido es que para dos series de números reales  $\sum_{n \geq 0} u_n$  y  $\sum_{n \geq 0} v_n$  absolutamente convergentes, de sumas  $U$  y  $V$  respectivamente, las serie producto de Cauchy

$$\sum_{n \geq 0} w_n, \text{ en donde } w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

es absolutamente convergente de suma  $UV$ . Demostrar que no es cierto en general que si la convergencia de las series no es absoluta, su producto de Cauchy no tiene por qué ser convergente. Para ello, efectuar el producto de Cauchy de la siguiente serie por ella misma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

**Solución.** Usando el criterio de Leibniz para series alternadas fácilmente comprobamos que la serie dada es convergente. Por otra parte,  $\sqrt{n+1}/n^{1/2} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$  lo cual implica por el criterio de comparación por cociente que la serie no es absolutamente convergente. Hallemos el producto de Cauchy de la serie por ella misma. Tenemos:

$$w_n = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i (-1)^j}{\sqrt{i+1} \sqrt{j+1}} = (-1)^n \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}}.$$

Para todo par de números reales  $A, B$  se verifica  $AB = (1/4)[(A+B)^2 - (A-B)^2]$  por tanto

$$(i+1)(n-i+1) = \frac{1}{4}((n+2)^2 - (n-2i)^2) \leq \frac{1}{4}(n+2)^2.$$

Esto implica

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \geq (n+1) \frac{2}{n+2} \rightarrow 2 \quad (\text{si } n \rightarrow \infty).$$

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$  y la serie producto de Cauchy no es convergente.





# Capítulo 11

## Series funcionales

### 11.1. Límite puntual

1. Se considera la sucesión de funciones  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$ . Determinar la función límite puntual.

2. Se considera la sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{-n^2 x^2}$ . Determinar la función límite puntual.

3. Se considera la sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$ . Determinar la función límite puntual.

**Solución.** Supongamos que tenemos una sucesión de funciones reales  $f_1, f_2, \dots$  definidas en un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}$ . Sea

$$S' = \{x \in S : f_n(x) \text{ es convergente}\}.$$

Queda así definida una función

$$f : S' \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

A la función  $f$  se la llama *función límite puntual* de la sucesión  $f_n$ , y escribimos  $f_n \rightarrow f$  en  $S'$ .

1. Si  $|x| < 1$ ,  $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$  por una conocida propiedad de límites de sucesiones. Si  $x = 1$ ,  $1^n = 1$  y por tanto,  $f_n(1) \rightarrow 1$ . Si  $x = -1$ ,  $f_n(-1) = (-1)^n$  que es una sucesión oscilante. En consecuencia, la función límite puntual es

$$f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2. Si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = 1 \rightarrow 1$ . Si  $x \neq 0$ ,  $e^{n^2x^2} \rightarrow +\infty$  y por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2x^2}} = 0$$

En consecuencia, la función límite puntual es

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. Si  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ . Si  $x \neq 0$ ,  $1 + nx^2 \rightarrow +\infty$  y por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx^2} = x \cdot 0 = 0$$

En consecuencia, la función límite puntual es

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## 11.2. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

1. Demostrar que la sucesión de funciones

$$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

converge puntualmente en  $(-1, 1)$  pero no uniformemente.

2. Se considera la sucesión de funciones:

$$f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-n^2x^2}.$$

Determinar la función límite puntual  $f$  y analizar si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.

3. Demostrar que la sucesión de funciones  $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$  converge uniformemente hacia la función nula en el intervalo  $(0, 1)$ .

4. Sea  $I$  un intervalo de la recta real y  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a la función  $f$  en  $I$ . Demostrar que  $f$  es continua.

5. Demostrar que que la sucesión de funciones  $f_n : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$  no converge uniformemente.

6. Mostrar con un ejemplo que una sucesión de funciones  $f_n$  puede converger a una función continua sin que la convergencia sea uniforme.

7. Sea  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a la función  $f$  en  $[a, b]$ . Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

8. Se considera la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ . Comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Esto prueba que en general las operaciones límite e integración no se pueden intercambiar.

9. Sea  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones derivables con derivada continua en  $[a, b]$  (es decir  $f_n \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ). Supongamos que se verifica

(i)  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $[a, b]$ .

(ii)  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente en  $[a, b]$ .

Demostrar que  $g$  admite derivada continua y además  $f' = g$  en  $[a, b]$ .

10. Demostrar el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme:

Sea  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo y  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones. Entonces,  $f_n$  converge uniformemente a un límite  $f$  en  $I$  si, y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que  $m, n \geq n_0$  implica  $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in I$ .

**Solución.** 1. Dado que  $|x| < 1$ , se verifica  $x^n \rightarrow 0$  y por tanto  $f_n$  converge puntualmente en  $(-1, 1)$  a la función nula. Veamos que la convergencia no es uniforme. Elijamos  $0 < \epsilon < 1$  y supongamos que existe  $n_0$  natural tal que  $|x^n - 0| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$  y para todo  $x \in (-1, 1)$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $\log |x| < 0$ :

$$|x^n| < \epsilon \Leftrightarrow |x|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \log |x| < \log \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \epsilon}{\log |x|}.$$

Ahora bien, si  $x \rightarrow 1$ ,  $\log |x| \rightarrow 0$  y por tanto  $\log \epsilon / \log |x| \rightarrow +\infty$  (pues  $\log \epsilon < 0$ ). Esto es una contradicción pues para cualquier  $n \geq n_0$  podemos elegir valores de  $x \in (-1, 1)$  que cumplan  $|x^n| \not< \epsilon$ . La convergencia no es uniforme.

2. Como  $-n^2x^2 \rightarrow -\infty$  para todo  $x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$  y por tanto la función límite puntual es la función nula. Veamos que la convergencia no es uniforme. Elijamos  $0 < \epsilon < 1$  y supongamos que existe  $n_0$  natural tal que  $|e^{-n^2x^2} - 0| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$  y para todo  $x \in (0, +\infty)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |e^{-n^2x^2} - 0| < \epsilon &\Leftrightarrow e^{-n^2x^2} < \epsilon \Leftrightarrow -n^2x^2 < \log \epsilon \\ &\Leftrightarrow n^2x^2 > -\log \epsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{-\log \epsilon}{x}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $x \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{(-\log \epsilon)/x} \rightarrow +\infty$ . Esto es una contradicción pues para cualquier  $n \geq n_0$  podemos elegir valores de  $x \in (0, +\infty)$  que cumplan  $e^{-n^2x^2} \not< \epsilon$ . La convergencia no es uniforme.

3. Sea  $\epsilon > 0$ . Tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 0| < \epsilon &\Rightarrow \frac{x}{nx + 1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{x}{\epsilon} < nx + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\epsilon} - 1 < nx \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{x} < n. \end{aligned}$$

Como  $x \in (0, 1)$ ,  $1/x > 1$  lo cual implica que  $1/\epsilon - 1/x < 1/\epsilon - 1$ . Entonces, eligiendo  $n_0$  natural tal que  $n_0 > 1/\epsilon - 1$ , se verifica  $|f_n(x) - 0| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$  y para todo  $x \in (0, 1)$ . Concluimos que  $f_n \rightarrow 0$  en  $(0, 1)$  uniformemente.

4. Sea  $x_0 \in I$  genérico. Demostremos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por ser  $f_n$  continua en  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3 \text{ si } |x - x_0| < \delta.$$

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $[a, b]$  existe un  $n_0$  natural tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3 \text{ si } n \geq n_0 \text{ y } \forall x \in I,$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3 \text{ si } n \geq n_0.$$

Sumando y restando  $f_n(x)$  y  $f_n(x_0)$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es continua para todo  $x_0 \in I$ , luego es continua en  $I$ .

5. Las funciones  $f_n$  son continuas en  $(-1, 1]$  y vimos en otro ejercicio que la función límite puntal es

$$f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

que no es continua. En consecuencia la convergencia no puede ser uniforme.

6. Vimos en otro ejercicio que la sucesión de funciones  $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$  converge no uniformemente a la sucesión nula (que es continua).

7. La integral  $\int_a^b f(x) dx$  existe pues sabemos que  $f$  ha de ser continua en  $[a, b]$ . Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente existe  $n_0$  natural tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a} \text{ si } n \geq n_0 \text{ y } \forall x \in [a, b].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

8. Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2nx) e^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2} \left[ e^{-nx^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e^{-n} - 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $f_n(0) = 0$  y  $f_n(x) = nx/e^{nx^2} \rightarrow 0$  en  $(0, 1]$  pues el numerador es infinito de orden menor que el denominador. La función límite puntal es la función nula y por tanto,

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

9. Las funciones  $f_n(x)$  y  $f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$  tienen la misma derivada en  $[a, b]$  por tanto

$$f_n(x) = K + f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad (K \text{ constante}). \quad (1)$$

Haciendo  $x = a$  obtenemos  $K = 0$ , es decir

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

Como  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente,

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

Tomando límites en (1) cuando  $n \rightarrow \infty$  :

$$f(x) = f_n(a) + \int_a^x g(t) dt. \quad (2)$$

La función  $g$  es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. Derivando la igualdad (2) obtenemos  $g' = f$ .

10. Supongamos que  $f_n$  tiende uniformemente hacia una función  $f$  en  $I$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Existe  $n_0$  número natural tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2 \quad \forall x \in I.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 &\Rightarrow \begin{cases} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon/2 \\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2 \end{cases} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \quad \forall x \in I \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica la condición del enunciado. Por el criterio de Cauchy ordinario, para todo  $x \in I$  la sucesión numérica  $f_n(x)$  tiene como límite un número al que llamaremos  $f(x)$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por hipótesis existe un número natural  $n_0$  tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon/2 \quad \forall x \in I.$$

Fijemos  $x$  en  $I$  y  $n \geq n_0$ . La igualdad anterior es válida para todo  $m \geq n_0$ , por tanto tomando límites cuando  $m \rightarrow \infty$  :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon \quad \forall n \geq n_0. \quad \forall x \in I.$$

Es decir,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.

### 11.3. Teorema de Dini

1. Demostrar el teorema de Dini:

Sea  $(E, d)$  un espacio métrico compacto y  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones continuas (monótona creciente o monótona decreciente). Entonces, si  $f_n \rightarrow f$  en  $E$  y  $f$  es continua, la convergencia es uniforme.

2. Se considera la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida de forma recurrente por  $f_0(x) = 1$ ,  $f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}$ . Demostrar que la sucesión converge en  $[0, 1]$  y que la convergencia es uniforme.

**Solución.** 1. Supongamos que  $(f_n)$  es monótona creciente (el caso decreciente se demostraría de forma análoga). Sea  $\epsilon > 0$  y  $x \in E$ , entonces existe  $n(x)$  entero positivo tal que  $f(x) - f_m(x) < \epsilon/3$  para todo  $m \geq n(x)$ .

Como  $f$  y  $f_{n(x)}$  son continuas, existe un entorno abierto  $V(x)$  de  $x$  tal que si  $y \in V(x)$  se verifica  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$  y  $|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| < \epsilon/3$ . Por otra parte

$$\begin{aligned} f(y) - f_{n(x)}(y) &= |f(y) - f_{n(x)}(y)| \\ &= |f(y) - f(x) + f(x) - f_{n(x)}(x) + f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, en  $V(x)$  tenemos  $f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$ . Dado que  $\{V(x) : x \in E\}$  es un recubrimiento por abiertos del espacio compacto  $E$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{V(x_1), \dots, V(x_p)\}$ .

Sea  $n_0 = n(x_0) = \min\{n(x_1), \dots, n(x_p)\}$ . Para cada  $x \in E$ ,  $x$  pertenece a uno de los  $V(x_i)$ . Entonces, si  $n \geq n_0$

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_0}(x) \leq f(x) - f_{n(x_i)}(x) < \epsilon \quad (\forall x \in E).$$

Por tanto  $f_n \rightarrow f$  en  $E$  uniformemente.

2. Tenemos

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1, \quad f_1(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f_2(x) = \sqrt{x \cdot x^{1/2}} = x^{3/4}, \\ f_3(x) &= \sqrt{x \cdot x^{3/4}} = x^{7/8}, \quad f_4(x) = \sqrt{x \cdot x^{7/8}} = x^{15/16}. \end{aligned}$$

Esto sugiere la fórmula  $f_n(x) = x^{(2^n - 1)/2^n}$ , fórmula esta fácilmente demostrable por inducción, por tanto  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^1 = x$ .

La sucesión  $a_n = (2^n - 1)/2^n = 1 - 1/2^n$  es monótona creciente. En efecto

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq -\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 2^n \leq 2^{n+1}.$$

y la última desigualdad es evidente. Como  $0 \leq x \leq 1$  se verifica

$$f_n(x) = x^{a_n} \geq x^{a_{n+1}} = f_{n+1}(x) \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

Es decir, tenemos una sucesión  $f_n$  de funciones continuas, monótona decreciente sobre el compacto  $[0, 1]$  cuyo límite es la función continua  $f(x) = x$ . Como consecuencia del Teorema de Dini se verifica que la convergencia es uniforme.

### 11.4. Series uniformemente convergentes. Criterio de Weierstrass

1. Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^n + 1}$  es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$ .
2. Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2 + x^2}$  es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$ .
3. Sea  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ . Demostrar que  $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .
4. Estudiar la convergencia de la serie numérica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n dx.$$

En caso de ser convergente, hallar su suma (Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

5. Demostrar el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series:

Sea  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie de funciones definidas en  $I$ . Supongamos que existe una sucesión de constantes reales  $\alpha_n \geq 0$  que satisfacen  $|u_n(x)| \leq \alpha_n$  para todo  $x \in I$ . Entonces, si  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  es convergente, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es uniformemente convergente en  $I$ .

**Solución.** 1. Tenemos

$$\left| \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^n + 1} \right| = \frac{|\operatorname{sen}^2 x|}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Dado que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$  es convergente, la serie dada es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$  como consecuencia del criterio de Weierstrass.

2. Tenemos

$$\left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2 + x^2} \right| = \frac{e^{-nx^2}}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  es convergente, la serie dada es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$  como consecuencia del criterio de Weierstrass.

3. Veamos que la serie dada converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Tenemos

$$\left| \frac{\text{sen } nx}{n^3} \right| = \frac{|\text{sen } nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$  es convergente, la serie dada es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$  como consecuencia del criterio de Weierstrass. En consecuencia se verifica

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } nx}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^4} [\cos nx]_0^{\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos n\pi - \cos 0}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}. \end{aligned}$$

Si  $n$  es par,  $1 - (-1)^n = 0$  y si es impar  $1 - (-1)^n = 2$ . Por tanto,

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4. Para todo  $x \in [0, 1]$  se verifica  $1/(x^4 + 2x^2 + 2) \leq 1/2$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n \leq \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow \int_0^1 \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n dx &\leq \int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

La serie de términos positivos dada está pues mayorada por la serie geométrica convergente  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n$ , en consecuencia es convergente. Consideremos ahora la serie funcional:

$$S \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n.$$

Tenemos:

$$\left| \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n \right| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^n, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Dado que la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n$  es convergente, por el criterio de Weierstrass, la serie  $S$  es uniformemente convergente en  $[0, 1]$ , lo cual implica que se puede integrar término a término en  $[0, 1]$ . Llamemos  $S(x)$  a la suma de la serie  $S$ , entonces:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n dx = \int_0^1 S(x) dx.$$

La serie  $S$  es geométrica de razón  $r < 1$  su suma es por tanto:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2}} \\ &= \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int S(x) dx = x + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \dots = x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{\arctan x}{2} + C.$$

Hemos omitido los cálculos que corresponden al método de Hermite por lo rutinario de los mismos. Tenemos pues:

$$\int_0^1 S(x) dx = \left[ x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{\arctan x}{2} \right]_0^1 = \frac{4}{5} + \frac{\pi}{8}.$$

Es decir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left( \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2} \right)^n dx = \frac{4}{5} + \frac{\pi}{8}.$$

5. Sea  $\epsilon > 0$ . Por el criterio de Cauchy para la convergencia de series numéricas, existe un número natural  $n_0$  tal que

$$n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n < \epsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} n \geq m \geq n_0 &\Rightarrow |u_m(x) + u_{m+1}(x) + \dots + u_n(x)| \\ &\leq |u_m(x)| + |u_{m+1}(x)| + \dots + |u_n(x)| \leq \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n < \epsilon. \end{aligned}$$

El teorema es consecuencia del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series.

### 11.5. Series enteras o de potencias, radio de convergencia

1. Sea la serie entera  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Demostrar que si converge para  $x = x_0 \neq 0$ , entonces converge para todo  $x$  tal que  $|x| < |x_0|$ .

2. Sea la serie entera  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Demostrar que existe un único  $R \in [0, +\infty]$

tal que:

i) Si  $|x| < R$  la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $|z| > R$  la serie es divergente.

3. Para las siguientes series enteras determinar su radio de convergencia, el intervalo abierto de convergencia absoluta, y estudiar la convergencia en los extremos del intervalo.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .   b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ .   c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ .   d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ .

4. Para las siguientes series enteras determinar su radio de convergencia, el intervalo abierto de convergencia absoluta, y estudiar la convergencia en los extremos del intervalo.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ .   b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .   c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$ .   d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ .

5. Demostrar la fórmula de Hadamard:

Sea la serie entera  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  y  $R$  su radio de convergencia. Entonces

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

6. Usando la fórmula de Hadamard hallar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad a_{2n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

**Solución.** 1. Si la serie converge para  $x = x_0$ , entonces  $a_n x_0^n \rightarrow 0$ , lo cual implica que existe  $K \geq 0$  tal que  $|a_n x_0^n| \leq K$  para todo  $n$ . Entonces, si  $|x| < |x_0|$ :

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq K \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

La serie de término general  $|x/x_0|^n$  es geométrica de razón menor que 1, luego es convergente. Por el teorema del álgebra de series también lo es la

de término general  $K|x/x_0|^n$  y por el criterio de la mayorante, también lo es  $\sum_{n \geq 0} |a_n x^n|$ .

2. *Existencia de R.* Llamemos

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ converge}\}, \quad S' = \{|x| : x \in S\}.$$

Como  $0 \in S$ , también  $0 \in S'$  es decir  $S' \neq \emptyset$ . Llamemos  $R = \sup S'$  (será finito o infinito). Sea  $x$  tal que  $|x| < R$ , entonces  $|x|$  no es cota superior de  $S'$  lo cual implica que existe  $x_0 \in S$  con  $|x| < |x_0|$ . Por el problema anterior, la serie converge absolutamente en  $x$ .

Sea  $x$  tal que  $|x| > R$ . Si la serie fuera convergente en  $x$ , entonces  $x \in S$  con lo cual  $|x| \in S'$  y  $R$  no sería cota superior de  $S'$  (absurdo).

*Unicidad de R.* Si existieran dos  $R < R'$  cumpliendo las condiciones *i*) y *ii*), elijamos  $x$  tal que  $R < |x| < R'$ . Entonces la serie sería a la vez absolutamente convergente y divergente en  $x$  (absurdo).

3. a) Aplicando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1).$$

El radio de convergencia es  $R = 1$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-1, 1)$ . Para  $x = -1$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ , que es divergente pues el término general  $(-1)^n$  no tiende a 0. Para  $x = 1$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ , que es divergente por las mismas razones.

b) Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{2(n+1)} \right| \\ &= \frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2). \end{aligned}$$

El radio de convergencia es  $R = 2$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-2, 2)$ . Para  $x = -2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ , que es condicionalmente convergente (serie armónica alternada) Para  $x = 2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ , que es divergente (serie armónica).

c) Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| \\ &= |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

El radio de convergencia es  $R = 1$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-1, 1)$ . Para  $x = -1$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n-1)$ , que es condicionalmente convergente (criterio de Leibniz). Para  $x = 1$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 1 / (2n-1)$ , que es divergente (comparación con la serie armónica).

d) Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n x^{2n+1}}{(4n+1)^2} \cdot \frac{(4n-3)^2}{2^{n-1} x^{2n-1}} \right| = 2|x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3)^2}{(4n+1)^2} \\ &= 2|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

El radio de convergencia es  $R = \sqrt{2}/2$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ . Para  $x = -\sqrt{2}/2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\sqrt{2}/2}{(4n-3)^2}$ , que es absolutamente convergente. Para  $x = \sqrt{2}/2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}/2}{(4n-3)^2}$ , que es también es absolutamente convergente.

4. a) Aplicando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

La serie solamente converge para  $x = 0$ . El radio de convergencia es  $R = 0$ .

b) Aplicando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La serie solamente en  $(-\infty, +\infty)$ . El radio de convergencia es  $R = +\infty$ .

c) Aplicando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \cdot \frac{n5^n}{(x-3)^n} \right| = \frac{|x-3|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{|x-3|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 5 \Leftrightarrow x \in (-2, 8).$$

El radio de convergencia es  $R = 5$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-2, 8)$ . Para  $x = -2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ , que es condicionalmente convergente (serie armónica alternada). Para  $x = 8$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ , que es divergente (serie armónica).

d) Aplicando el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x+3)^n} \right| = |x+3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= |x+3| < 1 \Leftrightarrow x \in (-4, -2).$$

El radio de convergencia es  $R = 1$ , y el intervalo abierto de convergencia absoluta es  $(-4, -2)$ . Para  $x = -4$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$ , que es absolutamente convergente. Para  $x = -2$  obtenemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ , que también es absolutamente convergente.

5. Recordamos que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup\{x_n : n \geq p\})$$

para  $x_n$  sucesión de números reales. Sea la serie de términos positivos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \quad (1)$$

i) Veamos que si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} < 1$ , la serie (\*) converge. En efecto, sea  $r$  fijo tal que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} < r < 1$ . Entonces, para  $n$  suficientemente grande,

$$\sup\{u_m^{1/m} : m \geq n\} < r.$$

Tenemos:  $\sup\{u_m^{1/m} : m \geq n\} < r \Rightarrow u_m^{1/m} < r \Rightarrow u_m < r^m$ . Como  $|r| = r < 1$ , la correspondiente serie geométrica es convergente, luego también lo es la serie (1).

ii) Veamos que si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} > 1$ , la serie (1) diverge. En efecto, sea  $r$  fijo tal que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} > r > 1$ . Entonces, y razonando de manera análoga a i), para  $n$  suficientemente grande, se verifica  $u_m > r^m$ . Como  $|r| = r > 1$ , la correspondiente serie geométrica es divergente, luego también lo es la serie (1).

Consideremos ahora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Entonces, si  $R \neq 0$  y  $R \neq +\infty$  :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n x^n|^{1/n} &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} |x| = |x| \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} < 1 \\ \Leftrightarrow |x| &< \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie (2) es absolutamente convergente si, y sólo si se verifica la última desigualdad, en consecuencia

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Los casos  $R = 0$  y  $R = +\infty$  son triviales.

6. Usamos la propiedad de que el límite superior de una sucesión es el supremo de los límites de las subsucesiones convergentes. En nuestro caso es claro que los límites de las subsucesiones convergentes de  $|a_n|^{1/n}$  son

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{2n}|^{1/(2n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \sup\{1/2, 1/3\} = 1/2,$$

por tanto el radio de convergencia es  $R = 2$ .

## 11.6. Derivación e integración de series enteras

1. Sea  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  una serie entera con radio de convergencia  $R$ . Demostrar que si  $\rho \in [0, R)$ , la serie converge uniformemente en el intervalo  $[-\rho, \rho]$ .

2. Demostrar que toda serie entera y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia.

3. Sea  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  una serie entera o de potencias con radio de convergencia  $R > 0$ . Demostrar que la suma  $f(x)$  de la serie es una función con infinitas derivadas en  $(-R, R)$ . Las derivadas se obtienen derivando término a término la serie dada.

4. Sea la serie entera  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  con radio de convergencia  $R$  y de suma  $f(x)$  en  $(-R, R)$ . Demostrar que la serie entera

$$a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

tiene el mismo radio de convergencia que la serie dada, y que para todo  $x \in (-R, R)$ :

$$\int_0^x f(x) dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

**Solución.** 1. La serie  $a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots$  converge absolutamente y para todo  $x \in [-\rho, \rho]$  se verifica  $|a_nx^n| \leq |a_n\rho^n|$ . Basta ahora aplicar el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series.

2. Sea  $R$  el radio de convergencia de una serie entera y  $R'$  el de su serie derivada.

(a) Supongamos que  $R < R'$ . Sea  $x$  un número tal que  $R < x < R'$ . Como  $x < R'$ , la serie de término general  $n|a_n|x^{n-1}$  es convergente, con lo cual también lo es la de término general  $n|a_n|x^n$  (por el teorema del álgebra de series), y por tanto también lo es la de término general  $|a_n|x^n$  (pues  $0 \leq |a_n|x^n \leq n|a_n|x^n$  para todo  $n \geq 1$ ). Esto es absurdo pues  $x > R$ .

(b) Supongamos que  $R' < R$ . Sean  $x$  y  $\rho$  dos números tales que  $R' < x < \rho < R$ . Como  $\rho < R$ ,  $|a_n|\rho^n \rightarrow 0$  (condición necesaria para la convergencia de una serie). Existe por tanto una constante positiva  $M$  tal que  $|a_n|\rho^n \leq M$  para todo  $n$ . Entonces, llamando  $\theta = x/\rho$  podemos escribir

$$|na_nx^n| = n|a_n\rho^n| \left(\frac{x}{\rho}\right)^n \leq nM\theta^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

La serie de término general  $nM\theta^n$  es convergente. En efecto, aplicando el criterio de D'Alembert:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)M\theta^{n+1}}{nM\theta^n} = \theta < 1.$$



Esto implica que la serie de término general  $|na_n x^n|$  es convergente (está mayorada por una convergente) y también es convergente la de término general  $|na_n x^{n-1}|$  (álgebra de series). Obtenemos un absurdo pues  $x > R'$ .

3. Sea  $x_0 \in (-R, R)$  y elijamos  $\rho$  tal que  $|x_0| < \rho < R$ . Las series de potencias

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \\ a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots, \end{aligned}$$

sabemos que son uniformemente convergentes en  $[-\rho, \rho]$  hacia funciones  $f$  y  $g$ . Por el conocido teorema de derivación de sucesiones funcionales uniformemente convergentes,  $f$  es derivable y su derivada en  $[-\rho, \rho]$  es  $g$ . En particular,  $f'(x_0)$  existe y es igual a  $g(x_0)$ .

Es decir,  $f$  es derivable en  $(-R, R)$  y su derivada  $f'$  se obtiene derivando término a término la serie dada. Aplicando este resultado a  $f'$ , después a  $f''$ , ... se obtiene el teorema.

4. La serie  $a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$  tiene como serie derivada la serie dada, por tanto ambas tienen radio de convergencia  $R$ . Su suma  $h(x)$  es nula para  $x = 0$  y por tanto  $h(x) = \int_0^x f(x) dx$  para todo  $x \in (-R, R)$ .

## 11.7. Suma de series enteras por derivación o integración

1. Valiéndose de la derivación o integración término a término y de la serie geométrica, hallar la suma de las series enteras:

$$\begin{aligned} (a) \quad & x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots. \\ (b) \quad & x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots. \end{aligned}$$

2. Valiéndose de la derivación o integración término a término y de la serie geométrica, hallar la suma de las series enteras:

$$\begin{aligned} (a) \quad & 1 + 2x + 3x^2 + (n+1)x^n + \cdots. \\ (b) \quad & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots. \end{aligned}$$

3. Valiéndose de la derivación o integración término a término y de la serie geométrica, hallar la suma de las series enteras:

$$(a) \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

$$(b) 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \dots .$$

4. Valiéndose de la derivación o integración término a término y de la serie geométrica, hallar la suma de la serie entera:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots .$$

**Solución.** 1. (a) Llamemos  $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ . Derivando,

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x) + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = (-\log 1) + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\log(1-x), \quad |x| < 1.$$

(b) Llamemos  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ . Derivando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1-(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x|^2 < 1. \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = \arctan 0 + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \arctan x, \quad |x| < 1.$$

2. (a) Llamemos  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + (n+1)x^n + \dots$ . Integrando,

$$\int f(x) dx = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} + \dots) + C$$

$$= -1 + \frac{1}{1-x} + C, \quad |x| < 1.$$

Derivando la igualdad anterior queda  $f(x) = 1/(1-x)^2$ . Queda:

$$1 + 2x + 3x^2 + (n+1)x^n + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

(b) Llamemos  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ . Derivando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots \\ &= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = (\log 1) + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \log(1+x), \quad |x| < 1.$$

3. (a) Llamemos  $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ . Derivando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|^2 < 1. \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = (1/2)(\log 1) + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

(b) Llamemos  $f(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2} + \dots$ . Integrando,

$$\int f(x) dx = (x - x^3 + x^5 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-1} + \dots) + C$$

$$= \frac{1}{1 - (-x^2)} + C = \frac{1}{1 + x^2} + C, \quad |x|^2 < 1.$$

Derivando la igualdad anterior queda  $f(x) = -2x/(1 + x^2)^2$ . Queda:

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n - 1)x^{2n-2} + \dots = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Llamemos  $f(x) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots + n(n + 1)x^{n-1} + \dots$ .  
Integrando,

$$g(x) = \int f(x) dx = (2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n + 1)x^n + \dots) + C.$$

Integrando de nuevo,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int g(x) dx = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1} + \dots) + Cx + C_1. \\ &= -1 - x + \frac{1}{1 - x} + Cx + C_1, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Derivando dos veces la igualdad anterior,

$$g(x) = h'(x) = -1 + \frac{1}{(1 - x)^2} + C, \quad |x| < 1,$$

$$f(x) = g'(x) = \frac{2}{(1 - x)^3}, \quad |x| < 1.$$

Queda:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots + n(n + 1)x^{n-1} + \dots = \frac{2}{(1 - x)^3}, \quad |x| < 1.$$

## 11.8. Serie de Maclaurin

1. Sea  $I$  un intervalo abierto centrado en 0 y  $f$  una función definida en  $I$ . Si  $f$  es igual en  $I$  a la suma de una serie entera, demostrar que esta serie es necesariamente

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots.$$

2. Sea  $I$  intervalo abierto centrado en el origen y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función con infinitas derivadas en  $I$ . Demostrar que si  $f$  es par, su serie de Maclaurin no hace intervenir más que términos pares, y que si es impar, no hace intervenir más que términos impares.

**Solución.** 1. Supongamos que  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  en  $I$ . Por el conocido teorema de derivación de una serie entera,  $f^{(n)}(x)$  existe para todo  $x \in I$  y es la suma de una serie entera  $S$  que se obtiene derivando término a término  $n$  veces la serie  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ . En particular,  $f^{(n)}(0)$  es el término constante de  $S$ , que se obtiene derivando  $n$  veces  $a_nx^n$ . Es decir,

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2) \dots 1 \cdot a_n = n!a_n,$$

y por tanto  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

2. Si  $f$  es par, entonces  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ . Derivando y usando la regla de la cadena,  $f'(-x)(-1) = f'(x)$ . Es decir,  $f'(-x) = -f'(x)$  para todo  $x \in I$  lo cual implica que  $f'$  es impar.

Si  $f$  es impar, entonces  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in I$ . Derivando y usando la regla de la cadena,  $f'(-x)(-1) = -f'(x)$ . Es decir,  $f'(-x) = f'(x)$  para todo  $x \in I$  lo cual implica que  $f'$  es par.

Lo anterior implica que si  $f$  es par, son impares las funciones derivadas  $f^{(2n+1)}$  con lo cual  $f^{(2n+1)}(0) = 0$  y la serie de Maclaurin de  $f$  no hace intervenir más que términos pares.

Si  $f$  es impar, son impares las funciones derivadas  $f^{(2n)}$  con lo cual  $f^{(2n)}(0) = 0$  y la serie de Maclaurin de  $f$  no hace intervenir más que términos impares.

## 11.9. Desarrollos en serie de Maclaurin de las funciones habituales

1. Demostrar que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

2. Demostrar que si  $a > 0$ ,

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^n (\log a)^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k (\log a)^k}{k!}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Demostrar que

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

4. Demostrar que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

5. Demostrar que si  $|x| < 1$ ,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

6. Demostrar que si  $|x| < 1$ ,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

7. Demostrar que si  $|x| < 1$ ,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

8. Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Demostrar que si  $|x| < 1$  se verifica

$$(1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} x^k.$$

Nota. Si además  $p$  es entero  $\geq 0$ ,

$$(1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{p}x^p$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , como consecuencia del desarrollo del binomio de Newton

**Solución.** 1. La fórmula de Maclaurin de orden  $n$  aplicada a la función  $e^x$  es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con  $\xi$  comprendido entre 0 y  $x$ . Podemos por tanto escribir

$$\left| e^x - \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Como  $\xi$  está comprendido entre 0 y  $x$ , se verifica  $e^\xi \leq e^{|x|}$ , es decir

$$\left| e^x - \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

Ahora bien,  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  pues sabemos que la exponencial tiene un grado de infinitud menor que el factorial. En consecuencia,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^x$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  con lo cual

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

2. Tenemos

$$\begin{aligned} a^x &= \left( e^{\log a} \right)^x = e^{x \log a} \\ &= 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n (\log a)^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k (\log a)^k}{k!} \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Para todo  $x$  número real se verifica

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

En consecuencia, y para todo  $x$  real,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Por tanto, y para todo  $x$  real

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \\ \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots. \end{aligned}$$

4. La fórmula de Maclaurin de orden  $2n$  aplicada a la función  $\cos x$  proporciona la acotación

$$\left| \cos x - \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ahora bien,  $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  pues sabemos que la exponencial tiene un grado de infinitud menor que el factorial. En consecuencia,

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \rightarrow \cos x$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  con lo cual

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

De manera análoga se deduce el desarrollo en serie de Maclaurin de la función seno.

5. Llamemos  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ . Derivando y usando el conocido teorema de la suma de las series geométricas

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - (-x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad |x|^2 < 1. \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = \arctan 0 + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots = \arctan x, \quad |x| < 1.$$

6. Llamemos  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$ . Derivando y usando el conocido teorema de la suma de las series geométricas

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots$$



$$= \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x}, \quad |x| < 1.$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = (\log 1) + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad |x| < 1.$$

7. Llamemos  $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ . Derivando y usando el conocido teorema de la suma de las series geométricas

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Integrando la igualdad anterior:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x) + C.$$

Para  $x = 0$  y teniendo en cuenta que  $f(0) = 0$  obtenemos  $0 = (-\log 1) + C$ , luego  $C = 0$ . Queda:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad |x| < 1.$$

8. Recordemos que para  $p \in \mathbb{R}$  y  $k$  número natural,

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \text{ si } k > 0, \quad \binom{p}{0} = 1.$$

Hallemos previamente el radio de convergencia de la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} x^k$ . Distinguiamos dos casos:

a)  $p$  es entero  $\geq 0$ : entonces, y por aplicación de la fórmula del binomio de Newton,

$$(1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \dots + \binom{p}{p}x^p.$$

La suma es finita y por tanto el radio de convergencia es  $R = +\infty$ .

b)  $p$  no es entero  $\geq 0$ . Si  $|x| \neq 0$  los términos de la serie son todos distintos de 0 y podemos aplicar el criterio de D'Alembert,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\binom{p}{n+1} x^{n+1}}{\binom{p}{n} x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)(p-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{p(p-1) \cdots (p-n+1)} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{p-n}{n+1} \right| = |x|. \end{aligned}$$

La serie es absolutamente convergente si  $|x| > 1$  y divergente si  $|x| < 1$ , luego el radio de convergencia es  $R = 1$ .

Observación. Se concluye de lo anterior que si  $|x| < 1$ ,

$$\frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)}{n!} x^n \rightarrow 0 \quad (1)$$

cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

Hallemos ahora la derivada enésima de la función  $f(x) = (1+x)^p$ . Tenemos

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1},$$

$$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2},$$

$$f'''(x) = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3}.$$

El cálculo de estas derivadas sugiere la fórmula

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)(1+x)^{p-n}. \quad (2)$$

Se verifica para  $n = 1$ , y si es cierta para un determinado  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' = (p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)(1+x)^{p-n})' \\ &= p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)(p-n)(1+x)^{p-n-1} \\ &= p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)(p-(n+1)+1)(1+x)^{p-(n+1)}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la fórmula (2) es cierta para todo  $n$ . El polinomio de Maclaurin de orden  $n$  de  $f$  es:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$= \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n.$$

El correspondiente resto integral es:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n p(p-1) \dots (p-n)(1+t)^{p-n-1} dt \\ &= \frac{p(p-1) \dots (p-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{p-1} dt. \end{aligned}$$

Acotemos el resto. Para ello consideramos la función  $g(t) = \frac{x-t}{1+t}$ . Su derivada es

$$g'(t) = -\frac{x+1}{(1+t)^2},$$

que es negativa en  $|x| < 1$  y por tanto monótona decreciente. Por otra parte,  $g(0) = x$  y  $g(x) = 0$ , luego  $|g(t)| \leq |x|$  para todo  $t$  comprendido entre 0 y  $x$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{p-1} dt \right| &\leq \left| x^n \int_0^x (1+t)^{p-1} dt \right| \\ \Rightarrow |R_n(x)| &\leq \frac{p(p-1) \dots (p-n)}{n!} \left| x^n \int_0^x (1+t)^{p-1} dt \right|. \end{aligned}$$

La fórmula (1) implica que  $R_n(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , y por tanto si  $|x| < 1$ ,

$$(1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots.$$

### 11.10. Función suave pero no analítica

Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que para todo entero  $n \geq 1$  se verifica

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p_n(x)}{x^{2n}} f(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

siendo  $p_n(x)$  un polinomio de grado  $n - 1$  que cumple la relación de recurrencia

$$p_1(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - (2nx - 1)p_n(x) \quad (n \geq 1).$$

(b) Concluir que  $f$  es suave en  $\mathbb{R}$ , pero no analítica.

**Solución.** (a) Para  $x > 0$  demosremos por inducción que se cumple la fórmula de derivación dada. Si  $n = 1$ ,

$$f(x) = e^{-1/x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{p_1(x)}{x^{2 \cdot 1}} f(x).$$

Para  $n = 2$  tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{x^3} f(x) + \frac{1}{x^2} f'(x) \\ &= \frac{-2x}{x^4} f(x) + \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{-2x + 1}{x^{2 \cdot 2}} f(x). \end{aligned}$$

El polinomio  $p_2(x) = -2x + 1$  es de grado  $2 - 1 = 1$  y satisface la relación de recurrencia dada pues

$$x^2 p_1'(x) - (2 \cdot 1 \cdot x - 1)p_1(x) = x^2 \cdot 0 - (2x - 1) \cdot 1 = -2x + 1 = p_2(x).$$

Podemos por tanto concluir que  $f''(x) = \frac{p_2(x)}{x^{2 \cdot 2}} f(x)$ . Sea ahora la fórmula cierta para  $n \geq 2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( \frac{p_n(x)}{x^{2n}} f(x) \right)' = \frac{p_n'(x) x^{2n} - 2nx^{2n-1} p_n(x)}{x^{4n}} f(x) + \frac{p_n(x)}{x^{2n}} f'(x) \\ &= \frac{x^2 p_n'(x) - 2nx p_n(x)}{x^{2n+2}} f(x) + \frac{p_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} f(x) \\ &= \frac{x^2 p_n'(x) - (2nx - 1)p_n(x)}{x^{2n+2}} f(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} f(x), \end{aligned}$$

luego la fórmula es cierta para  $n + 1$ .

Es claro que si  $x < 0$ , y para todo  $n \geq 1$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$  y que  $f_-^{(n)}(0) = 0$ . Falta demostrar que  $f_+^{(n)}(0) = 0$ , y para ello demostraremos previamente una desigualdad. Para todo entero  $m \geq 0$  y para todo  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} (m+1)! e^{1/x} &= (m+1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{x} \right)^n \geq \left( \frac{1}{x} \right)^{m+1} \\ \Rightarrow \frac{1}{x^m} &= x \left( \frac{1}{x} \right)^{m+1} \leq (m+1)! x e^{1/x} \Rightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^m} \leq (m+1)! x. \end{aligned}$$

Es decir, para todo entero  $m \geq 0$  y para todo real  $x > 0$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-1/x}}{x^m} \leq (m+1)!x. \quad (1)$$

Tenemos,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x}.$$

Usando el teorema del sandwich a la desigualdad (1),

$$0 \leq f'_+(0) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0,$$

por tanto  $f'_+(0) = 0$  y  $f'(0) = 0$ . Supongamos ahora que se verifica  $f^{(n)}(0) = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f_+^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} p_n(x) \frac{e^{-1/x}}{x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Por (1), se verifica

$$0 \leq \frac{e^{-1/x}}{x^{2n}} \leq (2n+1)!x,$$

y de nuevo, aplicando el teorema del sandwich queda  $f_+^{(n+1)}(0)$ . Hemos demostrado por inducción que para todo  $n \geq 1$ ,  $f_+^{(n)}(0)$  y por ende que  $f^{(n)}(0)$ .

(b) Hemos demostrado en el apartado anterior que  $f$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $\mathbb{R}$ , que es la definición de ser suave en  $\mathbb{R}$ . La serie de Maclaurin de  $f$  es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n,$$

cuya suma es  $S(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $S \neq f$  en  $\mathbb{R}$ ,  $f$  no es analítica en  $\mathbb{R}$ .

### 11.11. Convergencia uniforme en un intervalo no acotado

Para cada  $n = 1, 2, \dots$  se define el subconjunto  $A_n$  de  $\mathbb{R}$  :

$$A_n = \begin{cases} (n, n^2) & \text{si } n \text{ par} \\ [-2n^2, -1/n] & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

y la función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_n \\ \frac{1}{n^2 - n} & \text{si } x \in A_n \text{ y } n \text{ par} \\ \frac{1}{2n^3 - 1} & \text{si } x \in A_n \text{ y } n \text{ impar.} \end{cases}$$

1. Determinar el conjunto  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ .
2. Determinar el menor conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{R} - A$ .
3. Determinar del dominio de convergencia puntual de la sucesión  $(f_n)$  y su límite  $f$ .
4. Estudiar si la convergencia  $f_n \rightarrow f$  es uniforme.
5. Estudiar si se verifica la igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**Solución.** 1. La unión correspondiente a los  $A_n$  con  $n$  par es:

$$A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \dots = (2, 4) \cup (4, 16) \cup (6, 36) \cup \dots$$

Si  $n \geq 4$  se verifica  $n + 2 < n^2$  y por tanto,

$$(n, n^2) \cup (n + 2, (n + 2)^2) = (n, (n + 2)^2)$$

lo cual implica que  $A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \dots = (2, 4) \cup (4, +\infty)$ . Por otra parte, si  $n \rightarrow +\infty$ , entonces  $-2n^2 \rightarrow -\infty$  y  $-1/n \rightarrow 0$ , en consecuencia,

$$A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \dots = (-\infty, 0)..$$

Es decir,  $A = (-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$ .

2. El conjunto  $\mathbb{R} - A$  es igual a  $[0, 2] \cup \{4\}$  que es cerrado y por tanto, compacto. En consecuencia el menor conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{R} - A$ , es el propio  $\mathbb{R} - A$ .

3. Si  $x \in [0, 2] \cup \{4\}$ ,  $f_n(x) = 0$  para todo  $n$ , por tanto  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Si  $x \in (0, +\infty)$  entonces  $x$  pertenece un  $A_{n_0}$  con  $n_0$  impar, ahora bien para todo  $n$  impar se verifica  $A_n = [-2n^2, -1/n] \subset [-2(n + 2)^2, -1/(n + 2)^2] = A_{n+2}$ , lo cual implica que si  $n \geq n_0$ , entonces  $x \in A_n$  si  $n$  impar y  $x \notin A_n$  si  $n$  par al ser  $x < 0$ . En consecuencia, para  $x \in (0, +\infty)$  y  $n \geq n_0$  tenemos:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{2n^3 - 1} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

de lo cual se deduce  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Por último, si  $x \in (2, 4) \cup (4, +\infty)$ , entonces existe un  $n_0$  natural tal que  $x \notin A_n$  si  $n \geq n_0$ , luego  $f_n(x) = 0$  si  $n \geq n_0$ . También en este caso  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Podemos pues concluir que la función límite puntual está definida en todos los reales, siendo éste límite la función nula.

4. Veamos si la convergencia es uniforme. Se verifica:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max \left\{ 0, \frac{1}{n^2 - n}, \frac{n}{2n^3 - 1} \right\} = M_n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

y además  $M_n \rightarrow 0$ . Por tanto, para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $n_0$  natural tal que  $M_n < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ . Esto implica  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$  y para todo  $x \in \mathbb{R}$ : la convergencia es uniforme.

5. Para  $n$  par,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_n^{n^2} \frac{1}{n^2 - n} dx = \frac{1}{n^2 - n} (n^2 - n) = 1.$$

Para  $n$  impar,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{-2n^2}^{-1/n} \frac{n}{2n^3 - 1} dx = \frac{n}{2n^3 - 1} \left( 2n^2 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

En consecuencia, no se verifica la igualdad dada pues:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

Nota: obsérvese que aunque la convergencia en  $I = (-\infty, +\infty)$  es uniforme, los símbolos límite e integral no son intercambiables. Esto es debido a que el intervalo  $I$  no es acotado.

## 11.12. Sucesión de Fibonacci

Consideremos la sucesión de *Fibonacci*, esto es  $\{F_n\}_{n=0,1,2,\dots}$  tal que:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (*)$$

Es conocido que existe:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ .

(a) Usando las condiciones (\*), calcúlese justificadamente dicho límite.

(b) Considérese la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ . Calcular su radio de convergencia  $R$  y demostrar que  $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$  para todo  $x$  tal que  $|x| < R$  siendo  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ .

(c) Representar gráficamente la suma de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Llamemos  $L$  al límite pedido. Es claro que  $F_n > 0$  para todo  $n$  natural. Dividiendo la segunda igualdad de (\*) entre  $F_{n+1}$  y tomando límites obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} &= \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1 \Rightarrow \\ L &= \frac{1}{L} + 1 \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Dado que  $F_n > 0$  para todo  $n$  natural, necesariamente:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(b) Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{F_{n+1} x^{n+1}}{F_n x^n} \right| = L|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = R.$$

La serie es absolutamente convergente para  $|x| < R$  y divergente para  $|x| > R$ , en consecuencia el radio de convergencia de la serie es  $R = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Por otra parte:

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \\ \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} &= \\ \left( F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n \right) - \left( F_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n \right) - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n &= \\ F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n &= 1 + x - x + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 x^n = 1. \end{aligned}$$

(c) Representemos la función  $f(x) = 1/(1 - x - x^2)$  cuando  $x \in (-R, R)$ . El denominador se anula para  $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ . Se verifica  $(-1 - \sqrt{5})/2 < -R$  y  $(-1 + \sqrt{5})/2 = R$ , por tanto  $f$  está definida en  $(-R, R)$ . Para  $x = R$  tenemos una asíntota vertical. Derivando:



$$f'(x) = \frac{2x + 1}{(1 - x - x^2)^2} = 2 \frac{x - (-1/2)}{(1 - x - x^2)^2}.$$

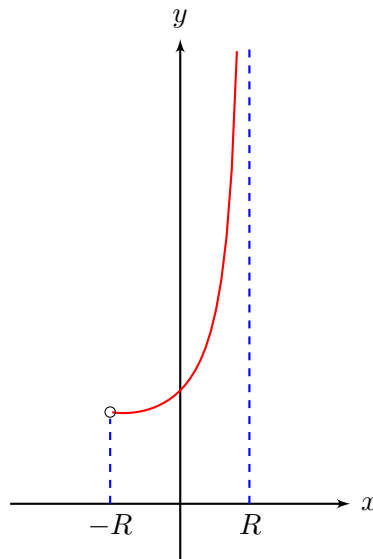
Para  $x \in (-R, -1/2)$  la función es decreciente y para  $x \in (-1/2, R)$  creciente. Es decir, tenemos un mínimo local en  $P(-1/2, 4/5)$  (absoluto en este caso). Derivando de nuevo:

$$f''(x) = 2 \frac{3x^2 + 3x + 2}{(1 - x - x^2)^3}.$$

El polinomio  $p(x) = 3x^2 + 3x + 2$  no tiene raíces reales y  $q(x) = 1 - x - x^2$  no las tiene en  $(-R, R)$ . Esto implica que  $f''(x)$  mantiene su signo constante. Dado que  $f''(0) = 4 > 0$  se concluye que  $f$  es cóncava hacia arriba en su intervalo de definición. Un punto de la gráfica es el  $Q(0, 1)$ . Por otra parte:

$$\lim_{x \rightarrow -R} f(x) = \frac{1}{1 + R - R^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Esto implica que la gráfica de  $f$  se aproxima al punto  $S(-R, (1 + \sqrt{5})/4)$ . De todo el estudio anterior, podemos concluir que la gráfica pedida es:



### 11.13. Función exponencial real

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface  $f' = f$  y  $f(0) = 1$ . Se pide,

1. Demostrar que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Demostrar que la función  $f$  es única. Es decir, si una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface  $g' = g$  y  $g(0) = 1$ , entonces  $f = g$ .
3. Demostrar que  $f$  es estrictamente creciente y convexa.
4. Demostrar que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se verifica  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .
5. Demostrar que para todo  $a$  real y para todo  $n$  entero positivo se verifica  $f(na) = f(a)^n$ .
6. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
7. Demostrar que la función

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

está definida en  $\mathbb{R}$  y satisface las condiciones  $f' = f$  y  $f(0) = 1$ .  
Nota. El lector habrá reconocido que  $f(x) = e^x$ .

**Solución.** 1. Derivando la función  $f(x)f(-x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x)f(-x) &= f'(x)f(x) + f(x)f'(x)(-1) = 0 \Rightarrow f(x)f(-x) = c \\ \Rightarrow f(0)^2 &= c \Rightarrow 1 = c \Rightarrow f(x)f(-x) = 1 \Rightarrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Además,  $f(-x) = 1/f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{g(x)^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= K \Rightarrow f(x) = Kg(x) \Rightarrow f(0) = Kg(0) \Rightarrow K = 1 \\ &\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = g. \end{aligned}$$

3. Como  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x$  real y  $f' = f$ , se verifica  $f'(x) \neq 0$ . Al ser  $f'(0) = f(0) = 1 > 0$ , se deduce del teorema de Bolzano que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  real, luego  $f$  es estrictamente creciente. Por otra parte,  $f'' = f' > 0$  y por tanto  $f$  es convexa.

4. Consideremos la función  $h(x) = f(a+x)$  con  $a$  real fijo. Derivando obtenemos

$$h'(x) = f'(a+x) = f(a+x) = h(x).$$

Razonando de manera análoga a la del segundo apartado, deducimos que  $h(x) = Cf(x)$  para alguna constante  $C$ . Para  $x = 0$  tenemos  $C = h(0) = f(a)$ . En consecuencia,

$$h(x) = Cf(x) \Rightarrow f(a+x) = f(a)f(x),$$

y esto demuestra la propiedad enunciada sin más que denotar por  $x$  al número  $a$ .

5. Trivialmente se verifica  $f(na) = f(a)^n$  para  $n = 1$ . Si la fórmula es cierta para  $n$ ,

$$f((n+1)a) = f(na+a) = f(na)f(a) = f(a)^n f(a) = f(a)^{n+1}$$

es decir, es cierta para  $n+1$ .

6. Como  $f$  es estrictamente creciente  $f(1) > f(0) = 1$ . En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n \cdot 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(1)^n}_{f(1) > 1} = +\infty.$$

De nuevo, usando que  $f$  es estrictamente creciente, se deduce  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Por otra parte,

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(1)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(-n) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

7. Usando el criterio del cociente a la serie dada

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

En consecuencia la serie converge para todo  $x$  lo cual implica que  $f$  está definida en  $\mathbb{R}$ . Trivialmente  $f(0) = 1$ . La serie es de potencias y según un conocido resultado, se puede derivar término a término. Para todo  $x$  real,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x).$$

### 11.14. Sucesión funcional con límite $\Gamma(x)$

Para cada entero positivo  $n$  se considera la función definida por

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad (x > 0),$$

y se pide

- (a) Determinar explícitamente  $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$ ,  $I_3(x)$ .
- (b) Determinar la expresión explícita de la función  $I_n(x)$ .
- (c) Inducir heurísticamente la expresión del límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Combinando este resultado con el del apartado anterior, deducir una representación de una conocida función.

(d) Demostrar rigurosamente el resultado conjeturado en el apartado anterior. Se sugiere utilizar las acotaciones

$$(1 - \lambda^2)e^{-\lambda} \leq 1 - \lambda \leq e^{-\lambda} \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

y aplicar la desigualdad de Bernoulli, a saber:  $\forall h > -1, (1 + h)^n \geq 1 + nh$ .

(Propuesto en examen, Amp. Cálculo, ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Usando la función beta de Euler

$$I_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t) dt = B(x, 2) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(2)}{\Gamma(x+2)} = \frac{\Gamma(x)}{(x+1)x\Gamma(x)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Efectuando el cambio  $u = t/2$

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \int_0^2 t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 (2u)^{x-1} (1-u)^2 2 dt \\ &= 2^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^2 dt = 2^x B(x, 3) = 2^x \frac{\Gamma(x)\Gamma(3)}{\Gamma(x+3)} \\ &= 2^x \frac{\Gamma(x) \cdot 2!}{(x+2)(x+1)x\Gamma(x)} = \frac{2! 2^x}{(x+2)(x+1)x}. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio  $u = t/3$  y procediendo de manera análoga obtenemos

$$I_3(x) = \frac{3! 3^x}{(x+3)(x+2)(x+1)x}.$$

(b) Efectuando el cambio  $u = t/n$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n dt \\ &= n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n dt = n^x B(x, n+1) = n^x \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\ &= n^x \frac{\Gamma(x) \cdot n!}{(x+n)(x+n-1) \dots x\Gamma(x)} = \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{k=n} (x+k)}. \end{aligned}$$

(c) Si  $n \rightarrow +\infty$ , entonces  $1 - (t/n) \rightarrow 1$ . Aplicando un conocido resultado

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{n} \cdot n\right)} = e^{-t}.$$

Suponiendo que los símbolos límite e integral fueran intercambiables

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

(d) Llamando  $\lambda = t/n$  tenemos  $0 \leq t/n \leq 1$  en el intervalo  $[0, n]$ , por tanto

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) e^{-t/n} \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}.$$

Elevando a  $n$

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Si  $t \in [0, n)$  entonces  $h = -t^2/n^2 > -1$  y aplicando la desigualdad de Bernoulli

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{-t^2}{n^2} = 1 - \frac{t^2}{n},$$

deducimos de las desigualdades de este apartado

$$t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^{x-1} e^{-t}.$$

Integrando

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} dt \leq \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n dt \leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Por una parte tenemos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$  y por otra

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(x+1)}{+\infty} = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} dt = 0.$$

Usando el teorema del sandwich concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x).$$



## Capítulo 12

# Análisis multivariable

### 12.1. Límites reiterados, contraejemplo

*Demostramos que la existencia de límite no implica la de los límites reiterados.*

Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

(b) Demostrar que no existe alguno de los límites reiterados en  $(0, 0)$ .

**Solución.** (a) Veamos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Efectivamente, para todo  $\epsilon > 0$

$$|f(x, y) - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x, y)| < \epsilon \Leftrightarrow |y| < \epsilon,$$

y para que se cumpla lo anterior basta elegir  $|x| < \delta$  e  $|y| < \delta$  con  $\delta = \epsilon$ .

(b) Elijamos  $y \neq 0$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = y, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -y = -y.$$

Es decir, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  y por tanto tampoco existe  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$ .

### 12.2. Continuidad y derivadas direccionales

*Demostramos que la existencia de las derivadas direccionales en un punto no implica la continuidad en dicho punto.*

Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demostrar que existen todas las derivadas direccionales de  $f$  en  $(0, 0)$ .  
 (b) Demostrar que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ .

**Solución.** (a) Sea  $u = (u_1, u_2)$  un vector unitario de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(u_1, u_2)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h}.$$

Para  $u_1 = 0$ , tenemos

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, hu_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Si  $u_1 \neq 0$  entonces  $hu_1 \neq 0$ , por tanto

$$D_u f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4} = \frac{u_2^2}{u_1}.$$

Existen todas las derivadas direccionales de  $f$  en  $(0, 0)$  y son finitas.

- (b) Consideremos la parábola  $P$  de ecuación  $x = y^2$ . Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in P} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , éste ha de ser  $1/2$ , que no coincide con  $f(0, 0)$ . En consecuencia  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ .

### 12.3. Diferenciabilidad en varias variables

1. Se considera la función  $f(x, y) = (x^3 + y, \log xy, \sqrt{x^2 + y^2})$ . Demostrar que es diferenciable en  $(1, 1)$  y hallar su diferencial en este punto.

2. Sea la función 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Estudiar

- (i) Su continuidad en  $a = (0, 0)$ .



- (ii) Existencia de derivadas parciales en  $a = (0, 0)$ .  
 (iii) Diferenciabilidad en  $a = (0, 0)$ .

3. Sea la función  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$

Estudiar

- (i) Su continuidad en  $a = (0, 0)$ .  
 (ii) Existencia de derivadas parciales en  $a = (0, 0)$ .  
 (iii) Diferenciabilidad en  $a = (0, 0)$ .

4. Sea la función  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$

Estudiar

- (i) Su continuidad en  $a = (0, 0)$ .  
 (ii) Existencia de derivadas parciales en  $a = (0, 0)$ .  
 (iii) Diferenciabilidad en  $a = (0, 0)$ .

5. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Estudiar

- (i) Su continuidad en  $a = (0, 0)$ .  
 (ii) Existencia de derivadas parciales en  $a = (0, 0)$ .  
 (iii) Diferenciabilidad en  $a = (0, 0)$ .

6. Sea la función  $f(x, y) = e^{3x+2y}$ . Estudiar

- (i) Su continuidad en  $a = (0, 0)$ .  
 (ii) Existencia de derivadas parciales en  $a = (0, 0)$ .  
 (iii) Diferenciabilidad en  $a = (0, 0)$ .

7. Sea  $I$  un intervalo abierto real y  $a \in I$ . Demostrar que  $f$  es diferenciable en  $a$  si y sólo si  $f$  es derivable en  $a$ .

8. Sea la aplicación  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A$  abierto y  $a \in A$ . Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $a$  entonces, la aplicación lineal  $\lambda$  que satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad (1)$$

es única.

9. Sea la aplicación  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A$  abierto y  $a \in A$ . Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces es continua en  $a$ .

10. Sea la aplicación  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  abierto y  $a \in A$ .

(i) Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $a$  existe la derivada de  $f$  en ese punto según cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^n$  y además  $D_v f(a) = Df(a)v$ .

(ii) Calcular  $D_{(2,3)} f(1,1)$  siendo  $f(x,y) = x^2 y$ .

**Solución.** 1. Las funciones componentes de  $f$  son

$$f_1(x,y) = x^3 + y, \quad f_2(x,y) = \log xy, \quad f_3(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Las parciales de estas funciones en un abierto  $A$  que contiene a  $(1,1)$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 3x^2, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{1}{x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Estas parciales son continuas en  $(1,1)$ , luego  $f$  es diferenciable en  $(1,1)$ . La diferencial en este punto es

$$\begin{aligned} (Df)(1,1) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3h_1 + h_2 \\ h_1 + h_2 \\ h_1/\sqrt{2} + h_2/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. (i) Veamos que no existe límite de la función cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Fácilmente podemos comprobar que los límites según direcciones y según parábolas  $y = \alpha x^2$  son 0, lo cual no asegura la existencia de límite. Hallemos los límites según las parábolas  $C_\alpha : x = \alpha y^2$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in C_\alpha} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha y^4}{\alpha^2 y^4 + y^4} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

El límite depende de  $\alpha$  lo cual implica que no existe límite: la función no es continua en  $a = (0,0)$ .

(ii) Derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0/h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0/h^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(iii) Al no ser continua en  $(0,0)$ ,  $f$  no es diferenciable en este punto.

3. (i) Para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $x$  es infinitésimo y  $\sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  está acotada, en consecuencia

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

luego la función es continua en  $(0, 0)$ .

(ii) Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(1/h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h^2)$$

Como  $1/h^2 \rightarrow +\infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ , no existe el límite anterior.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(iii) Al no existir todas las parciales en  $(0, 0)$ ,  $f$  no es diferenciable en este punto.

4. (i) Usando coordenadas polares,  $xy/\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos \theta \sin \theta$ . Pero  $\rho \rightarrow 0$  y  $\cos \theta \sin \theta$  está acotado, en consecuencia  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ : la función es continua en  $(0, 0)$ .

(ii) Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0/\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0/\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(iii) La función puede ser diferenciable en  $a = (0, 0)$ . Si es diferenciable, la única posible diferencial  $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\lambda(h, k) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0.$$

La función será diferenciable en  $(0, 0)$  si y sólo si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \lambda(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Pero pasando a coordenadas polares tenemos

$$\frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \lambda(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = |\cos \theta \sin \theta|,$$

es decir, los límites según  $\theta$  varían y como consecuencia no existe límite:  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

5. (i) Para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $x^2 + y^2 \rightarrow 0$  y  $\sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})$  está acotada, por tanto  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ : la función es continua en  $(0, 0)$ .

(ii) Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0.$$

(iii) La función puede ser diferenciable en  $a = (0, 0)$ . Si es diferenciable, la única posible diferencial  $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\lambda(h, k) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0.$$

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \lambda(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho |\sin(1/\rho)| = 0.$$

Es decir,  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

6. (i) Claramente  $f$  es continua en  $(0, 0)$  (teorema de continuidad de las funciones elementales).

(ii) Tenemos  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x+2y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{3x+2y}$ , por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2.$$

(iii) Las parciales de  $f$  son continuas en  $\mathbb{R}^2$  (teorema de continuidad de las funciones elementales) en consecuencia existen las parciales de  $f$  en un abierto que contiene a  $(0,0)$  y son continuas en  $(0,0)$ . Por el teorema de la condición suficiente para la diferenciabilidad, concluimos que  $f$  es diferenciable en  $(0,0)$ .

7. Denotemos por  $\lambda$  a la aplicación lineal

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(h) = f'(a)h.$$

Tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} f \text{ es derivable en } a &\Leftrightarrow \exists f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon \text{ si } 0 < |h| < \delta \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} < \epsilon \text{ si } 0 < |h| < \delta \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ es diferenciable en } a \text{ (con diferencial } \lambda(h) = f'(a)h). \end{aligned}$$

8. Supongamos que existieran dos aplicaciones lineales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  satisfaciendo (1). Veamos que necesariamente  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Llamemos  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . Bastará demostrar que  $\lambda = 0$ . Tenemos para todo  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda(h)\| &= \|(\lambda_1 - \lambda_2)(h)\| = \|\lambda_1(h) - \lambda_2(h)\| \\ &= \|\lambda_1(h) - f(a+h) + f(a) - \lambda_2(h) + f(a+h) - f(a)\| \\ &\leq \|f(a+h) - f(a) - \lambda_1(h)\| + \|f(a+h) - f(a) - \lambda_2(h)\|. \end{aligned}$$

Dividido entre  $\|h\|$  ( $h \neq 0$ ),

$$0 \leq \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda_2(h)\|}{\|h\|}.$$

Tomando límites, y aplicando el teorema del sandwich,

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \leq 0 + 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Consideremos  $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$  fijo y  $t \in \mathbb{R}$  variable. Entonces,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(th)\|}{\|th\|} \underset{\lambda \text{ lineal}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|t\lambda(h)\|}{\|th\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| \|\lambda(h)\|}{|t| \|h\|}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \underbrace{=}_{h \text{ constante}} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \|\lambda(h)\| = 0 \Rightarrow \lambda(h) = 0.$$

Por otra parte, al ser  $\lambda$  lineal se verifica  $\lambda(0) = 0$  y por tanto  $\lambda = 0$ .

9. Dado que  $f$  es diferenciable en  $a$  si y solo si lo son sus funciones componentes y que  $f$  es continua en  $a$  si y solo si lo son sus funciones componentes, podemos suponer que  $m = 1$ .

Como  $f$  es diferenciable en  $a$ ,

$$f(a+h) - f(a) = r(h) + \lambda(h) \text{ con } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|} = 0,$$

lo cual implica que  $r(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Por otra parte,  $\lambda$  es una forma lineal en  $\mathbb{R}^n$  y por tanto de la forma

$$\lambda(h) = a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n, \quad (a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} (r(h) + \lambda(h)) = 0 + \lim_{h \rightarrow 0} (a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n) \\ &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a. \end{aligned}$$

10. (i) Se verifica

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + r(h), \quad \text{con } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Haciendo  $h = tv$  ( $v \neq 0$ )

$$f(a+tv) - f(a) = tDf(a)(v) + r(tv), \quad \text{con } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(tv)\|}{|t|\|v\|} = 0.$$

Tomando límites cuando  $t \rightarrow 0$  y dado que  $r(tv)/t \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = Df(a)v.$$

Nota. Para  $v = 0$  el resultado es trivial.

(ii) La función  $f$  es diferenciable en  $a = (1, 1)$ . Según el apartado anterior

$$\begin{aligned} D_{(2,3)} f(1, 1) &= [D(1, 1)](2, 3) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7. \end{aligned}$$

## 12.4. Una derivada direccional máxima

Determinar los valores de las constantes  $a, b$  y  $c$  tales que la derivada direccional de la función  $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$  en el punto  $(1, 2, -1)$  tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje  $z$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** La derivadas parciales de  $f$  son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay^2 + 3cz^2x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy + bz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = by + 2czx^3.$$

Estas parciales son continuas en todo  $\mathbb{R}^3$  lo cual asegura que  $f$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  y en particular en el punto dado. Esto asegura la existencia de las derivadas direccionales en tal punto. El gradiente es

$$\nabla f(x, y, z) = (ay^2 + 3cz^2x^2, 2axy + bz, by + 2czx^3).$$

Es decir,  $\nabla f(1, 2, -1) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$ . Sabemos que la derivada direccional máxima es el módulo del vector gradiente y se obtiene en un vector unitario paralelo a dicho vector. Los vectores unitarios paralelos al eje  $z$  son  $(0, 0, \alpha)$  con  $\alpha = \pm 1$ . Por tanto  $\|\nabla f(1, 2, -1)\| = |\alpha| = 64 \Rightarrow \alpha = \pm 64$ . En consecuencia

$$\begin{cases} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - 2c = \pm 64. \end{cases}$$

Para  $\alpha = 64$  obtenemos  $(a, b, c) = (6, 24, -8)$  y para  $\alpha = -64$ ,  $(a, b, c) = (-6, -24, 8)$ .

## 12.5. Diferencial de una composición

Se consideran las funciones  $f$  y  $g$  definidas por

$$f(u, v) = \left( \int_1^{u+v} \sin^8 t \, dt, \int_1^{u-v} \cos^6 t \, dt, \int_1^{3u-2v} \cos^3 t \, dt \right),$$

$$g(x, y, z) = \left( \frac{x}{y} \sin z, 1 + \frac{y}{z} \cos z \right).$$

Calcular razonadamente  $Dg(1, -1, 0)$  y  $D(f \circ g)(1, -1, 0)$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Las funciones componentes de  $g$  son:

$$g_1(x, y, z) = \frac{x}{y} \sin z, \quad g_2(x, y, z) = 1 + \frac{y}{z} \cos z.$$

Usando el teorema fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, obtenemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\sin z}{y}, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-x \sin z}{y^2}, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{x \cos z}{y}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{-y \cos z}{x^2}, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\cos z}{x}, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{-y \sin z}{x}. \end{aligned}$$

En un abierto de  $\mathbb{R}^3$  que contiene al punto  $P = (1, -1, 0)$  las anteriores derivadas parciales existen y son continuas, lo cual implica que  $g$  es diferenciable en ése punto. La correspondiente matriz jacobiana es:

$$g'(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La diferencial  $Dg(1, -1, 0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es por tanto:

$$Dg(1, -1, 0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_3 \\ h_1 + h_2 \end{bmatrix}.$$

Procediendo de manera análoga con  $f = (f_1, f_2, f_3)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) &= \sin^8(u + v), & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) &= \sin^8(u + v), \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) &= \cos^6(u - v), & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) &= -\cos^6(u - v), \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u, v) &= 3 \cos^3(3u - 2v), & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u, v) &= -2 \cos^3(3u - 2v). \end{aligned}$$

Tenemos que  $g(1, -1, 0) = (0, 0)$ . En un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene al punto  $(0, 0)$  las anteriores derivadas parciales existen y son continuas, lo cual implica que  $f$  es diferenciable en ése punto. La correspondiente matriz jacobiana es:

$$f'(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(0, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(0, 0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$



Tenemos pues que  $g$  es diferenciable en  $(1, -1, 0)$  y  $f$  lo es en  $g(1, -1, 0) = (0, 0)$ . En consecuencia,  $f \circ g$  es diferenciable en  $(1, -1, 0)$  y además:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(1, -1, 0) &= f'[g(1, -1, 0)] g'(1, -1, 0) = f'(0, 0) g'(1, -1, 0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \\ 3 & -2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La diferencial  $D(f \circ g)(1, -1, 0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es por tanto:

$$D(f \circ g)(1, -1, 0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_1 - h_2 - h_3 \\ -2h_1 - 2h_2 - 3h_3 \end{bmatrix}.$$

## 12.6. Puntos de discontinuidad, compacidad

Se considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1} & \text{si } 4x^2 + y^2 \neq 1 \wedge (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } 4x^2 + y^2 = 1 \vee (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudiar la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Probar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  es compacto.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** (a) Analizaremos tres casos.

*Primer caso:*  $(x_0, y_0)$  cumple  $4x_0^2 + y_0^2 \neq 1$  y  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . La ecuación  $4x + y^2 = 1$  o bien  $x^2/(1/2)^2 + y^2/1^2 = 1$  representa una elipse con centro el origen, ejes los de coordenadas y semiejes  $a = 1/2$ ,  $b = 1$ . Si  $(x_0, y_0)$  no es el origen ni pertenece a la elipse, existe un abierto  $U$  que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  en el que la función  $f$  es

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1}.$$

La función está definida en  $U$ , y por el teorema de continuidad de las funciones elementales, deducimos que  $f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ .

*Segundo caso:*  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . En cualquier entorno que contiene a  $(0, 0)$  la función no es elemental. Veamos si es continua en este punto usando la definición.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \neq 1 = f(0, 0).$$

La función no es continua en  $(0, 0)$ .

*Tercer caso:*  $(x_0, y_0)$  cumple  $4x_0^2 + y_0^2 = 1$ . En un abierto  $V$  que contiene a  $(x_0, y_0)$  la función en los puntos que no están en la elipse es  $f(x, y) = x/(4x^2 + y^2 - 1)$ . Tomando la dirección  $y - y_0 = x - x_0$  tenemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{4x^2 + (y_0 + x - x_0)^2 - 1} = \frac{x_0}{4x_0^2 + y_0^2 - 1} = \frac{x_0}{0} = \infty \text{ (pues } x_0 \neq 0\text{)}.$$

No existe límite según una dirección, en consecuencia no existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

y por tanto  $f$  no es continua en  $(x_0, y_0)$ .

(b) Según el apartado anterior, la función no es continua exactamente en el conjunto  $K$  formado por los puntos de la elipse unión el origen. Este conjunto es claramente cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto compacto.

## 12.7. Funciones homogéneas, teorema de Euler

1. Demostrar que la función  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^5 + y^5}$  es homogénea y determinar su grado.

2. Calcular  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$

(a) Por derivación directa.

(b) Usando el teorema de Euler.

3. Demostrar el teorema de Euler para funciones homogéneas:

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces, para todo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  se verifica

$$x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x),$$

o de manera equivalente

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f(x).$$

**Solución.** 1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$  y para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se verifica

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{t^5 x^5 + t^5 y^5} = \sqrt[3]{t^5 (x^5 + y^5)} = \sqrt[3]{t^5} \sqrt[3]{x^5 + y^5} = t^{5/3} f(x, y),$$

por tanto la función es homogénea de grado  $\alpha = 5/3$ .

2. (a) Escribiendo  $f(x, y) = (x^5 + y^5)^{1/3}$ ,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x \left( \frac{1}{3} (x^5 + y^5)^{-2/3} 5x^4 \right) + y \left( \frac{1}{3} (x^5 + y^5)^{-2/3} 5y^4 \right) \\ &= \frac{5}{3} (x^5 + y^5)^{-2/3} (x^5 + y^5) = \frac{5}{3} (x^5 + y^5)^{1/3} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^5 + y^5}. \end{aligned}$$

(b) La función es homogénea de grado  $\alpha = 5/3$ . Usando el teorema de Euler

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y) = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^5 + y^5}.$$

3. Fijemos  $x \in \mathbb{R}^n$  y consideremos la función  $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\varphi(t) = f(tx)$ , es decir  $\varphi(t) = t^\alpha f(x)$ . Derivando directamente obtenemos la matriz jacobiana de la transformación  $\varphi$ , es decir

$$\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x). \quad (1)$$

Por otra parte, y usando la regla de la cadena,

$$\varphi'(t) = f'(tx) \cdot x = \nabla f(tx) \cdot x. \quad (2)$$

Identificando (1) y (2) y particularizando en  $t = 1$  obtenemos

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

## 12.8. Invertibilidad local y teorema fundamental del Cálculo

Para  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$  se considera la función

$$f(x, y) = \left( \int_y^x \sin t \, dt, \int_{\pi/2}^{x+y} \cos \left( t - \frac{\pi}{2} \right) dt \right).$$

Calcular  $(f^{-1})'(0, 0)$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Recordemos el teorema de la función inversa.

**Teorema** (de la función inversa). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que:

(i)  $f$  es diferenciable con continuidad en  $A$ .

(ii)  $\det f'(a) \neq 0$ .

Entonces, existe un abierto  $V \subset A$  que contiene a  $a$  y un abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $f : V \rightarrow W$  es biyectiva (por tanto existe  $f^{-1} : W \rightarrow V$ ). Se verifica además:

- (a)  $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$  si  $y = f(x) \in W$ , o dicho en palabras, la jacobiana de la inversa es la inversa de la jacobiana.  
 (b) Si  $f$  es de clase  $k$  en  $A$ , también  $f^{-1}$  es de clase  $k$  en  $W$ .

Debido a la continuidad de las funciones seno y coseno,  $f$  está bien definida. Si  $x = y$  y  $x + y = \pi/2$  entonces  $f(x, y) = (0, 0)$ , es decir  $f(\pi/4, \pi/4) = (0, 0)$  o bien,

$$f^{-1}(0, 0) = (\pi/4, \pi/4).$$

Teniendo en cuenta que  $a = (\pi/4, \pi/4)$  es un punto interior de  $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$  podemos elegir un abierto  $A \subset [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$  y que contiene al punto  $a$ . Veamos que se verifican las hipótesis del teorema de la función inversa.

(i)  $f = (f_1, f_2)$  es diferenciable con continuidad en  $A$ . En efecto, usando el teorema fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sin x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\sin y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \cos(x + y - \pi/2), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \cos(x + y - \pi/2).$$

Estas parciales están definidas y son continuas en el abierto  $A$ , por tanto  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ . Es decir,  $f$  es diferenciable con continuidad en  $A$ .

(ii)  $\det f'(a) \neq 0$ . Efectivamente

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det f'(a) = \sqrt{2} \neq 0.$$

Entonces

$$(f^{-1})'(0, 0) = [f'(\pi/4, \pi/4)]^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

## 12.9. Invertibilidad local con series de potencias

Sea  $(a_n)_0^\infty$  una sucesión de números reales tales que  $a_n > 0$  para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Supongamos que la serie de potencias  $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$  tiene radio de

convergencia  $R > 1$ . Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R, |y| < R\}$  y definimos  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  por:

$$f(x, y) = \left( y \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right).$$

- (a) Demostrar que  $f$  es de clase 1 en todos los puntos de  $D$ .
- (b) Demuéstrese que  $f$  es localmente invertible en el punto  $(1, 1)$  sí, y sólo si, la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es distinta de la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Consideremos las funciones componentes de  $f$  :

$$f_1(x, y) = y \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2(x, y) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

Teniendo en cuenta que toda serie de potencias se puede derivar término a término en el interior del intervalo de convergencia, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= y \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = y \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Estas parciales son continuas en  $D$  pues la función a la que da lugar toda serie de potencias es derivable en el interior del intervalo de convergencia. En consecuencia,  $f_1 \in \mathcal{C}^1(D)$ . Análogas consideraciones para  $f_2$ . Por tanto,  $f = (f_1, f_2)$  es de clase 1 en  $D$ .

- (b) Como  $R > 1$ , existe un abierto  $A$  tal que  $(1, 1) \in A \subset D$  en el que la función  $f$  es de clase 1. La matriz jacobiana de  $f$  en  $(1, 1)$  es:

$$f'(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n & \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\det f'(1, 1) = 0 \Leftrightarrow \left( \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \right)^2 - \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{n=0}^{\infty} na_n \right)^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^2.$$

Como  $a_n > 0$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ , los números  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} na_n$  son positivos. En consecuencia  $\det f'(0, 0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n$ . De acuerdo con el teorema de la función inversa, podemos asegurar que  $f$  es localmente invertible en  $(1, 1)$  sí, y sólo si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} na_n$ .

## 12.10. Teorema de la función implícita (en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

1. Se considera la función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$  y el punto  $(a, b) = (1, 2)$ .

(a) Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de la función implícita en  $(a, b)$ .

(b) Deducir que la ecuación  $F(x, y) = 0$  determina una única función implícita  $y = f(x)$ . (c) Calcular  $f'(1)$ .

2. Comprobar que la ecuación  $x^2y + 3y^3 - 2y^2 - 2 = 0$  determina una función implícita  $y = f(x)$  en un entorno del punto  $(1, 1)$ . Hallar  $f'(1)$ .

**Solución.** Recordamos el teorema de la función implícita.

**Teorema** (de la función implícita en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Sean  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  abierto,  $(a, b) \in A$  y  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Supongamos que se verifica

(i)  $F(a, b) = 0$ .

(ii)  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ .

(iii)  $(D_2f)(a, b) \neq 0$ .

Entonces, existe un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}$  que contiene a  $a$  y un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}$  que contiene a  $b$  tales que para cada  $x \in V$  existe un único  $y \in W$  tal que  $F(x, y) = 0$ .

La función  $f : V \rightarrow W$  definida por  $f(x) = y$  (llamada función implícita) es de clase 1 en  $W$ . Además, si  $F$  es de clase  $k$  en  $A$  entonces  $f$  es de clase  $k$  en  $V$ .

1. (a) (i)  $F(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 5 = 0$ .

(ii) Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

que claramente son continuas en todo el abierto  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , lo cual implica  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ .

$$(iii) \frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = 4 \neq 0.$$

Se verifican las hipótesis del teorema.

(b) De acuerdo con el teorema de la función implícita, la ecuación  $x^2 + y^2 - 5 = 0$  determina una única función implícita  $y = f(x)$  en un entorno de  $(1, 2)$ .

(c) En general, si  $y = f(x)$  es la función determinada por  $F(x, y) = 0$  en un entorno de un determinado punto, derivando respecto de  $x$  obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \text{ o bien } y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

En nuestro caso

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por supuesto que no siempre va a ser posible despejar  $y$  en función de  $x$ , es decir, dar la función en forma explícita. En nuestro caso, sí podemos:

$$y = f(x) = \sqrt{5 - x^2}, \text{ y } f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}.$$

Por tanto  $f'(1) = -1/2$ .

2. Denominemos  $F(x, y) = x^2y + 3y^3 - 2y^2 - 2$ . Se verifica  $F(1, 1) = 0$ . Las parciales  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 9y^2 - 4y$  son claramente continuas en el abierto  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 6 \neq 0$ . Es decir, en un entorno de  $(1, 1)$  la ecuación dada determina una función  $y = f(x)$ . Además se verifica

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

### 12.11. Función implícita con teorema fundamental del Cálculo

(a) Probar que la expresión

$$x^6 y + y^2 \int_0^x \frac{1}{1 + \sin^6 t} dt + y^5 - 1 = 0$$

define a  $y$  como una función implícita diferenciable  $y = f(x)$  en un entorno del punto  $(0, 1)$ .

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(0, 1)$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Denominemos

$$F(x, y) = x^6 y + y^2 \int_0^x \frac{1}{1 + \sin^6 t} dt + y^5 - 1.$$

Aplicando conocidas propiedades, es claro que  $F$  está definida en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y que  $F(0, 1) = 0$ . Por otra parte y usando el teorema fundamental del Cálculo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^5 y + y^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin^6 x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^6 + 2y \int_0^x \frac{1}{1 + \sin^6 t} dt + 5y^4.$$

Estas parciales son continuas en el abierto  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y además  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 5 \neq 0$ . Es decir, la ecuación dada determina una función diferenciable  $y = f(x)$  en un entorno del punto  $(0, 1)$ .

(b) La ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(0, 1)$  viene dada por  $y - 1 = f'(0)(x - 0)$ . Pero

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = -1/5,$$

con lo cual la ecuación de la recta pedida es  $x + 5y - 5 = 0$ .

### 12.12. Teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

1. (a) Probar que el sistema

$$\begin{cases} xz^3 + y^2 u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2 z = 0, \end{cases}$$



define a  $z, u$  como funciones implícitas diferenciables de las variables  $x, y$  en un entorno del punto  $P(0, 1, 0, 1)$ .

(b) Hallar las derivadas parciales en el punto  $a = (0, 1)$  de las funciones implícitas  $z = z(x, y)$  y  $u = u(x, y)$  que determinan el sistema anterior.

2. Demostrar que la ecuación  $x^2y + y^2x + z^2 \cos(xz) = 1$  define a  $z$  como función implícita  $z = z(x, y)$  en un entorno del punto  $P(0, \sqrt{2}, 1)$ . Hallar las derivadas parciales  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}), \frac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2})$ .

3. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0 \end{cases}$$

define funciones diferenciables  $y = y(x), z = z(x)$  de la variable independiente  $x$  en un entorno del punto  $P(1, -2, 2)$ . Hallar  $y'(1), z'(1), y''(1), z''(1)$ .

**Solución.** Recordamos el teorema de la función implícita.

**Teorema** (de la función implícita en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ) Sean  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  abierto,  $(a, b) \in A$  y  $F = (F_1, \dots, F_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función. Supongamos que se verifica

(i)  $F(a, b) = 0$ .

(ii)  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ .

(iii)  $\det \begin{bmatrix} D_{n+1}F_1(a, b) & D_{n+2}F_1(a, b) & \dots & D_{n+m}F_1(a, b) \\ D_{n+1}F_2(a, b) & D_{n+2}F_2(a, b) & \dots & D_{n+m}F_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n+1}F_m(a, b) & D_{n+2}F_m(a, b) & \dots & D_{n+m}F_m(a, b) \end{bmatrix} \neq 0$ .

Entonces, existe un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $a$  y un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^m$  que contiene a  $b$  tales que para cada  $x \in V$  existe un único  $y \in W$  tal que  $F(x, y) = 0$ .

La función  $f : V \rightarrow W$  definida por  $f(x) = y$  (llamada función implícita) es de clase 1 en  $W$ . Además, si  $F$  es de clase  $k$  en  $A$  entonces  $f$  es de clase  $k$  en  $V$ .

1. a) Consideremos la función  $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, y, z, u) = (xz^3 + y^2u^3 - 1, 2xy^3 + u^2z).$$

Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto dado. En efecto, como  $F(0, 1, 0, 1) = (0 + 1 - 1, 0 + 0) = (0, 0)$ , se

cumple (i).

Las parciales de las funciones componentes de  $F$  son

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = z^3, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yu^3, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3xz^2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = 3y^2u,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y^3, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = u^2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} = 2uz.$$

Estas parciales son continuas en todo  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  y en particular en cualquier abierto  $A$  que contenga al punto dado, es decir  $F \in \mathcal{C}^1(A)$  y por tanto se verifica (ii).

Veamos que se cumple (iii):

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix} = 6xz^3u - 3y^2u^3.$$

Sustituyendo en  $(x, y, z, u)$  la coordenadas del punto dado  $(0, 1, 0, 1)$  obtenemos que el determinante es  $-3 \neq 0$ . Por tanto, también se cumple (iii). Como consecuencia el sistema dado define una función  $(z, u) = (z(x, y), u(x, y))$  de clase 1 (y por tanto diferenciable) un entorno de  $P = (a, b)$  con  $a = (0, 1)$  y  $b = (0, 1)$ .

(b) Derivando las igualdades dadas primero respecto de  $x$  y luego respecto de  $y$  obtenemos

$$S_1 : \begin{cases} z^3 + 3xz^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 2y^3 + 2uz \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 3xz^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2yu^3 + 3y^2u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ 6xy^2 + 2uz \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo  $(x, y)$  por  $a = (0, 1)$  y  $(z, u)$  por  $b = (0, 1)$  en los sistemas  $S_1$  y  $S_2$  obtenemos

$$S'_1 : \begin{cases} 3 \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) = 0 \\ 2 + \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 0, \end{cases} \quad S'_2 : \begin{cases} 2 + 3 \frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, las derivadas parciales pedidas son

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = -2/3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0.$$

2. Consideremos la función  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2 \cos(xz) - 1.$$

Se verifica  $F(0, \sqrt{2}, 1) = 0$ . Las parciales de  $F$  son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y^2 - z^3 \sin(xz),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z \cos(xz) - xz^2 \sin(xz).$$

Estas parciales son continuas en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , en particular en cualquier subconjunto abierto  $A$  que contiene al punto  $P(0, \sqrt{2}, 1)$ . Es decir,  $F \in C^1(A)$ .

Por otra parte, tenemos  $\det \left[ \frac{\partial F}{\partial z}(0, \sqrt{2}, 1) \right] = 2 \neq 0$ . Concluimos que la ecuación dada define una única función implícita  $z = z(x, y)$  de clase 1 (y por tanto diferenciable) un entorno de  $P = (a, b)$  con  $a = (0, \sqrt{2})$  y  $b = 1$ . Derivando la ecuación dada respecto de  $x$  y respecto de  $y$  obtenemos

$$2xy + y^2 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos(xz) + z^2(-\sin(xz))(z + x \frac{\partial z}{\partial x}) = 0,$$

$$x^2 + 2xy + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos(xz) + z^2(-\sin(xz))x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Sustituyendo  $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$  obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}) = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2}) = 0.$$

3. Consideremos la función  $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, y, z) = (7x^2 + y^2 - 3z^2 + 1, 4x^2 + 2y^2 - 3z^2).$$

Se verifica  $F(1, -2, 2) = (0, 0)$ . Las parciales de  $F_1$  y  $F_2$  son

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 14x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -6z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -6z.$$

Estas parciales son continuas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , en particular en cualquier subconjunto abierto  $A$  que contiene al punto  $P(1, -2, 2)$ . Es decir,  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ . Por otra parte

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & -6z \\ 4y & -6z \end{vmatrix} = 12yz.$$

Sustituyendo en  $(x, y, z)$  la coordenadas del punto dado  $(1, -2, 2)$  obtenemos que el determinante es  $-48 \neq 0$ . Concluimos que el sistema dado define una única función implícita  $(y, z) = (y(x), z(x))$  de clase 1 (y por tanto diferenciable) un entorno de  $P = (a, b)$  con  $a = 1$  y  $b = (-2, 2)$ . Derivando las ecuaciones dadas respecto de  $x$  obtenemos

$$\begin{cases} 14x + 2yy' - 6zz' = 0 \\ 8x + 4yy' - 6zz' = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema en las incógnitas  $y', z'$  obtenemos  $y' = 3x/y$ ,  $z' = (10x)/(3z)$ . Derivando estas dos últimas igualdades respecto de  $x$

$$\begin{cases} y' = \frac{3x}{y} \\ z' = \frac{10x}{3z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' = 3 \frac{y - xy'}{y^2} \\ z'' = \frac{10}{3} \frac{z - xz'}{z^2}. \end{cases}$$

Sustituyendo en  $(x, y, z)$  la coordenadas del punto dado  $(1, -2, 2)$ :

$$y'(1) = -\frac{3}{2}, \quad z'(1) = \frac{5}{3}, \quad y''(1) = -\frac{3}{8}, \quad z''(1) = \frac{5}{18}.$$

### 12.13. Puntos críticos: casos dudosos

A. Analizar el carácter del punto singular  $(0, 0)$  para la función

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

B. Dada la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + axy - 2y^2$ , analizar el carácter del punto crítico  $(0, 0)$  según los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .

(Propuestos en examen, Cálculo, ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** A. Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xy + 8x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

lo cual implica que  $(0, 0)$  es efectivamente un punto singular de  $f$ . Hallemos la matriz hessiana correspondiente.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6y + 24x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

$$H(f, (0, 0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

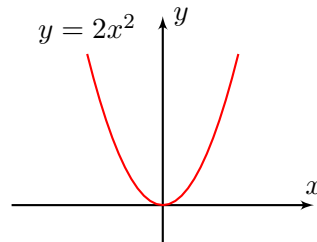
Dado que  $\det H(f, (0, 0)) = 0$ , tenemos caso dudoso. Procedemos a estudiar el signo del incremento  $\Delta(x, y) = f(x, y) - f(0, 0)$  en un entorno de  $(0, 0)$  :

$$\Delta(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

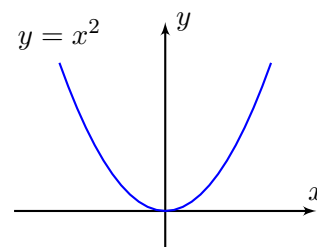
Fatorizamos el polinomio  $\Delta(x, y)$  resolviendo con respecto a  $y$  la ecuación de segundo grado  $y^2 - 3x^2y + 2x^4 = 0$  :

$$y = \frac{3x^2 \pm \sqrt{9x^4 - 8x^4}}{2} = \frac{3x^2 \pm x^2}{2} = \{2x^2, x^2\}.$$

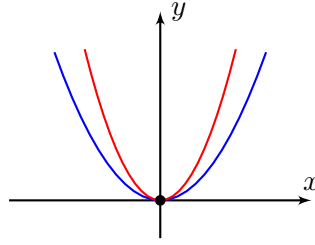
por tanto  $\Delta(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$ . Analicemos el signo de  $y - 2x^2$  :



En el *interior* de la parábola,  $y - 2x^2 > 0$ , en el *exterior*  $y - 2x^2 < 0$  y en la parábola,  $y - 2x^2 = 0$ . Analicemos ahora el de  $y - x^2$  :



En el *interior* de la parábola,  $y - x^2 > 0$ , en el *exterior*  $y - x^2 < 0$  y en la parábola  $y - x^2 = 0$ .



Eso implica que en todo entorno  $V$  del origen hay puntos en los que  $\Delta(x, y) < 0$  y puntos en los que  $\Delta(x, y) > 0$ . Es decir, en  $(0, 0)$  no existe extremo local y tenemos por tanto un punto de silla.

B. Hallemos las parciales de  $f$  hasta orden 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + ax - 4y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

El origen es por tanto punto crítico de la función. La matriz hessiana es:

$$H = \begin{bmatrix} -4 & a \\ a & -4 \end{bmatrix}.$$

y sus menores principales son  $H_1 = -4$ ,  $H_2 = 16 - a^2$ . Para  $H_2 < 0$  o bien  $|a| > 4$  no hay extremo. Para  $H_2 > 0$  o bien  $|a| < 4$ , y dado que  $H_1 < 0$  la forma cuadrática dada por  $H$  es definida negativa y tenemos máximo local. Para  $H_2 = 0$  o bien  $a = \pm 4$  obtenemos caso dudoso. Para  $a = 4$  analicemos signo del incremento de la función en un entorno de  $(0, 0)$  :

$$\Delta(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Los incrementos a lo largo de las rectas  $y = x$  e  $y = -x$  son:

$$\Delta(x, x) = 2x^4, \quad \Delta(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4)$$

Esto implica que  $\Delta(x, x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  y para valores próximos de  $x$  a 0,  $\Delta(x, -x) < 0$ . En  $(0, 0)$  no hay extremo local. Análogo razonamiento para  $a = -4$ . Podemos concluir:

$$\begin{aligned} |a| \geq 4 &\Rightarrow (0, 0) \text{ es punto de silla para } f, \\ |a| < 4 &\Rightarrow (0, 0) \text{ es punto de máximo local para } f. \end{aligned}$$

**12.14. Puntos críticos de  $f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$**

(a) Dibujar en el plano el dominio de la función escalar

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k.$$

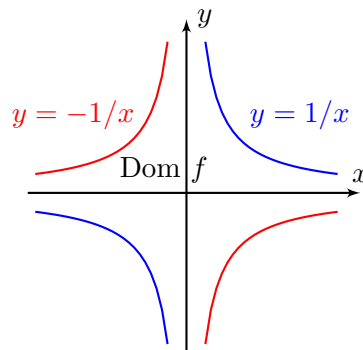
(b) Hallar y clasificar los puntos críticos de  $f$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

(a) La serie dada es una serie geométrica de razón  $xy$ , en consecuencia es convergente si y sólo si se verifica  $|xy| < 1$  o equivalentemente, si y sólo si  $-1 < xy < 1$ . El dominio de  $f$  es por tanto:

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\}$$

Corresponde pues al conjunto abierto del plano que contiene al origen y cuya frontera son las hipérbolas equiláteras  $y = 1/x$  e  $y = -1/x$ .



(b) Aplicando la conocida fórmula de la suma de la serie geométrica:

$$f(x, y) = 1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + \dots = \frac{1}{1 - xy} \quad (|xy| < 1).$$

Hallemos los puntos críticos de  $f$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(1 - xy)^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(1 - xy)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Hallemos las parciales de orden dos de  $f$  en el punto crítico  $(0, 0)$  :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2(1 - xy)(-y)y}{(1 - xy)^4} = \frac{2y^2}{(1 - xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1(1-xy)^2 - 2(1-xy)(-x)y}{(1-xy)^4} = \frac{xy+1}{(1-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(1-xy)(-x)x}{(1-xy)^4} = \frac{2x^2}{(1-xy)^3}.$$

La matriz hessiana de  $f$  en el punto crítico  $(0, 0)$  es:

$$H(f, (0, 0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que  $\det H(f, (0, 0)) = -1 < 0$ , en el punto  $(0, 0)$  no hay extremo (punto de ensilladura).

**Solución.**

## 12.15. Máximos y mínimos condicionados, multiplicadores de Lagrange

1. Hallar los extremos de la función  $f(x, y) = x + 2y$  con la condición  $x^2 + y^2 = 5$ .
2. Hallar los extremos de la función  $f(x, y) = xy$  con la condición  $x + y = 1$ .
3. Hallar los extremos de la función  $f(x, y) = x + 2y$  con la condición  $x^2 + y^2 = 5$  sin usar el método de los multiplicadores de Lagrange.
4. Hallar los extremos de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  con las condiciones  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2$ .

**Solución.** Recordamos los siguientes teoremas:

**Teorema 1.** (Condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  de clase 1 en  $A$ . Sean  $g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $m < n$  funciones de clase 1 en  $A$ .

Sea  $M = \{x \in A : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$  y  $a \in M$ . Supongamos que

$$(a) \operatorname{rg} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = m \text{ (es decir, la matriz tiene rango máximo)}.$$



(b)  $f$  tiene extremo local condicionado en  $a$ , es decir o bien existe un entorno  $V(a)$  de  $a$  tal que  $f(x) \leq f(a)$  para todo  $x \in V(a) \cap M$  (máximo local condicionado), o bien existe un entorno  $V(a)$  de  $a$  tal que  $f(x) \geq f(a)$  para todo  $x \in V(a) \cap M$  (mínimo local condicionado).

Entonces, existen unos únicos números reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  (llamados multiplicadores de Lagrange) tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) = 0. \end{cases}$$

**Teorema 2** (Condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados). Supongamos que  $a$  verifica las condiciones necesarias del teorema anterior. Supongamos además que  $A$  es convexo y que  $f, g_1, \dots, g_m$  son de clase 2 en  $a$ . Consideremos la función definida en  $A$  (función de Lagrange) :

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n).$$

Consideremos la matriz simétrica (llamada hessiana de  $F$  en  $a$ ):

$$H(a) = \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Entonces:

- (i) Si  $H(a)$  es definida positiva,  $f$  tiene en  $a$  mínimo local condicionado.
- (ii) Si  $H(a)$  es definida negativa,  $f$  tiene en  $a$  máximo local condicionado.

Nota En los siguiente ejemplos, obviaremos la comprobación de que las funciones que aparecen son de clase 2, pues esto se deduce de manera casi inmediata de las propiedades de las funciones elementales en sus dominios de definición.

1. La función de Lagrange es  $F(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ . Hallemos los puntos críticos, es decir los puntos  $a$  que satisfacen las condiciones necesarias del Teorema 1. Serán las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos para  $\lambda = 1/2$  el punto  $(x, y) = (-1, -2)$ , y para  $\lambda = -1/2$  el  $(x, y) = (1, 2)$ . Fácilmente se comprueba la condición de rango

máximo en estos puntos. Las parciales segundas de  $F$  son

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

y las matrices hessianas correspondientes:

$$H(-1, -2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (def. pos.)}, \quad H(1, 2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (def. neg.)}.$$

Por tanto, tenemos en  $(-1, -2)$  mínimo local condicionado para  $f$  y en  $(1, 2)$  máximo local condicionado para  $f$ .

2. Función de Lagrange:  $F(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$ . Puntos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos para  $\lambda = -1/2$  el punto  $(x, y) = (1/2, 1/2)$ . Fácilmente se comprueba la condición de rango máximo en estos puntos. Las parciales segundas de  $F$  son  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$  y la matriz hessiana correspondiente:

$$H(1/2, 1/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz no es ni definida positiva ni definida negativa, por tanto nada asegura el teorema 2. Pero en este caso, la condición  $x + y = 1$  se expresa en paramétricas en la forma  $x = t$ ,  $y = 1 - t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Sustituyendo en  $f(x, y)$  obtenemos la función de una variable

$$\varphi(t) = f(t, 1 - t) = t - t^2.$$

Procedemos ahora al cálculo de los extremos de  $\varphi$ :  $\varphi'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$  y  $\varphi''(1/2) = -2 < 0$ , lo cual implica que para  $t = 1/2$  tenemos un máximo local. Sustituyendo en las paramétricas, concluimos que en  $(x, y) = (1/2, 1/2)$  tenemos máximo local condicionado para  $f$ .

Nota El usar las ecuaciones paramétricas de la condición (o condiciones) es una de las estrategias para analizar la existencia extremos locales condicionados cuando la matriz hessiana no es ni definida positiva ni definida negativa. En cualquier caso, si no se exige usar el método de los multiplicadores de Lagrange, podemos por supuesto utilizar la estrategia mencionada.

Resolvemos a continuación de esta manera el ejercicio 1.

3. La condición es una circunferencia de centro el origen y radio  $\sqrt{5}$  cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = \sqrt{5} \cos t$ ,  $y = \sqrt{5} \sin t$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Sustituyendo en la función obtenemos  $\varphi(t) = \sqrt{5}(\cos t + 2 \sin t)$  y  $\varphi'(t) = \sqrt{5}(-\sin t + 2 \cos t) = 0$  si  $\tan t = 2$ . Esta ecuación tiene dos soluciones,  $t_1 \in (0, \pi/2)$  y  $t_2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$ .

La derivada segunda es  $\varphi''(t) = \sqrt{5}(-\cos -2 \sin t)$ . Dado que  $t_1$  pertenece al primer cuadrante y  $t_2$  al tercero, se verifica  $\varphi''(t_1) < 0$ ,  $\varphi''(t_2) > 0$ , es decir en  $t_1$  tenemos máximo local para  $\varphi$  y en  $t_2$ , mínimo. Hallemos ahora los valores de  $x$  e  $y$  que corresponden a esos valores hallados de  $t$ . De  $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$  obtenemos  $\cos t = \sqrt{1/(1 + \tan^2 t)}$ .

Como  $\tan t_i = 2$  ( $i = 1, 2$ ) deducimos  $\cos t_1 = +1/\sqrt{5}$ ,  $\cos t_2 = -1/\sqrt{5}$ . Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas obtenemos respectivamente  $(x, y) = (1, 2)$  (punto de máximo local condicionado para  $f$ ) y  $(x, y) = (-1, -2)$  (punto de mínimo local condicionado para  $f$ ).

4. Función de Lagrange:  $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(z - 2)$ . Puntos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos para  $(\lambda, \mu) = (\sqrt{2}/2, -1)$  el punto  $P(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 2)$  y para  $(\lambda, \mu) = (-\sqrt{2}/2, -1)$  el punto  $Q(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 2)$ . Podemos comprobar fácilmente la condición de rango máximo en estos puntos. Las parciales segundas de  $F$  son

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

y las matrices hessianas correspondientes:

$$H(P) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(Q) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estas matrices no son ni definida positiva ni definida negativa, por tanto nada asegura el teorema 2. Procedemos a usar las ecuaciones paramétricas de

las condiciones, es decir  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Obtenemos la función

$$\varphi(t) = F(x(t), y(t), z(t)) = \cos t + \sin t + 2 \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Fácilmente deducimos que para  $t = \pi/4$  y  $t = 5\pi/4$  hay respectivamente máximo local y mínimo local para  $\varphi$ . Sustituyendo estos valores de  $t$  en las paramétricas obtenemos que  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 2)$  es punto de máximo local condicionado para  $f$  y  $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 2)$  de mínimo.

## 12.16. Paralelepípedo inscrito en un elipsoide

Calcular el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

**Solución.** Sea  $(x, y, z)$  el vértice del paralelepípedo que está en el primer cuadrante. El volumen de este es por tanto  $V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$ . Es decir, se trata de hallar el máximo de  $V_1 = xyz$  con la condición  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ). Función de Lagrange:

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1).$$

Puntos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x/a^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y/b^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z/c^2 = 0 \\ x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1. \end{cases}$$

Siendo  $V_1 \geq 0$ , para  $x = 0$  o  $y = 0$  o  $z = 0$  obtenemos mínimo absoluto. Por tanto solo consideraremos soluciones para  $x, y, z$  positivas. Despejando  $\lambda$ :

$$\lambda = -\frac{yza^2}{2x} = -\frac{xzb^2}{2y} = -\frac{xyz^2}{2z} \Rightarrow \begin{cases} y^2 a^2 = x^2 b^2 \\ z^2 a^2 = x^2 c^2. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de  $y^2 = x^2 b^2/a^2$ ,  $z^2 = x^2 c^2/a^2$  en la ecuación del elipsoide obtenemos el punto  $P_0 = (a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$ .

En tal punto,  $V_1 = xyz$  se hace máximo. Efectivamente, al ser  $V_1$  continua sobre un conjunto compacto,  $V_1$  alcanza al menos un máximo absoluto. Los posibles puntos en donde  $V_1$  puede alcanzar un extremo son las intersecciones

de los planos coordenados con el elipsoide o el punto  $P_0$ . En los primeros hemos visto que  $V_1$  alcanzaba un mínimo. Por tanto, el máximo absoluto lo alcanza  $V_1$  en  $P_0$ , siendo el valor máximo de  $V = 8V_1$ :

$$V_{\text{máx}}(P_0) = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc.$$

## 12.17. Extremos absolutos sobre compactos

1. Considérese la función  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x, y) = \frac{-2(x + y)}{x^2 + y^2}.$$

Determinar sus extremos absolutos sobre la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

2. ¿Cuanto vale y en qué punto alcanza su máximo la función  $f(x, y) = (x|y| - y|x|)^{113}$  sobre el compacto  $x^2 + y^2 \leq 1$ ?

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

3. Calcular los extremos absolutos de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \int_0^{(x+y)^3} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^4 t} dt,$$

sobre el compacto  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1. Hallemos los puntos críticos en el interior del compacto  $D$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x(x + y)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2y(x + y)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \cdot \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Igualando a 0 ambas parciales obtenemos necesariamente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy = 0 \\ -x^2 + y^2 + 2xy = 0. \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones queda  $4xy = 0$ . Si  $x = 0$  se deduce que  $y = 0$ , y si  $y = 0$ , que  $x = 0$ , pero la función no está definida en  $(0, 0)$ . Analicemos ahora la función en la frontera del compacto. Los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  se pueden expresar en la forma  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . La función  $f$  en esta circunferencia la podemos expresar en la forma:

$$\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = \frac{-2(\cos t + \sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -2(\cos t + \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Tenemos  $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow -2(-\sin t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow \tan t = 1$ . Los únicos puntos críticos de la función  $\varphi$  en  $(0, 2\pi)$  son  $t = \pi/4$  y  $t = 5\pi/4$ , para los cuales obtenemos los valores  $\varphi(\pi/4) = -2\sqrt{2}$  y  $\varphi(5\pi/4) = 2\sqrt{2}$ .

Los valores de  $\varphi$  en los extremos del intervalo son  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = -2$ . El máximo absoluto de  $\varphi$  es por tanto  $2\sqrt{2}$  y el mínimo absoluto  $-2\sqrt{2}$  para los que obtenemos respectivamente los puntos  $(\cos 5\pi/4, \sin 5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  y  $(\cos \pi/4, \sin \pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

Procediendo de manera análoga en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$  obtenemos que el máximo absoluto es  $\sqrt{2}$  y el mínimo absoluto  $-\sqrt{2}$ . De la comparación de los extremos absolutos de la función  $f$  en las dos circunferencias, deducimos los extremos absolutos pedidos:

$$f_{\max}(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}, \quad f_{\min}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2}.$$

2. Como 113 es un número impar, la función  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(t) = t^{113}$  es estrictamente creciente, en consecuencia los puntos en donde existe máximo para  $f(x, y)$  son los mismos para los que se obtiene máximo para la función  $g(x, y) = x|y| - y|x|$ . Llamando  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) al cuadrante  $C_i$  del plano:

$$g(x, y) = \begin{cases} xy - yx = 0 & \text{si } (x, y) \in C_1 \\ xy - y(-x) = 2xy & \text{si } (x, y) \in C_2 \\ x(-y) - y(-x) = 0 & \text{si } (x, y) \in C_3 \\ x(-y) - yx = -2xy & \text{si } (x, y) \in C_4 \end{cases}$$

Llamemos  $K$  al compacto  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dado que en  $C_1 \cap K$  y  $C_3 \cap K$  la función  $g$  es constante, bastará analizar la función en  $C_2 \cap K$  y  $C_4 \cap K$ .

El único punto crítico de la función  $g$  en  $C_2 \cap K$  es el  $(0, 0)$  que no pertenece a su interior. Analicemos la función  $g$  en la frontera de  $C_2 \cap K$ . Para todos sus puntos sobre los ejes, la función se anula y sus puntos sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  son de la forma  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [\pi/2, \pi]$ . La función en este cuarto de circunferencia es por tanto

$$\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = 2 \cos t \sin t = \sin 2t \quad (t \in [\pi/2, \pi]).$$

Tenemos

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0.$$

El único punto crítico de la función  $\varphi$  en  $(\pi/2, \pi)$  es  $t = 3\pi/4$ , para el cual obtenemos el valor  $\varphi(3\pi/4) = \sin 3\pi/2 = -1$ . El valor de  $\varphi$  en los extremos del intervalo son  $\varphi(\pi/2) = \varphi(\pi) = 0$ . El máximo absoluto de  $\varphi$  es por tanto 0 y el mínimo absoluto  $-1$ .

Procediendo de manera análoga en  $C_4 \cap K$  obtenemos para la correspondiente función  $\varphi$  en el intervalo  $[3\pi/2, 2\pi]$ , máximo absoluto 1 obtenido en  $t = 7\pi/4$  y mínimo absoluto 0.

De la comparación de los valores obtenidos, deducimos que en el compacto  $K$ , la función  $g$  tiene máximo absoluto en  $(\cos 7\pi/4, \sin 7\pi/4) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  con valor 1 y mínimo absoluto en  $(\cos 3\pi/4, \sin 3\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  con valor  $-1$ . Por tanto, los máximos absolutos de la función  $f$  son:

$$f_{\max}(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 1^{113} = 1, \quad f_{\min}(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (-1)^{113} = -1.$$

3. Consideremos la función del tipo  $F(u) = \int_0^u \phi(t) dt$  con  $\phi$  continua y  $\phi \geq 0$  en  $\mathbb{R}$ . Aplicando el teorema fundamental del Cálculo,  $F'(u) = \phi(u) \geq 0$  con lo cual,  $F$  es creciente en  $\mathbb{R}$ . En nuestro caso:

$$\phi(t) = \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^4 t} \quad (\text{continua y } \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}).$$

Esto implica que los extremos absolutos de la función dada  $f$  se alcanzarán en los mismos puntos que los extremos absolutos de  $u(x, y) = (x + y)^3$  en el compacto  $\mathcal{C}$ . A su vez, y teniendo en cuenta que la función  $v^3$  es creciente en  $\mathbb{R}$ , los extremos absolutos de  $f$  se alcanzarán en los mismos puntos que los extremos absolutos de  $h(x, y) = x + y$  en el compacto  $\mathcal{C}$ .

La función  $h$  no tiene puntos críticos, y en la frontera  $x^2 + y^2 = 1$  de  $\mathcal{C}$  podemos escribir:

$$\varphi(t) = h(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Tenemos  $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow -\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \tan t = 1$ . Los únicos puntos críticos de la función  $\varphi$  en  $(0, 2\pi)$  son  $t = \pi/4$  y  $t = 5\pi/4$ , para los cuales obtenemos los valores  $\varphi(\pi/4) = \sqrt{2}$  y  $\varphi(5\pi/4) = -\sqrt{2}$ .

Los valores de  $\varphi$  en los extremos del intervalo son  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$ . El máximo absoluto de  $\varphi$  es por tanto  $\sqrt{2}$  y el mínimo absoluto  $-\sqrt{2}$  para los que

obtenemos respectivamente los puntos  $(\cos \pi/4, \sin \pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  y  $(\cos 5\pi/4, \sin 5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ . Podemos concluir que los extremos absolutos de  $f$  son:

$$f_{\max}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^4 t} dt,$$

$$f_{\min}(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \int_0^{-2\sqrt{2}} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^4 t} dt.$$

### 12.18. Puntos críticos de $g(x, y) = p(f(x)) + p(f(y))$

a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Demostrar que  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  y que dado  $b > 0$  existe un único  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) = b$ .

b) Sea  $p(x)$  un polinomio de grado 3 (con coeficientes reales) y con tres raíces reales distintas y positivas. Sea  $\alpha$  una raíz de  $p'(x)$  (derivada de  $p$ ). Demostrar que  $\text{signo}[p(\alpha)] = -\text{signo}[p''(\alpha)]$ . Probar además que si  $\beta \neq \alpha$  es otra raíz de  $p'$  entonces  $\text{signo}[p''(\alpha)] = -\text{signo}[p''(\beta)]$ .

c) Sea  $g(x, y) = p(f(x)) + p(f(y))$  siendo  $p$  un polinomio cumpliendo las hipótesis del apartado b) y  $f$  una función cumpliendo las hipótesis del apartado a). Calcular los puntos críticos de  $g(x, y)$ .

d) Clasificar los puntos críticos obtenidos en c).

e) Calcular los máximos y mínimos de  $g(x, y)$  bajo la restricción  $f(x) - f(y) = 0$ .

(Propuesto en examen, Cálculo, ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** a) Por hipótesis  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que  $f$  es estrictamente creciente en todo  $\mathbb{R}$ . Supongamos que existiera un  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) \leq 0$  entonces, existe un  $x_1 \in \mathbb{R}$  con  $f(x_1) < f(x_0)$ . Elijamos  $\epsilon = -f(x_1) > 0$ . Dado que  $f(x) < f(x_1)$  para todo  $x < x_1$  se verifica  $|f(x)| > \epsilon$  lo cual va en contra de la hipótesis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Hemos demostrado pues que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sea  $b > 0$ . De las hipótesis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  deducimos que existen números reales  $x_1, x_2$  con  $x_1 < x_2$  tales que  $f(x_1) < b <$



$f(x_2)$ . Como  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , la función  $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Por el teorema de los valores intermedios, existe  $a \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(a) = b$ . Este  $a$  es único debido al crecimiento estricto de  $f$ .

b) Sean  $a_1, a_2, a_3$  con  $a_1 < a_2 < a_3$  las tres raíces distintas de  $p(x)$ . Por el teorema de Rolle, las dos raíces  $\alpha < \beta$  de  $p'(x)$  están en los intervalos  $(a_1, a_2)$  y  $(a_2, a_3)$  respectivamente. Supongamos que  $p(\alpha) > 0$  y  $p''(\alpha) > 0$ . Entonces  $p$  tendría un mínimo local en  $\alpha$  con  $p(\alpha) > 0$ .

Por otra parte, la función  $p : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, y por el teorema de Weierstrass ha de tener un máximo y mínimo absolutos en  $[a_1, a_2]$ . Al ser  $0 = p(a_1) = p(a_2) < p(\alpha)$  el máximo absoluto se obtendría en un  $\gamma \in (a_1, a_2)$  y en consecuencia  $p'(\gamma) = 0$  con  $\gamma \neq \alpha$ , lo cual es absurdo pues  $p'$  sólo tiene una raíz en  $(a_1, a_2)$ . Análogos razonamientos para  $p(\alpha) < 0, p''(\alpha) < 0$ . También análogo razonamiento para  $\alpha \in (a_2, a_3)$ . Podemos pues concluir que signo  $[p(\alpha)] = -\text{signo } [p''(\alpha)]$ .

Las únicas raíces de  $p'(x)$  son  $\alpha$  y  $\beta$  por tanto,  $p'(x)$  se puede expresar en la forma  $p'(x) = \lambda(x - \alpha)(x - \beta)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por tanto

$$\begin{cases} p''(x) = \lambda(2x - \alpha - \beta) \\ p''(\alpha) = \lambda(\alpha - \beta) \\ p''(\beta) = \lambda(\beta - \alpha). \end{cases}$$

Como  $\alpha \neq \beta$  se concluye que signo  $[p''(\alpha)] = -\text{signo } [p''(\beta)]$ .

c) Teniendo en cuenta que  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = p'(f(x))f'(x) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = p'(f(y))f'(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p'(f(x)) = 0 \\ p'(f(y)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha \vee f(x) = \beta \\ \quad \quad \quad \wedge \\ f(x) = \alpha \vee f(x) = \beta. \end{cases}$$

Por el apartado a) existen únicos  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $f(\alpha_1) = \alpha$  y  $f(\beta_1) = \beta$ . Como  $\alpha < \beta$  y  $f$  es estrictamente creciente, además se cumple  $\alpha_1 < \beta_1$ . Los puntos críticos de  $g$  son por tanto

$$(\alpha_1, \alpha_1), (\alpha_1, \beta_1), (\beta_1, \alpha_1), (\beta_1, \beta_1).$$

d) En lo que sigue suponemos  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ . Las parciales segundas son

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = p''(f(x))(f'(x))^2 + p'(f(x))f''(x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = p''(f(y))(f'(y))^2 + p'(f(y))f''(y). \end{cases}$$

La matriz hessiana en  $(\alpha_1, \alpha_1)$  es

$$H(\alpha_1, \alpha_1) = \begin{bmatrix} p''(\alpha)(f'(\alpha_1))^2 & 0 \\ 0 & p''(\alpha)(f'(\alpha_1))^2 \end{bmatrix}$$

Análogamente

$$H(\beta_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} p''(\beta)(f'(\beta_1))^2 & 0 \\ 0 & p''(\beta)(f'(\beta_1))^2 \end{bmatrix}$$

Como  $\text{signo}[p''(\alpha)] = -\text{signo}[p''(\beta)]$ , estas dos matrices son de la forma

$$\begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix} \quad (\text{o viceversa}).$$

Por tanto, en  $(\alpha_1, \alpha_1)$ ,  $(\beta_1, \beta_1)$  tenemos máximo y mínimo local (o viceversa). La matriz hessiana en  $(\alpha_1, \beta_1)$  es

$$H(\alpha_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} p''(\alpha)(f'(\alpha_1))^2 & 0 \\ 0 & p''(\beta)(f'(\beta_1))^2 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es menor que cero lo cual implica que en  $(\alpha_1, \beta_1)$  tenemos punto de silla. Análogas consideraciones para el punto  $(\beta_1, \alpha_1)$ .

e) Como  $f$  es estrictamente creciente, la condición  $f(x) = f(y)$  equivale a  $x = y$ . Se trata pues de hallar los máximos y mínimos de la función  $h(x) = g(x, x) = 2p(f(x))$ . Tenemos

$$h'(x) = 2p'(f(x))f'(x) = 0 \Leftrightarrow p'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \alpha \vee f(x) = \beta \Leftrightarrow x = \alpha_1 \vee x = \beta_1.$$

La derivada segunda de  $h$  es

$$h''(x) = 2p''(f(x))(f'(x))^2 + 2p'(f(x))f''(x),$$

por tanto

$$h''(\alpha_1) = 2p''(\alpha)(f'(\alpha_1))^2, \quad h''(\beta_1) = 2p''(\beta)(f'(\beta_1))^2.$$

Usando de nuevo que  $\text{signo}[p''(\alpha)] = -\text{signo}[p''(\beta)]$ , concluimos que en  $(\alpha_1, \alpha_1)$  y  $(\beta_1, \beta_1)$  hay máximo y mínimo local para  $g$  respectivamente (o viceversa).

### 12.19. Extremos locales de una integral biparamétrica

Hallar y clasificar los puntos críticos de la función:

$$I(a, b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + a \sin x)^5 + 80b^2] dx.$$

**Solución.** Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  la función integrando  $f_{a,b} = (1 + a \sin x)^5 + 80b^2$  es continua en  $[-\pi/2, \pi/2]$ , lo cual implica que la función  $I$  está definida para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Hallemos sus puntos críticos.

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial I}{\partial a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + a \sin x)^5 + 80b^2] dx = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial b}(a, b) = \frac{\partial I}{\partial b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + a \sin x)^5 + 80b^2] dx = 0.$$

La función  $F(x, a, b) = f_{a,b}(x)$  tiene derivadas parciales continuas respecto de  $a$  y respecto de  $b$  en  $[-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R}^2$ , por tanto podemos aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral:

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5(1 + a \sin x)^4 \sin x dx = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 160b dx = 160\pi b = 0. \quad (2)$$

Usando la fórmula del binomio de Newton:

$$(1 + a \sin x)^4 \sin x = \sin x + 4a \sin^2 x + 6a^2 \sin^3 x + 4a^3 \sin^4 x + a^4 \sin^5 x.$$

La integral en  $[-\pi/2, \pi/2]$  de las funciones impares se anulan, en consecuencia la ecuación (1) equivale a

$$20a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + a^2 \sin^4 x) dx = 0. \quad (3)$$

La función integrando  $g(x) = \sin^2 x + a^2 \sin^4 x$  es continua, no negativa y no nula, en  $[-\pi/2, \pi/2, ]$  en consecuencia la integral anterior es  $> 0$ . Deducimos pues de (2) y (3) que el único punto crítico de  $I$  es  $(a, b) = (0, 0)$ . Las parciales segundas de  $I$  son:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a^2} I(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} \left( 20a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + a^2 \sin^4 x) dx \right)$$

$$= 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + a^2 \sin^4 x) dx + 20a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a \sin^4 x dx,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial^2 I}{\partial b \partial a}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial b^2}(a, b) = 160\pi.$$

Particularizando en el origen:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a^2}(0, 0) = 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a \partial b}(0, 0) = \frac{\partial^2 I}{\partial b \partial a}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial b^2}(0, 0) = 160\pi.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a^2}(0, 0) = 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx = 40 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$

$$= 40 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = 20 \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = 10\pi.$$

En consecuencia, la matriz hessiana de  $I$  en  $(0, 0)$  es

$$H(I, (0, 0)) = \begin{bmatrix} 10\pi & 0 \\ 0 & 160\pi \end{bmatrix}.$$

La matriz es definida positiva, por tanto  $(0, 0)$  es punto de mínimo relativo para  $I$ .

## 12.20. Continuidad uniforme y teorema de Tychonoff

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = x + \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0 \text{)}, \quad f(0, y) = 0.$$

- Determinar el subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^2$  en donde  $f$  es continua.
- Probar que  $f$  no es uniformemente continua en  $M$ .
- Estudiar la continuidad uniforme de  $f$  en el subconjunto de  $M : (1, 2) \times (1, 2)$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** (a) Para todo  $P_0(x_0, y_0)$  con  $x_0 \neq 0$  existe un entorno  $V$  de  $P_0$  en el que la función  $f$  está definida y es elemental, en consecuencia continua en  $P_0$ . Analicemos la continuidad de  $f$  en los puntos de la forma  $(0, y_0)$ . Si  $y_0 \neq 0$ , el límite según la recta  $y = y_0$  es:

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, y_0) \\ y = y_0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{y_0}{x} \right) = \infty.$$

es decir,  $f$  no es continua. Tampoco es continua en el origen. Efectivamente hallando los límites según las direcciones  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ):

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{mx}{x} \right) = m.$$

Es decir,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ .

(b) Para las sucesiones  $a_n = (1/n, 1)$  y  $b_n = (1/(n+1), 1)$  en  $M$  tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(a_n), f(b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - f(b_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1.$$

Por tanto, para todo  $\delta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  se verifica  $d(a_n, b_n) < \delta$ . Para  $\epsilon = 1/2$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$  se verifica  $d(f(a_n), f(b_n)) > \epsilon$ .

La función  $f$  no es uniformemente continua, pues para  $\epsilon = 1/2$  y para todo  $\delta > 0$ , existe  $(a_n, b_n)$  cumpliendo  $d(a_n, b_n) < \delta$  y  $|f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon$  (para ello basta que elijamos  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ).

(c) El intervalo  $[1, 2]$  de  $\mathbb{R}$  es cerrado y acotado, en consecuencia compacto. Por el teorema de Tychonoff, así lo es  $[1, 2] \times [1, 2]$ . Por ser  $f$  continua en este compacto y por un conocido teorema es uniformemente continua en él, en particular en  $(1, 2) \times (1, 2)$ .

## 12.21. Integral doble como producto de simples

Sea  $f$  una función continua real de variable real. Expresar la integral

$$\int_a^b \left( \int_x^b f(x)f(y) dy \right) dx$$

en términos de la integral  $\int_a^b f(x) dx$ . Como aplicación calcular la integral doble:

$$\iint_M \frac{xy}{(4+x^2)(4+y^2)} dx dy$$

siendo  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq \sqrt{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Como  $f$  es continua, admite una primitiva  $F$ . Entonces, usando la regla de Barrow y que una primitiva de  $f(x)F(x)$  es  $F^2(x)/2$ :

$$\begin{aligned} I &:= \int_a^b \left( \int_x^b f(x)f(y) dy \right) dx = \int_a^b f(x) \left( \int_x^b f(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x) (F(b) - F(x)) dx = F(b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x)F(x) dx \\ &= F(b)(F(b) - F(a)) - \left[ \frac{F^2(x)}{2} \right]_a^b = F(b)(F(b) - F(a)) - \frac{F^2(b) - F^2(a)}{2}. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} I &:= F(b)(F(b) - F(a)) - \frac{1}{2}(F(a) + F(b))(F(b) - F(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) \left( F(b) - \frac{F(b)}{2} - \frac{F(a)}{2} \right) = \frac{1}{2}(F(b) - F(a))^2. \end{aligned}$$

Podemos por tanto concluir que:

$$\int_a^b \left( \int_x^b f(x)f(y) dy \right) dx = \frac{1}{2} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2. \quad (*)$$

Para resolver la integral doble dada, expresamos:

$$J := \iint_M \frac{xy}{(4+x^2)(4+y^2)} dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_x^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^2} \frac{y}{4+y^2} dy \right) dx.$$

Usando (\*):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^2} dx \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \log(4+x^2) \right]_0^{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \log 6 - \frac{1}{2} \log 4 \right)^2 = \frac{1}{8} \log^2 \left( \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

### 12.22. Integral en el cubo unidad

Calcúlese

$$I = \int_M f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

en donde  $M = [0, 1]^3$  y  $f(x, y, z) = \text{máx} \{x, y, z\}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** Descomponemos la región  $M$  en tres subregiones:

$$M_1 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : y \leq x, z \leq x\},$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : x \leq y, z \leq y\},$$

$$M_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : x \leq z, y \leq z\}.$$

Entonces

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{si } (x, y, z) \in M_1 \\ y & \text{si } (x, y, z) \in M_2 \\ z & \text{si } (x, y, z) \in M_3. \end{cases}$$

Las regiones  $M_1, M_2, M_3$  son tres tetraedros con bases respectivas en los planos  $x = 1, y = 1$  y  $z = 1$ . La intersecciones de dos cualesquiera de estos tetraedros son conjuntos de medida nula en  $\mathbb{R}^3$  y por tanto irrelevantes para la integración. La integral pedida es por tanto

$$\begin{aligned} I &= \int_M f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f + \int_{M_3} f \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^x x dz + \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^y y dz + \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^z z dx \\ &= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 y^3 dy + \int_0^1 z^3 dz = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

### 12.23. Integral de superficie de una función homogénea

En  $\mathbb{R}^3$ , sea  $F(\vec{r})$  ( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ) una función escalar homogénea de grado  $m > 0$ . Sea  $S$  la esfera unidad  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  y sea  $\partial S$  su superficie frontera.

1. Transformar la integral de superficie  $\iint_{\partial S} F(\vec{r}) \, d\sigma$  en una integral triple extendida a la esfera  $S$ .

2. Como aplicación de lo anterior, calcular la integral de superficie

$$\iint_{\partial S} (Ax^4 + By^4 + Cz^4 + Dx^2y^2 + Ey^2z^2 + Fz^2x^2) d\vec{\sigma}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. El vector unitario  $\vec{n}$  es justamente  $\vec{r}$ , por tanto  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \|\vec{r}\|^2 = 1$ . Podemos entonces expresar

$$\iint_{\partial S} F(\vec{r}) d\sigma = \iint_{\partial S} F(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Suponiendo que  $F$  es de clase 1 en  $S$  y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial S} F(\vec{r}) d\sigma &= \iiint_S \operatorname{div} ((F(\vec{r}) \cdot \vec{r})) dV \\ &= \iiint_S (\nabla F(\vec{r}) \cdot \vec{r} + F(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{r}) dV. \end{aligned}$$

Como la función  $F$  es homogénea de grado  $m$ , se verifica  $\nabla F(\vec{r}) \cdot \vec{r} = mF(\vec{r})$  como consecuencia del teorema de Euler. Por otra parte, al ser  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$  queda:

$$\iint_{\partial S} F(\vec{r}) d\sigma = (m + 3) \iiint_S F(\vec{r}) dV.$$

2. La función integrando  $F(x, y, z)$  es homogénea de grado 4 y según el apartado anterior

$$\iint_{\partial S} F(x, y, z) d\sigma = 7 \iiint_S F(x, y, z) dV.$$

Por razones de simetría de la esfera:

$$\begin{aligned} \iiint_S x^4 dV &= \iiint_S y^4 dV = \iiint_S z^4 dV, \\ \iiint_S x^2y^2 dV &= \iiint_S y^2z^2 dV = \iiint_S z^2x^2 dV. \end{aligned}$$

Usando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \iiint_S z^4 dV &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \int_0^1 \rho^6 \cos^4 \beta \sin \beta d\beta \\ &= \frac{2\pi}{7} \int_0^\pi \cos^4 \beta \sin \beta d\beta = \frac{2\pi}{7} \left[ -\frac{\cos^5 \beta}{5} \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{35}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \iiint_S x^2 z^2 dV &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \int_0^1 \rho^6 \cos^2 \beta \sin^3 \beta \cos^2 \beta d\beta \\ &= \frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^\pi \sin^3 \beta \cos^2 \beta d\beta. \end{aligned}$$

Por una parte tenemos

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left[ \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_0^{2\pi} = \pi,$$

y por otra

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \beta \cos^2 \beta d\beta &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \beta \cos^2 \beta d\beta = B(2, 3/2) \\ &= \frac{\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{1!(1/2)\sqrt{\pi}}{(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\iiint_S x^2 z^2 dV = \frac{1}{7} \frac{4\pi}{15} = \frac{1}{3} \frac{4\pi}{35}.$$

La integral pedida es por tanto

$$\iint_{\partial S} F(x, y, z) d\sigma = \frac{4\pi}{5} \left( A + B + C + \frac{D + E + F}{3} \right).$$

## 12.24. Integral doble impropia por un cambio ortogonal

Calcular

$$I(a, b) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Consideremos la forma cuadrática

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De las condiciones  $a > 0, ac - b^2 > 0$  deducimos que  $q$  es definida positiva. Como consecuencia del teorema espectral, existe una matriz  $P$  ortogonal tal que el cambio de coordenadas  $(x, y)^t = P(u, v)^t$  permite expresar la forma cuadrática de la siguiente manera:

$$q(u, v) = (u, v) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda u^2 + \mu v^2 \quad (\lambda > 0, \mu > 0).$$

siendo  $\lambda, \mu$  los valores propios de la matriz de la forma cuadrática. Además, podemos elegir  $P$  de tal manera que represente un giro, y por tanto  $\det(P) = 1$ . Por otra parte y dado que la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}u + p_{12}v \\ p_{21}u + p_{22}v \end{pmatrix}.$$

el correspondiente jacobiano es:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = 1.$$

Aplicando el conocido teorema de cambio de variable para integrales dobles:

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(\lambda u^2+\mu v^2)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}u)^2} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\mu}v)^2} dv. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio  $s = \sqrt{\lambda}u$  y usando  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$  obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}u)^2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}u)^2} du = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Análogamente  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\mu}v)^2} dv = \sqrt{\pi}/\sqrt{\mu}$ . En consecuencia  $I(a, b) = \pi/\sqrt{\lambda\mu}$ . Por otra parte sabemos que el producto de los valores propios de una matriz es igual al determinante de la matriz. En nuestro caso  $\lambda\mu = \sqrt{ac - b^2}$ . Queda por tanto:

$$I(a, b) = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}.$$

## 12.25. Integral doble impropia con parámetros

Estudiar en función de los valores reales de  $\alpha$  y  $\beta$  la convergencia de la integral impropia

$$\iint_{x, y \geq 0} \frac{dx dy}{1 + x^\alpha + y^\beta}.$$

Cuando resulte convergente, expresar su valor en términos de la función gamma de Euler. Sugerencia: Hacer el cambio de variables  $x^\alpha = u^2$ ,  $y^\beta = v^2$  seguido de un cambio a coordenadas polares.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** De las relaciones  $x = u^{2/\alpha}$ ,  $y = v^{2/\beta}$  obtenemos el jacobiano de la transformación:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha} u^{\frac{2}{\alpha}-1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\beta} v^{\frac{2}{\beta}-1} \end{vmatrix} = \frac{4}{\alpha\beta} u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1}.$$

La integral dada  $I(\alpha, \beta)$  se puede expresar por tanto en la forma:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{4}{\alpha\beta} \iint_{u \geq 0, v \geq 0} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1}}{1 + u^2 + v^2} dudv.$$

Efectuando el cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \frac{4}{\alpha\beta} \iint_{0 \leq \theta \leq \pi/2, \rho \geq 0} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1} (\cos \theta)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\sin \theta)^{\frac{2}{\beta} - 1}}{1 + \rho^2} d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{\alpha\beta} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1}}{1 + \rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} 2(\cos \theta)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\sin \theta)^{\frac{2}{\beta} - 1} d\theta. \end{aligned}$$

Llamemos  $I_1 = \int_0^{\pi/2} 2(\cos \theta)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\sin \theta)^{\frac{2}{\beta} - 1} d\theta$ . Usando la conocida fórmula

$$2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta = B(p, q)$$

e identificando coeficientes  $2p - 1 = 2/\alpha - 1$ ,  $2q - 1 = 2/\beta - 1$  obtenemos  $p = 1/\alpha$  y  $q = 1/\beta$ , es decir  $I_1 = B(1/\alpha, 1/\beta)$ . Efectuando ahora el cambio  $u = 1/(1 + \rho^2)$  tenemos  $\rho^2 = 1/u - 1$ , con lo cual  $2\rho d\rho = -du/u^2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1}}{1 + \rho^2} d\rho &= \int_1^0 u \left( \frac{1}{u} - 1 \right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}} \left( -\frac{du}{u^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-u}{u} \right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}} u^{-1} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Identificando en  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  obtenemos  $p = 1/2 - 1/\alpha - 1/\beta$  y  $q = 1/2 + 1/\alpha + 1/\beta$ . Es decir,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1}}{1 + \rho^2} d\rho = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right).$$

Queda por tanto

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Las condiciones de convergencia son

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 0, \quad \frac{1}{\alpha} > 0, \quad \frac{1}{\beta} > 0.$$

Equivalentemente,  $1/\alpha + 1/\beta < 1/2$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ).

## 12.26. Teoremas de Stokes y Gauss: comprobación

Se considera el campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - 2yz, y + 2xz, z).$$

y el cono  $K : x^2 + y^2 = 4z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Se pide:

- 1) Comprobar la validez del teorema de Stokes para el campo  $\vec{F}$  y el cono  $K$ .
- 2) Comprobar la validez del teorema de Gauss para el campo  $\vec{F}$  y el cono  $K$  limitado por  $z = 1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1) La curva  $\gamma$  que delimita a  $K$  es  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $z = 1$ , que escrita en paramétricas es:

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Calculemos la integral curvilínea  $I_1$  correspondiente al teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma} (x - 2yz)dx + (y + 2xz)dy + z dz \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - 4 \sin t)(-2 \sin t) dt + (2 \sin t + 4 \cos t)(2 \cos t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t \cos t + 8 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t + 8 \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 8 dt = 16\pi.$$

El rotacional de  $\vec{F}$  es:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - 2yz & y + 2xz & z \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 4z).$$

Un vector normal al cono  $K \equiv \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$  en un punto genérico es

$$\nabla\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = (2x, 2y, -8z)$$

y su módulo es  $2\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}$ . Un simple esbozo del cono, permite elegir el sentido del vector normal unitario  $\vec{n}$  acorde con el sentido elegido para la curva  $\gamma$ , según la regla del sacacorchos:

$$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}} (-x, -y, 4z).$$

Usando la relación  $x^2 + y^2 = 4z^2$  :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} &= \frac{2x^2 + 2y^2 + 16z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}} = \frac{6(x^2 + y^2)}{\sqrt{5(x^2 + y^2)}} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{5(x^2 + y^2)}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

La proyección del cono  $K$  sobre el plano  $z = 0$  es el círculo  $D$  de centro el origen y radio 2. Para hallar la integral de superficie  $I_2$  que aparece en el teorema de Stokes, usamos coordenadas polares en la integral doble correspondiente:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_K (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \iint_D \frac{6(x^2 + y^2)}{\sqrt{5(x^2 + y^2)}} \cdot \frac{\sqrt{5(x^2 + y^2)}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= 3 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = 16\pi. \end{aligned}$$

Queda pues comprobado el teorema de Stokes.

2) Sea  $T$  el cono  $K$  limitado por  $z = 1$ . Su volumen es  $V_T = 4\pi/3$ . La divergencia del campo es  $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = 3$ , y la integral triple  $J_1$  que aparece en el teorema de Gauss es

$$J_1 = \iiint_T (\operatorname{div}\vec{F}) \, dx dy dz = 3 \iiint_T dx dy dz = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

Hallemos el producto  $(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n}$  en  $K$  eligiendo ahora  $\vec{n}$  exterior a la superficie:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n} &= (x - 2yz, y + 2xz, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}} (x, y, -4z) \\ &= \frac{x^2 - 2xyz + y^2 + 2xyz - 4z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}} = 0. \end{aligned}$$

El vector normal unitario en la base  $B$  del cono es  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  y ahora  $(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n} = 1$ . Teniendo en cuenta que el área de  $B$  es  $A_B = 4\pi$ , la integral de superficie  $J_2$  que corresponde al teorema de Gauss es:

$$\begin{aligned} J_2 &= \iint_T (\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_K (\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_B (\operatorname{div}\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_K 0 \, dS + \iint_B dS = 0 + A_B = 4\pi. \end{aligned}$$

Queda pues comprobado el teorema de Gauss.

## 12.27. Flujo y circulación de un campo

Se considera el campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  definido por  $\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})^{10} \vec{r}$  en donde  $\vec{a}$  es un vector fijo y no nulo de  $\mathbb{R}^3$  y  $\vec{r}$  es el vector de posición. Se pide:

- Calcular la divergencia y rotacional del campo  $\vec{F}$ . Determinar si existen vectores  $\vec{a}$  no nulos para los cuales el campo  $\vec{F}$  es conservativo.
- Calcular el flujo del campo  $\vec{F}$  sobre la cara exterior de la esfera unidad  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- Calcular la circulación del campo  $\vec{F}$  sobre cualquier curva cerrada situada sobre la esfera unidad.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** a) Llamando  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , la primera componente del campo es  $F_1 = (a_1x + a_2y + a_3z)^{10}$  con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= 10 (a_1x + a_2y + a_3z)^9 a_1x + (a_1x + a_2y + a_3z)^{10} \cdot 1 \\ &= 10 (\vec{a} \cdot \vec{r})^9 a_1x + (\vec{a} \cdot \vec{r})^{10} = (\vec{a} \cdot \vec{r})^9 (10 a_1x + \vec{a} \cdot \vec{r}).\end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga con las otras dos componentes:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = (\vec{a} \cdot \vec{r})^9 (10 a_2y + \vec{a} \cdot \vec{r}), \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = (\vec{a} \cdot \vec{r})^9 (10 a_3z + \vec{a} \cdot \vec{r}).$$

La divergencia de  $\vec{F}$  es por tanto

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (\vec{a} \cdot \vec{r})^9 (10 \vec{a} \cdot \vec{r} + 3 \vec{a} \cdot \vec{r}) = 13 (\vec{a} \cdot \vec{r})^{10}.$$

Sean  $f(\vec{r}) = (a \cdot \vec{r})^{10}$  y  $\vec{G} = \vec{r}$ . Entonces

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (10(a \cdot \vec{r})^9 a_1, 10(a \cdot \vec{r})^9 a_2, 10(a \cdot \vec{r})^9 a_3) = 10(a \cdot \vec{r})^9 \vec{a}.$$

Dado que  $\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{0}$ , usando una conocida propiedad:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{F} &= \operatorname{rot} (f \vec{G}) = f \operatorname{rot} \vec{G} + \nabla f \times \vec{G} = \nabla f \times \vec{G} \\ &= (10 (a \cdot \vec{r})^9 \vec{a}) \times \vec{r} = 10 (a \cdot \vec{r})^9 (\vec{a} \times \vec{r}).\end{aligned}$$

El vector  $\vec{a}$  es no nulo por hipótesis. Eligiendo un vector  $\vec{b} \neq \vec{0}$  no perpendicular al vector  $\vec{a}$  con  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  linealmente independientes, se verifica  $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$  y  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ , es decir  $(\operatorname{rot} \vec{F})(\vec{b}) \neq \vec{0}$ . Por tanto, no existen vectores  $\vec{a}$  no nulos tales que  $\vec{F}$  es conservativo.

b) Para calcular el flujo  $\Phi$  pedido sobre la cara exterior de la esfera  $E$ , aplicaremos el teorema de la divergencia, es decir:

$$\Phi = \iint_{E^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz.$$

Para simplificar la expresión del campo  $\operatorname{div} \vec{F}$  vamos a girar la base  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  para obtener la base ortonormal  $\mathcal{B}' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  de tal manera que  $\vec{w} = \vec{a}/|\vec{a}|$ . Llamando  $(u, v, w)$  a las coordenadas de  $\vec{r}$  en la base  $\mathcal{B}'$ , tenemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = (0, 0, |\vec{a}|) \cdot (u, v, w) = |\vec{a}|w \Rightarrow (\operatorname{div} \vec{F})(u, v, w) = 13|\vec{a}|^{10}w^{10}.$$

Dado que hemos realizado un giro, la relación entre las coordenadas en las bases es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (P \text{ ortogonal y } \det P = 1).$$

El jacobiano de la transformación es

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \det P = 1.$$

Usando la fórmula del cambio de variables para integrales triples:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = 13|\vec{a}|^{10} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} w^{10} \, du dv dw.$$

Usando coordenadas esféricas  $(\alpha, \beta, \rho)$ :

$$\begin{aligned} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} w^{10} \, du dv dw &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^{10} \beta \sin \beta \, d\beta \int_0^1 \rho^{12} \, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{13} \left[ -\frac{\cos^{11} \beta}{11} \right]_0^\pi = \frac{2\pi}{13} \cdot \frac{2}{11} \Rightarrow \Phi = 13|\vec{a}|^{10} \cdot \frac{2\pi}{13} \cdot \frac{2}{11} = \frac{4\pi|\vec{a}|^{10}}{11}. \end{aligned}$$

c) Sea  $\gamma$  una curva cerrada situada sobre la esfera unidad, y sea  $\Gamma$  la porción de superficie que limita la esfera unidad. Aplicando los teoremas de Stokes y de la divergencia, obtenemos la circulación de  $\vec{F}$ :

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\Gamma \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) \, dV = \iiint_T 0 \, dV = 0.$$

## 12.28. Centro de gravedad de una esfera

En una esfera maciza de radio  $a$ , existe una distribución de masa cuya densidad en cada punto es proporcional a la distancia de dicho punto a uno fijo de la superficie de la esfera. Se pide determinar la posición del centro de gravedad de este sólido.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Consideremos la esfera con centro el punto  $(0, 0, a)$  y como punto fijo el origen. Llamemos  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  a las coordenadas del centro de gravedad.



La densidad en cada punto  $P(x, y, z)$  es  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y la masa del sólido:

$$M = \iiint_T k\delta(x, y, z) \, dx dy dz, \quad T \equiv x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2.$$

El centro de gravedad es  $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/M)(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$  siendo  $M_{yz}$ ,  $M_{xz}$  y  $M_{xy}$  los correspondientes momentos estáticos. Por razones de simetría es claro que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Hallemos la masa  $M$  usando las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \sin \beta \\ y = \rho \sin \alpha \sin \beta \\ z = \rho \cos \beta. \end{cases} \quad (1)$$

La ecuación de la superficie esférica es  $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$  o de forma equivalente  $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$ . En la esfera,  $\alpha$  varía entre 0 y  $2\pi$  y  $\beta$  entre 0 y  $\pi/2$ . Sustituyendo (1) en la ecuación de la superficie esférica:

$$\rho^2 - 2a\rho \cos \beta = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 2a \cos \beta) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 2a \cos \beta.$$

Por tanto, la masa  $M$  es

$$\begin{aligned} M &= \iiint_T k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{2a \cos \beta} k\rho^3 \sin \beta \, d\rho \\ &= k \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \left[ \frac{\rho^4}{4} \sin \beta \right]_0^{2a \cos \beta} = 2k\pi \int_0^{\pi/2} 4a^4 \cos^4 \beta \sin \beta \, d\beta \\ &= 8k\pi a^4 \left[ -\frac{\cos^5 \beta}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{8k\pi a^4}{5}. \end{aligned}$$

El momento estático  $M_{xy}$  es

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_T kx\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{2a \cos \beta} k\rho^4 \sin \beta \cos \beta \, d\rho \\ &= k \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \left[ \frac{\rho^5}{5} \sin \beta \cos \beta \right]_0^{2a \cos \beta} = \frac{2k\pi}{5} \int_0^{\pi/2} 32a^5 \cos^6 \beta \sin \beta \, d\beta \\ &= \frac{64k\pi a^5}{5} \left[ -\frac{\cos^7 \beta}{7} \right]_0^{\pi/2} = \frac{64k\pi a^5}{35}. \end{aligned}$$

En consecuencia  $\bar{z} = M_{xy}/M = 8a/7$  y el centro de gravedad pedido es

$$G = \left( 0, 0, \frac{8a}{7} \right).$$

## 12.29. Móviles sobre dos circunferencias

Considérense dos circunferencias concéntricas  $C_1, C_2$  de radios  $a, 2a$  respectivamente. Dos móviles  $M$  y  $P$  situados cada uno de ellos respectivamente en  $C_1$  y  $C_2$  describen las circunferencias en el mismo sentido con velocidad lineal constante en módulo e igual para ambos móviles. En el instante inicial  $M$  y  $P$  se encuentran sobre el mismo radio. Determinar unas ecuaciones paramétricas para la curva descrita por el punto medio del segmento  $MP$ . Calcular el área encerrada por dicha curva.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Consideremos las circunferencias centradas en el origen y supongamos que en el instante inicial los móviles  $M$  y  $P$  se encuentran en  $M_0(a, 0)$  y  $P_0(2a, 0)$ . En el instante  $t$  los móviles se encuentran en  $M$  y  $P$  con ángulos polares respectivos  $\varphi$  y  $\theta$ . Las longitudes  $L_p$  del arco  $P_0P$  y  $L_m$  del  $M_0M$  son  $L_p = 2a\theta$  y  $L_m = a\varphi$ . Por hipótesis las velocidades de los móviles son constantes e iguales, es decir

$$\frac{L_p}{t} = \frac{L_m}{t} \Leftrightarrow \frac{2a\theta}{t} = \frac{a\varphi}{t} \Leftrightarrow \varphi = 2\theta.$$

En consecuencia, los puntos  $M$  y  $P$  tienen coordenadas

$$M(a \cos 2\theta, a \sin 2\theta), \quad P(2a \cos \theta, 2a \sin \theta).$$

Unas ecuaciones paramétricas para la curva  $\gamma$  descrita por el punto medio del segmento  $MP$  son por tanto

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = \frac{a}{2}(\cos 2\theta + 2 \cos \theta) \\ y = \frac{a}{2}(\sin 2\theta + 2 \sin \theta) \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

El área encerrada por  $\gamma$  es  $A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$ . Desarrollemos la expresión  $xdy - ydx$ :

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= \frac{a}{2}(\cos 2\theta + 2 \cos \theta) \cdot \frac{a}{2}(2 \cos 2\theta + 2 \cos \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{a}{2}(\sin 2\theta + 2 \sin \theta) \cdot \frac{a}{2}(-2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4}(2 \cos^2 2\theta + 6 \cos \theta \cos 2\theta + 4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 2\theta + 6 \sin \theta \sin 2\theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{4}(2 + 4 + 6 \sin \theta \sin 2\theta + 6 \cos \theta \cos 2\theta)d\theta \\
&= \frac{3a^2}{2}(1 + \sin \theta \sin 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Es decir

$$A = \frac{3a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta \sin 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta) d\theta.$$

Usando la fórmula  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$  :

$$A = \frac{3a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \frac{3a^2}{4} [\theta + \sin \theta]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

### 12.30. Circulación de un campo y producto mixto

Dados tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  de  $\mathbb{R}^3$  se considera el campo vectorial  $F(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}$  con  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  y la curva cerrada  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\gamma(\theta) = \vec{b} \cos \theta + \vec{c} \sin \theta$ . Calcular la circulación del campo  $F$  sobre  $\gamma$  y deducir la condición que han de cumplir los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  para que la circulación se anule.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** La circulación es  $C = \int_{\gamma} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ . Desarrollemos  $F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  :

$$\begin{aligned}
F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (-\vec{b} \sin \theta + \vec{c} \cos \theta) d\theta \\
&= \left( \vec{a} \times (\vec{b} \cos \theta + \vec{c} \sin \theta) \right) \cdot (-\vec{b} \sin \theta + \vec{c} \cos \theta) d\theta \\
&= \left( (\vec{a} \times \vec{b}) \cos \theta + (\vec{a} \times \vec{c}) \sin \theta \right) \cdot (-\vec{b} \sin \theta + \vec{c} \cos \theta) d\theta \\
&= \left( -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} \sin^2 \theta + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \cos^2 \theta \right) d\theta \\
&= \left( (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] d\theta.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$C = \int_{\gamma} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] d\theta = 2\pi [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

La circulación es nula cuando el producto mixto  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  es nulo, es decir cuando los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  son coplanarios.

### 12.31. Potencial de un campo con función homogénea

Se trata de probar que todo campo vectorial de la forma  $\vec{F}(x, y, z) = g(x, y)\vec{k}$  donde  $g(x, y)$  es una función continua en  $\mathbb{R}^2$  conocida, admite una función potencial de la forma  $\vec{V}(x, y, z) = f(x, y)(-y\vec{i} + x\vec{j})$ .

- (a) Deducir la ecuación que debe satisfacer  $f$  para que en todo punto se cumpla  $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{F}$ .  
 (b) Determinar  $f$  cuando  $g$  sea una función homogénea de grado  $\alpha$ . Aplíquese al caso en que  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ .  
 (c) Resolver en el caso general la ecuación obtenida en el apartado (a). Aplíquese al caso en que la función  $g$  viene dada por:

$$g(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + 2xy + 3y^2)^2}.$$

Indicación : derívase la función dada por  $\varphi(t) = f(tx, ty)$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Tenemos:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{V}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yf(x, y) & xf(x, y) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Igualando  $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{F}$  obtenemos la ecuación pedida:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y} + 2f(x, y) = g(x, y).$$

(b) Elijamos  $f(x, y)$  homogénea de grado  $\alpha$ , entonces por el teorema de Euler se verifica

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y)$$

y la relación obtenida en el apartado anterior se puede expresar en la forma  $(\alpha + 2)f(x, y) = g(x, y)$ . Como  $g$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ , si es homogénea de grado  $\alpha$  entonces  $g(tx, ty) = t^\alpha g(x, y)$ . Si fuera  $\alpha < 0$ , entonces para  $t = 0$  quedaría  $g(0, 0) = 0^\alpha g(0, 0)$  y  $g$  no sería continua en  $(0, 0)$ . Ha de ser pues

$\alpha \geq 0$ . Entonces, existe una solución  $f(x, y)$  homogénea de grado  $\alpha \geq 0$  que viene dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{\alpha + 2}g(x, y).$$

En el caso particular de ser  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$  tenemos  $g(tx, ty) = t^2g(x, y)$ , es decir  $\alpha = 2$  y por tanto  $f(x, y) = g(x, y)/4$ . Veamos si esta solución es única. La ecuación obtenida en el apartado (a) es:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y} + 2f(x, y) = g(x, y).$$

Esta es una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, en consecuencia sus soluciones son la suma de una solución particular con todas las soluciones de la homogénea. Si demostramos que la única solución de la ecuación homogénea es la función nula, habremos demostrado que la única solución es la  $f(x, y)$  encontrada anteriormente. Consideremos  $\varphi(t) = f(tx, ty)$  y derivemos:

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty).$$

Como la ecuación diferencial es homogénea, se ha de verificar en todo punto, sustituyendo  $x$  por  $tx$  e  $y$  por  $ty$  obtenemos:

$$tx \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + ty \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty) + 2f(tx, ty) = 0.$$

Es decir,  $t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0$ . Multiplicando por  $t$  queda  $t^2\varphi'(t) + 2t\varphi(t) = 0$  o bien  $(d/dt)(t^2\varphi(t)) = 0$ , cuya solución general es  $t^2\varphi(t) = K$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Haciendo  $t = 0$  queda  $K = 0$  lo cual implica  $\varphi(t) = 0$  para todo  $t \neq 0$ . Como  $\varphi(t)$  es continua en  $\mathbb{R}$  se deduce que  $\varphi$  es la función idénticamente nula. Dado que  $\varphi(1) = f(x, y)$  se concluye que  $f$  es idénticamente nula. La única solución de la ecuación completa es por tanto:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + 3y^2).$$

(c) Se trata ahora de resolver la ecuación en el caso general. Hagamos  $\psi(t) = g(tx, ty)$ . La función  $\varphi(t)$  ha de ser solución de la ecuación diferencial  $t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = \psi(t)$ . Multiplicando por  $t$  obtenemos  $(d/dt)(t^2\varphi(t)) = t\psi(t)$ . Integrando entre 0 y 1 la igualdad anterior:

$$\int_0^1 t\psi(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2\varphi(t)) dt = [t^2\varphi(t)]_0^1 = \varphi(1) = f(1x, 1y) = f(x, y).$$

Para la función dada  $g(x, y) = 1/(1 + x^2 + 2xy + 3y^2)^2$  tenemos:

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{t dt}{(1 + t^2(x^2 + 2xy + 3y^2))^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo  $(x, y) = (0, 0)$  tenemos  $f(0, 0) = \int_0^1 t dt = 1/2$ . Por otra parte la forma cuadrática  $x^2 + 2xy + 3y^2$  es definida positiva al tener sus dos menores principales positivos. Tiene pues sentido llamar  $a^2 = x^2 + 2xy + 3y^2$ . Haciendo el cambio de variable  $u = 1 + a^2 t^2$  obtenemos  $du = 2a^2 t dt$  y por tanto:

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{t dt}{(1 + a^2 t^2)^2} = \int_1^{1+a^2} \frac{u^{-2} du}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} \left[ -\frac{1}{u} \right]_1^{1+a^2} = \frac{1}{2(1+a^2)}.$$

En consecuencia la función pedida es:

$$f(x, y) = \frac{1}{2(1 + x^2 + 2xy + 3y^2)}.$$

## 12.32. Un campo gradiente

Se considera un campo vectorial  $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  definido en  $\mathbb{R}^3$  y de clase  $\mathcal{C}^1$ . Se construye a partir de él un campo escalar  $V(x, y, z)$  de la siguiente manera:

$$V(x, y, z) = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

en donde  $\Gamma$  es la poligonal determinada por los puntos  $(0, 0, 0)$ ,  $(x, 0, 0)$ ,  $(x, y, 0)$  y  $(x, y, z)$ .

- (a) Expresar  $V$  como suma de integrales simples. Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente que debe cumplir  $F$  para que  $\text{grad } V = F$ .  
 (b) Determinar los valores de  $p, q$  y  $r$  para los cuales el campo de componentes

$$P(x, y, z) = -2xy(x^2 + z^2 + 1)^p,$$

$$Q(x, y, z) = (x^2 + z^2 + 1)^q,$$

$$R(x, y, z) = -2yz(x^2 + z^2 + 1)^r.$$

cumpla la condición del apartado anterior, y construir  $V$  en este caso.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Expresemos  $V$  como suma de integrales simples. Denotemos a los puntos dados de la poligonal por  $O, A, B, C$  respectivamente. Unas ecuaciones paramétricas de los correspondientes segmentos orientados son

$$OA: X = t, Y = 0, Z = 0 \quad (t \in [0, x]),$$

$$AB: X = x, Y = t, Z = 0 \quad (t \in [0, y]),$$

$$BC : X = x, Y = y, Z = t \quad (t \in [0, z]).$$

Las integrales a lo largo de los segmentos son

$$\int_{OA} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^x P(t, 0, 0)dt,$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^y Q(x, t, 0)dt,$$

$$\int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^z R(x, y, t)dt.$$

En consecuencia

$$V(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)dt + \int_0^y Q(x, t, 0)dt + \int_0^z R(x, y, t)dt.$$

Encontremos ahora una condición necesaria y suficiente para que de verifique  $\text{grad } V = f$ . Si  $\text{grad } V = f$  entonces  $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$ . Como  $F$  es de clase 1 en  $\mathbb{R}^3$ , el campo  $V$  es de clase 2 en  $\mathbb{R}^3$  (se ha obtenido por integraciones). Podemos por tanto cambiar el orden de derivación, es decir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Es decir, una condición necesaria para que que verifique  $\text{grad } V = f$  es

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \wedge \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \wedge \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (1)$$

Obsérvese que la condición (1) equivale a  $\text{rot } F = 0$ . Veamos que la condición (1) es también condición suficiente para que se verifique  $\text{grad } V = f$ . Si se verifica (1), entonces aplicando el teorema fundamental del Cálculo y el teorema de derivación de integrales dependientes de un parámetro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^x P(t, 0, 0)dt + \int_0^y Q(x, t, 0)dt + \int_0^z R(x, y, t)dt \right] = \\ &P(x, 0, 0) + \int_0^y \frac{\partial Q(x, t, 0)}{\partial x} dt + \int_0^z \frac{\partial R(x, y, t)}{\partial x} dt. \end{aligned}$$

Usando la condición (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= P(x, 0, 0) + \int_0^y \frac{\partial P(x, t, 0)}{\partial y} dt + \int_0^z \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial z} dt = \\ &P(x, 0, 0) + [P(x, t, 0)]_0^y + [P(x, y, t)]_0^z = P(x, 0, 0) + \\ &P(x, y, 0) - P(x, 0, 0) + P(x, y, z) - P(x, y, 0) = P(x, y, z).\end{aligned}$$

Es decir,  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ . De manera análoga se demuestra  $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$  y  $\frac{\partial V}{\partial z} = R$ . Concluimos que (1) es condición necesaria y suficiente para que ocurra  $\text{grad } V = f$ .

(b) Determinemos  $p, q$  y  $r$  para que se verifique  $\text{grad } V = f$  en el campo  $F$  dado. Usamos para ello la caracterización del apartado anterior

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} &\Leftrightarrow -2x(x^2 + z^2 + 1)^p = 2qx(x^2 + z^2 + 1)^{q-1} \\ &\Leftrightarrow q = -1 \wedge p = q - 1, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} &\Leftrightarrow 2qz(x^2 + z^2 + 1)^{q-1} = -2z(x^2 + z^2 + 1)^r \\ &\Leftrightarrow q = -1 \wedge q - 1 = r, \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} &\Leftrightarrow -4rxyz(x^2 + z^2 + 1)^{r-1} = -4pxyz(x^2 + z^2 + 1)^{p-1} \\ &\Leftrightarrow p = r \wedge r - 1 = q - 1.\end{aligned}$$

Resolviendo el correspondiente sistema obtenemos  $p = -2$ ,  $q = -1$ ,  $r = -2$ . El campo  $F$  es por tanto

$$F(x, y, z) = \left( \frac{2xy}{(x^2 + z^2 + 1)^2}, \frac{1}{x^2 + z^2 + 1}, \frac{-2yz}{(x^2 + z^2 + 1)^2} \right).$$

El campo  $V$  es:

$$\begin{aligned}V(x, y, z) &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y \frac{1}{x^2 + 1} dt + \int_0^z \frac{-2yt}{(x^2 + t^2 + 1)^2} dt \\ &= \frac{y}{x^2 + 1} + \left[ \frac{y}{x^2 + t^2 + 1} \right]_0^z = \frac{y}{x^2 + z^2 + 1}.\end{aligned}$$



## Capítulo 13

# Espacios normados

### 13.1. Norma, espacio normado

1. Sea  $E = C([a, b])$  el espacio vectorial de las funciones continuas sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ . Demostrar que  $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$  es una norma en  $E$ .

2. Sea  $I = [a, b]$  intervalo cerrado de la recta real y  $E = C(I)$  el espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de las funciones continuas  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . Demostrar que  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$  es una norma en  $E$ .

3. Demostrar que las únicas normas en  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  son el módulo o sus múltiplos positivos.

4. Demostrar que la siguiente aplicación es una norma en  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\|\cdot\|_{\infty} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

5. Demostrar que la siguiente aplicación es una norma en  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

6. Demostrar que la siguiente aplicación es una norma en  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

7. En el espacio vectorial  $E = \mathbb{K}^{m \times n}$  de las matrices de ordenes  $m \times n$  reales o complejas se define para toda  $A = [a_{ij}] \in E$ :

$$\|A\| = \text{máx} \{|a_{ij}|\} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Demostrar que  $\|\cdot\|$  es una norma en  $E$ .

**Solución.** Recordamos que si  $E$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se llama norma en  $E$  a toda aplicación  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $x \rightarrow \|x\|$  de  $E$  en los reales no negativos que satisface los axiomas:

- 1).  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- 2).  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ .
- 3).  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$  (desigualdad triangular o de Minkowski).

Al par  $(E, \|\cdot\|)$  se le llama espacio normado, si bien se escribe sencillamente  $E$ .  $\square$

1. Como el valor absoluto de una función continua es continua y no negativa, existe  $\|f\|$  para todo  $f \in E$  y es  $\geq 0$ . Usando conocidas propiedades de la integral,

- 1)  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f = 0$ .
- 2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $f \in E$ ,

$$\|\lambda f\| = \int_a^b |(\lambda f)(x)| dx = \int_a^b |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|.$$

- 3) Para todo  $f, g \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \int_a^b |(f + g)(x)| dx = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) dx = \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

2. Se verifica  $\|f\| \geq 0$  para todo  $f \in E$ . Por otra parte,

- 1)  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \in I\} = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \forall x \in I$   
 $\Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f = 0$ .
- 2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $f \in E$ ,

$$\|\lambda f\| = \sup\{|(\lambda f)(x)| : x \in I\} = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in I\}$$

$$= \sup\{|\lambda| |f(x)| : x \in I\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in I\} = |\lambda| \|f\|.$$

3) Para todo  $f, g \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|(f + g)(x)| : x \in I\} = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|g(x)| : x \in I\} = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

3. La aplicación  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $x \rightarrow \|x\| = k|x|$  con  $k > 0$  es una norma. En efecto,

1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow k|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . 2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}$  se verifica  $\|\lambda x\| = k|\lambda x| = |\lambda|(k|x|) = |\lambda|\|x\|$ . 3) Para todo  $x, y \in \mathbb{K}$  se verifica

$$\|x + y\| = k|x + y| \leq k(|x| + |y|) = k|x| + k|y| = \|x\| + \|y\|.$$

Sea ahora una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{K}$ . Entonces  $k = \|1\|$  es mayor que 0, y para todo  $x \in \mathbb{K}$ ,

$$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \|1\| = k \|x\|.$$

4. Usaremos conocidas propiedades del máximo.

1) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 0, \dots, |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_\infty = \max\{|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|\} \\ &= \max\{|\lambda| |x_1|, \dots, |\lambda| |x_n|\} = |\lambda| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |\lambda| \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

3) Para todo  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

5. 1) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Entonces,

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow |x_1| + \dots + |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 0, \dots, |x_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_1 &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_1 = |\lambda x_1| + \dots + |\lambda x_n| \\ &= |\lambda| |x_1| + \dots + |\lambda| |x_n| = |\lambda| (|x_1| + \dots + |x_n|) = |\lambda| \|x\|_1. \end{aligned}$$

3) Para todo  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1 = |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \\ &\leq (|x_1| + |y_1|) + \dots + (|x_n| + |y_n|) \\ &= (|x_1| + \dots + |x_n|) + (|y_1| + \dots + |y_n|) = \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$

6. 1) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|x\|_2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = 0 \Leftrightarrow |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = 0, \dots, |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_2 &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_2 = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + \dots + |\lambda x_n|^2} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 |x_1|^2 + \dots + |\lambda|^2 |x_n|^2} = |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = |\lambda| \|x\|_2. \end{aligned}$$

3) Usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir si  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_n$  son números reales se verifica

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (1)$$

Para todo  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2 = \sum_{k=1}^n (|x_k|^2 + 2|x_k||y_k| + |y_k|^2) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + 2 \sum_{k=1}^n |x_k||y_k| + \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\leq}_{\text{por (1)}} \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \\ & = \|x\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ & \Rightarrow \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \end{aligned}$$

7. Usaremos conocidas propiedades del máximo.

1) Sea  $A \in E$  Entonces,

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \max \{|a_{ij}|\} = 0 \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0 \forall i, j \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i, j \Leftrightarrow A = 0.$$

2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $A \in E$ ,

$$\|\lambda A\| = \max \{|\lambda a_{ij}|\} = \max \{|\lambda| |a_{ij}|\} = |\lambda| \max \{|a_{ij}|\} = |\lambda| \|A\|.$$

3) Para todo  $A, B \in E$

$$\|A + B\| = \max \{|a_{ij} + b_{ij}|\} \leq \max \{|a_{ij}|\} + \max \{|b_{ij}|\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

## 13.2. Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

1. Sean  $a, b, p, q$  números reales tales que

$$a \geq 0, b \geq 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Demostrar la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. Sean  $a_k, b_k \geq 0$  números reales con  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Demostrar la desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}.$$

3. Sean  $a_k, b_k \geq 0$  números reales con  $k = 1, 2, \dots, n$ , y  $p \geq 1$ , real. Demostrar la desigualdad de Minkowski

$$\left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}.$$

**Solución.** 1. La función exponencial  $f(x) = e^x$  satisface  $f''(x) = e^x > 0$ , para todo  $x$  real, luego es convexa en  $\mathbb{R}$ . Por tanto, para todo  $x, y$  reales y para todo  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  reales con  $\alpha + \beta = 1$  se verifica

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \text{ o bien } e^{\alpha x + \beta y} \leq \alpha e^x + \beta e^y \quad (1)$$

Si  $a = 0$  o  $b = 0$ , la desigualdad de Young se satisface trivialmente. Si  $a > 0$  y  $b > 0$ , llamemos

$$\alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q}, x = p \log a, y = q \log b.$$

El primer miembro de la desigualdad de (1) es

$$e^{\log a + \log b} = e^{\log a} e^{\log b} = ab,$$

y el segundo

$$\frac{1}{p} e^{p \log a} + \frac{1}{q} e^{q \log b} = \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

lo cual prueba la desigualdad de Young.

2. Llamemos  $A = (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p}$ ,  $B = (\sum_{k=1}^n b_k^q)^{1/q}$ . Si  $A = 0$  o  $B = 0$ , la desigualdad de Hölder se verifica claramente. Si  $A > 0$  y  $B > 0$  y usando la desigualdad de Young para  $a = a_k/A$  y  $b = b_k/B$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{A B} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

es decir  $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq AB$ , lo cual prueba la desigualdad de Hölder.

Nota. Para  $p = 2$ , a la desigualdad de Hölder también se la llama desigualdad de Schwartz.

3. Para  $p = 1$  la desigualdad es trivial. Si  $p > 1$ , sea  $q > 1$  tal que  $1/p + 1/q =$

1. Usando que  $(p-1)q = p$  y la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) (a_k + b_k)^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \left( \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \right) \\
 &\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/q} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \\
 &\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

### 13.3. Normas $p$

1. Sea  $p$  real con  $1 \leq p < +\infty$ . Demostrar que es una norma en  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

2. Demostrar que para  $0 < p < 1$ , la aplicación

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

no es una norma en  $\mathbb{K}^n$ .

**Solución.** 1. 1) Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Entonces,

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |x_k|^p = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_k|^p = 0 \forall k = 1, \dots, n \Leftrightarrow x_k = 0 \forall k = 1, \dots, n \Leftrightarrow x = 0.$$

2) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x\|_p &= \left( \sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{k=1}^n |\lambda|^p |x_k|^p \right)^{1/p} = \left( |\lambda|^p \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \\
 &= |\lambda| \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p.
 \end{aligned}$$

3) Para todo  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|x + y\|_p = \left( \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{1/p} \stackrel{\text{Desig. Minkowski}}{\leq} \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

### 13.4. Distancia inducida por la norma

1. Sea  $x \rightarrow \|x\|$  una norma en un espacio vectorial  $E$ . Demostrar que

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

es una distancia en  $E$ .

Nota. Como consecuencia, todo espacio normado puede ser considerado como un espacio métrico con la distancia anterior.

2. Sea  $E$  espacio normado. Demostrar que la aplicación  $E \times E \rightarrow E$ , dada por  $(x, y) \rightarrow x + y$  es uniformemente continua.

3. Sea  $E$  espacio normado. Demostrar que la función  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  dada por  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  es continua.

4. Sea  $E$  espacio normado. Demostrar que para todo  $a \in \mathbb{K}$ , la función  $E \rightarrow E$  dada por  $x \rightarrow ax$  es uniformemente continua.

5. Sea  $E$  un espacio normado. Demostrar que las traslaciones y homotecias en  $E$  son homeomorfismos.

6. Demostrar que no toda distancia en un espacio vectorial está inducida por una norma.

7. Sea  $E$  un espacio normado y  $x_n, y_n$  dos sucesiones en  $E$  convergentes tales  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ .

(a) Demostrar que  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ .

(b) Demostrar que para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda x_n \rightarrow \lambda x$ .

8. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $F$  un subespacio de  $E$ . Demostrar que la adherencia de  $F$  también es subespacio de  $E$ .



9. Sea  $E$  un espacio normado. Demostrar que

a)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  para todo  $x, y \in E$ .

b) La aplicación  $E \rightarrow [0, +\infty)$  dada por  $x \rightarrow \|x\|$ , es continua.

10. Sean  $x, y$  dos vectores no nulos de un espacio vectorial normado. Demostrar que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

**Solución.** 1. 1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ . 2) Para todo  $x, y \in E$ ,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = d(y, x).$$

3) Para todo  $x, y, z \in E$ :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

2. Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon/2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \|x - x'\| < \delta \\ \|y - y'\| < \delta \end{cases} &\Rightarrow \|(x + y) - (x' + y')\| \\ &\leq \|x - x'\| + \|y - y'\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

3. Sean  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  y  $x_0 \in E$  fijos. Basta demostrar que la función dada es continua en  $(\lambda_0, x_0)$ . Tenemos

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0).$$

Tomando normas,

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\|.$$

Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta > 0$  cumpliendo

$$\delta < 1 \text{ y } \delta < \frac{\epsilon}{|\lambda_0| + \|x_0\| + 1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\lambda - \lambda_0| < \delta \\ \|x - x_0\| < \delta \end{cases} &\Rightarrow \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < |\lambda_0| \delta + \delta \|x_0\| + \delta^2 \\ &= \delta (|\lambda_0| + \|x_0\| + \delta) \underbrace{<}_{\delta < 1} \delta (|\lambda_0| + \|x_0\| + 1) < \epsilon. \end{aligned}$$

4. Si  $a = 0$ , el resultado es trivial. Si  $a \neq 0$ , sea  $\epsilon > 0$ . Entonces, eligiendo  $\delta = \epsilon/|a|$ :

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|ax - ax'\| = |a| \|x - x'\| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

5. Toda traslación  $T_v : E \rightarrow E$ ,  $T_v(x) = x + v$  es aplicación continua y además tiene como aplicación inversa  $T_v^{-1} = T_{-v}$  que también es una traslación, y por tanto continua. Es decir,  $T_v$  es homeomorfismo.

Toda homotecia  $H_k : E \rightarrow E$ ,  $H_k(x) = kx$  con  $k \neq 0$  es aplicación continua y además tiene como aplicación inversa  $H_k^{-1} = T_{1/k}$  que también es una homotecia, y por tanto continua. Es decir,  $H_k$  es homeomorfismo.

6. Sea  $E \neq \{0\}$  un espacio vectorial real o complejo y  $d$  la distancia discreta en  $E$ , es decir

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Supongamos que  $d(x, y) = \|x - y\|$  para alguna norma en  $E$ , y elijamos  $v \in E$  no nulo (y por tanto,  $2v \neq 0$ ). Entonces,

$$1 = d(2v, 0) = \|2v\| = 2\|v\| = 2d(v, 0) \Rightarrow d(v, 0) = 1/2,$$

lo cual es absurdo.

7. (a) En efecto, supongamos que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Si  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  natural tal que  $\|x_n - x\| < \epsilon/2$  si  $n \geq n_0$ , y existe  $n_1$  natural tal que  $\|y_n - y\| < \epsilon/2$  si  $n \geq n_1$ . Entonces, para todo  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  se verifica:

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir,  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ .

(b) Si  $\lambda = 0$ , el resultado es trivial. Sea  $\lambda \neq 0$  y  $\epsilon > 0$ . Como  $x_n \rightarrow x$ , existe  $n_0$  natural tal que  $\|x_n - x\| < \epsilon/|\lambda|$  si  $n \geq n_0$ . Entonces,

$$\|\lambda x_n - \lambda x\| = \|\lambda(x_n - x)\| = |\lambda| \|x_n - x\| < |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon$$

si  $n \geq n_0$ , es decir  $\lambda x_n \rightarrow \lambda x$ .

8. 1)  $F$  es subespacio de  $E$ , por tanto  $0 \in F \subset \overline{F}$ , luego  $0 \in \overline{F}$ .

2) Si  $x, y \in \overline{F}$ , existen sucesiones  $x_n, y_n$  en  $E$  tales que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Entonces,  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ , lo cual implica que  $x + y \in \overline{F}$ .

3) Sea  $\lambda$  un escalar y  $x \in \overline{F}$ . Existe sucesión  $x_n$ , en  $E$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Entonces  $\lambda x_n \rightarrow \lambda x$  y por tanto  $\lambda x \in \overline{F}$ .

9. a) Tenemos

$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|x - y\|$$

$$\Rightarrow -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|, \quad (1)$$

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \quad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

b) Sea  $x_0 \in E$  y  $\epsilon > 0$ . Eligiendo  $\delta = \epsilon$ ,

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| < \delta = \epsilon,$$

lo cual implica que  $x \rightarrow \|x\|$  es continua para todo  $x_0 \in E$ .

10. Tenemos

$$\begin{aligned} 2\|x - y\| &\geq \|x - y\| + |\|x\| - \|y\|| = \|x - y\| + \left\|y - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\ &\geq \left\|x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| = \|x\| \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leq 2\frac{\|x - y\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

### 13.5. La distancia es uniformemente continua

Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Demostrar que la aplicación distancia  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  es uniformemente continua considerando en  $E \times E$  la distancia

$$d_1[(x, y), (u, v)] = d(x, u) + d(y, v).$$

y en  $\mathbb{R}^+$  la distancia usual  $d_u(t, s) = |t - s|$

**Solución.** Para todo  $x, y, u, v \in E$  y usando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \\ &\Rightarrow d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(v, y). \quad (1) \end{aligned}$$

Análogamente:

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$$

$$\Rightarrow d(u, v) - d(x, y) \leq d(u, x) + d(y, v). \quad (2)$$

De (1) y (2) deducimos  $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d_1[(x, y), (u, v)]$ . Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon$ . Entonces, si  $d_1[(x, y), (u, v)] < \delta$  se verifica

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d_1[(x, y), (u, v)] < \delta = \epsilon.$$

Es decir,  $d$  es uniformemente continua.

Consecuencias:

1. Al ser  $d$  es uniformemente continua, es continua.
2. Al ser  $d_1$  equivalente a las distancias:

$$d_\infty[(x, y), (u, v)] = \max\{d(x, u), d(y, v)\},$$

$$d_2[(x, y), (u, v)] = \sqrt{d^2(x, u) + d^2(y, v)},$$

la aplicación  $d$  es también uniformemente continua cuando en  $E \times E$  se consideran las distancias  $d_\infty$  y  $d_2$ .

## 13.6. Series en espacios normados

1. Sea  $\sum_{n \geq 0} x_n$  una serie convergente en un espacio normado  $E$ . Demostrar que  $x_n \rightarrow 0$ . Dar un contraejemplo que demuestre que el recíproco no es cierto.

2. (*Álgebra de series*). Sean  $\sum_{n \geq 0} x_n$  y  $\sum_{n \geq 0} x'_n$  dos series en un espacio normado  $E$  de sumas  $s$  y  $s'$  respectivamente.

- a) Demostrar que la serie suma  $\sum_{n \geq 0} (x_n + x'_n)$  es convergente de suma  $s + s'$ .
- b) Demostrar que para todo escalar  $\lambda$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} \lambda x_n$  es convergente de suma  $\lambda s$ .

3. (*Criterio de Cauchy para la convergencia de series*). Sea  $\sum_{n \geq 0} x_n$  una serie en un espacio normado  $E$ . Demostrar que

- a) Si  $\sum_{n \geq 0} x_n$  es convergente, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe número natural  $n_0$  tal que si  $m > n \geq n_0$  se verifica  $\|x_{n+1} + \cdots + x_m\| < \epsilon$ .
- b) Si  $E$  es de Banach, el recíproco es cierto.

4. Una serie  $\sum_{n \geq 0} x_n$  en un espacio normado  $E$  se dice que es *absolutamente convergente* si, y solo si  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$  es convergente. Demostrar que si  $\sum_{n \geq 0} x_n$  es una serie absolutamente convergente en un espacio de Banach  $E$ , entonces

- a)  $\sum_{n \geq 0} x_n$  es convergente.

$$b) \left\| \sum_{n \geq 0} x_n \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \|x_n\|.$$

5. Dada una serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  en un espacio normado  $E$ , un esquema de asociación de términos en paquetes finitos viene dada por

$$(x_1 + \cdots + x_{\varphi(1)}) + (x_{\varphi(1)+1} + \cdots + x_{\varphi(2)}) + \cdots$$

en donde  $1 \leq \varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \dots$ , y  $\varphi(n)$  es número natural para todo  $n$ . Si  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es serie con suma  $s \in E$ , demostrar que cualquier esquema de asociación de términos en paquetes finitos aplicada a dicha serie da lugar a una nueva serie con la misma suma  $s$ .

**Solución.** 1. Por hipótesis la sucesión de sumas parciales  $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$  converge a un  $s \in E$ . Entonces,

$$\lim x_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n + (-1) \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

El recíproco no es cierto. Basta considerar  $E = \mathbb{R}$  con la norma del valor absoluto y la serie  $\sum_{n \geq 0} 1/(n+1)$ . Se verifica  $1/(n+1) \rightarrow 0$ , sin embargo la serie no es convergente (serie armónica)

2. a) Sean  $s_n$  y  $s'_n$  las sumas parciales  $n$ -ésimas de las series dadas, respectivamente. Entonces la suma parcial  $n$ -ésima de la serie suma es  $s_n + s'_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + s'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = s + s',$$

es decir la serie suma es convergente con suma  $s + s'$ .

b) La suma parcial  $n$ -ésima de la serie  $\sum_{n \geq 0} \lambda x_n$  es  $\lambda s_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda s_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lambda s,$$

es decir la serie  $\sum_{n \geq 0} \lambda x_n$  es convergente con suma  $\lambda s$ .

3. a) Si  $s$  es la suma de la serie, para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  se verifica  $\|s_n - s\| < \epsilon/2$ . Para  $m > n \geq n_0$  tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| &= \|s_m - s_n\| = \|(s_m - s) + (s - s_n)\| \\ &\leq \|s_m - s\| + \|s_n - s\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

b) Si la serie cumple la condición dada, entonces la sucesión  $s_n$  de las sumas parciales es de Cauchy. Si  $E$  es de Banach, por definición es completo luego

$s_n$  es convergente y así lo es la serie.

4. a) Por hipótesis, la serie  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$  es convergente. Por el criterio de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que si  $m > n \geq n_0$

$$\|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \cdots + \|x_m\| < \epsilon.$$

Pero por la desigualdad triangular,

$$\|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \cdots + \|x_m\| < \epsilon.$$

Como  $E$  es de Banach, basta aplicar el apartado b) del problema anterior.

b) Llamamos  $s_n = x_0 + \cdots + x_n$  y  $s'_n = \|x_0\| + \cdots + \|x_n\|$ . Se verifica  $\|s_n\| \leq s'_n$ . Entonces, usando que la norma es una aplicación continua

$$\left\| \sum_{n \geq 0} x_n \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \right\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|.$$

5. Sea  $\varphi(n)$  un esquema de asociación de términos en paquetes finitos. Es claro que  $s_{\varphi(n)}$  es una subsucesión de  $s_n$ , por tanto tendrá como límite  $s$ .

## 13.7. Normas equivalentes

1. Demostrar que dos normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|^*$  de un espacio vectorial  $E$  son equivalentes, si y sólo si existen constantes reales  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que

$$a \|x\| \leq \|x\|^* \leq b \|x\|$$

para todo  $x \in E$ .

2. Se consideran las normas de  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\|x\|_\infty = \text{máx} \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

en donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Demostrar que  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$  ( $p = 1, 2$ ) y concluir que las tres normas son equivalentes.

**Solución.** 1. Recordamos que por definición, dos normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|^*$  de un espacio vectorial  $E$  son equivalentes si, y sólo si las correspondientes

distancias inducidas determinan la misma topología.  $\square$

Supongamos que las normas son equivalentes. Entonces, las bolas relativas a ellas

$$\{B(x, r) : x \in E, r > 0\}, \quad \{B^*(x, r) : x \in E, r > 0\}$$

constituyen dos bases de una misma topología en  $E$ . Dado que  $B(0, 1)$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B^*(0, r) \subset B(0, 1)$ , luego  $\|x\|^* < r$  implica  $\|x\| < 1$ .

Consideremos  $a$  real tal que  $0 < a < r$  y sea  $y \in E$  cualquiera. Si  $y \neq 0$  entonces  $u = a(y/\|y\|^*)$  verifica  $\|u\|^* = a < r$  y por tanto,  $\|u\| < 1$ . Es decir, para todo  $y \neq 0$  se verifica  $a\|y\| \leq \|y\|^*$  (para  $y = 0$  la desigualdad anterior es trivial). Intercambiando los papeles de las normas, obtenemos la otra desigualdad.

Supongamos ahora que existen constantes reales  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|$  para todo  $x \in E$ . Sea  $r > 0$ . Entonces, para todo  $x \in E$

$$\begin{aligned} y \in B^*(x, ar) &\Rightarrow \|y - x\|^* < ar \Rightarrow a\|y - x\| \leq \|y - x\|^* < ar \\ &\Rightarrow \|y - x\| < r \Rightarrow y \in B(x, r) \Rightarrow B^*(x, ar) \subset B(x, r). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} y \in B(x, r/b) &\Rightarrow \|y - x\| < r/b \Rightarrow \|y - x\|^* \leq b\|y - x\| < b(r/b) \\ &\Rightarrow \|y - x\|^* < r \Rightarrow y \in B^*(x, r) \Rightarrow B(x, r/b) \subset B^*(x, r). \end{aligned}$$

Por el conocido teorema de caracterización de distancias equivalentes por bolas, concluimos que las dos normas generan la misma topología en  $E$ , luego son equivalentes.

2. Tenemos para  $p = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (|x_1| + \cdots + |x_n|)^{1/p} \leq (\|x\|_\infty + \cdots + \|x\|_\infty)^{1/p} \\ &= (n\|x\|_\infty)^{1/p} = n^{1/p}(\|x\|_\infty)^{1/p} \leq n^{1/p}\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Supongamos ahora sin pérdida de generalidad que  $\|x\|_\infty = |x_1|$ . Entonces, para  $p = 1, 2$ :

$$\|x\|_\infty = |x_1| = (|x_1|^p)^{1/p} \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} = \|x\|_p.$$

Usando el resultado del apartado anterior, concluimos que que  $\|x\|_1$  y  $\|x\|_2$  son equivalentes a  $\|x\|_\infty$ , lo cual implica que también son equivalentes entre sí.

### 13.8. Normas no equivalentes

(a) Demostrar que en el espacio vectorial real  $\mathcal{C}[0, 1]$  de las funciones continuas de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$  las normas

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

no son equivalentes.

(b) Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado de dimensión infinita. Demostrar que existen en  $E$  al menos dos normas no equivalentes.

**Solución.** (a) Consideremos la sucesión de funciones  $(f_n)_{n \geq 1}$  definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

Como fácilmente se puede verificar,  $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$ ,  $\|f_n\|_1 = 1/2n$  y  $\|f_n\|_2 = 1$  para todo  $n$ . Es decir, la sucesión tiene por límite la función 0 con la norma  $\|\cdot\|_1$  y la función 1 con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Esto implica que las normas anteriores no definen la misma topología y como consecuencia no pueden ser equivalentes.

(b) Como  $\dim E = \infty$  existe una familia libre  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  de vectores unitarios con la norma dada. Consideremos el subespacio  $F$  de  $E$  generado por la familia anterior, es decir

$$F = L[\{e_n : n \in \mathbb{N}\}] = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Definimos en  $F$  las normas:

$$\left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right\|_1 = \sum_{i=0}^n |\lambda_i|, \quad \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right\|_2 = \sum_{i=0}^n 2^i |\lambda_i|.$$

Es fácil verificar que efectivamente son normas en  $F$ . Estas normas no son equivalentes en  $F$  pues

$$\frac{\|e_n\|_2}{\|e_n\|_1} \rightarrow +\infty.$$

Basta ver que las normas se pueden extender a  $E$ . El conjunto de índices  $J$  puede ser finito, contable infinito o no contable, pero en cualquier caso todo vector  $x \in E$  se puede expresar de manera única en la forma

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^K \mu_k v_{j_k} \quad (j_k \neq j_{k'} \text{ si } k \neq k').$$



Las normas  $\|\cdot\|_l$  ( $l = 1, 2$ ) sobre  $F$  se extienden a  $E$  en la forma

$$\|x\|_l = \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right\|_l + \left\| \sum_{k=1}^K \mu_k v_{j_k} \right\|_l \quad (l = 1, 2).$$

### 13.9. Propiedades topológicas en los espacios normados

1. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados. Se dice que la aplicación  $f : E \rightarrow F$  es Lipschitziana si existe una constante  $k > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

para todo  $x, y \in E$ . Demostrar que toda aplicación Lipschitziana es uniformemente continua.

2. Sean  $E$  un espacio normado. Designemos por  $B(a, r)$  la bola abierta de centro  $a \in E$  y radio  $r > 0$ , y por  $B[a, r]$  la correspondiente bola cerrada.

(a) Demostrar que  $T : B(0, 1) \rightarrow B(a, r)$ ,  $T(x) = a + rx$  es homeomorfismo, siendo además  $T$  y  $T^{-1}$  lipschitzianas.

(b) La misma cuestión considerando bolas cerradas.

3. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $B(a, r)$  una bola abierta de centro  $a \in E$  y radio  $r > 0$ .

(a) Demostrar que  $\overline{B(a, r)} \subset B[a, r]$ . Es decir, la adherencia de una bola abierta está contenida en la bola cerrada.

(b) Demostrar que no siempre  $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$ .

4. Demostrar que en todo espacio normado la adherencia de una bola abierta es la bola cerrada del mismo centro y radio.

5. Sea  $E$  un espacio normado. Demostrar que ningún subespacio vectorial propio de  $E$  tiene puntos interiores.

6. Sea  $E \neq \{0\}$  un espacio normado. Demostrar que  $E$  no es compacto.

7. Sea  $E$  un espacio normado. Demostrar que toda bola (abierta o cerrada), es un conjunto convexo.

8. Demostrar que todo espacio normado  $E$  es conexo por arcos (en consecuencia, es conexo).

**Solución.** 1. Sea  $\epsilon > 0$ . Si  $f$  es Lipschitziana, existe una constante  $k > 0$  tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$  para todo  $x, y \in E$ . Sea  $\delta = \epsilon/k$ . Entonces, para todo  $x, y \in E$

$$\|x - y\| < \delta = \frac{\epsilon}{k} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon,$$

luego  $f$  es uniformemente continua (y por tanto, continua).

2. (a) La aplicación está bien definida pues

$$\|T(x) - a\| = \|a + rx - a\| = r \|x\| < r \cdot 1 = r,$$

es decir  $T(x) \in B(a, r)$ . Es inyectiva pues  $T(x_1) = T(x_2)$  implica  $a + rx_1 = a + rx_2$  y por tanto  $x_1 = x_2$ .

Es sobreyectiva. En efecto, sea  $y \in B(a, r)$ , entonces

$$T(x) = y \Leftrightarrow a + rx = y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{r}a + \frac{1}{r}y,$$

y se verifica

$$\|x\| = \frac{1}{r} \|y - a\| < \frac{1}{r} \cdot r = 1,$$

es decir  $x \in B(0, 1)$ . Las aplicaciones  $T$  y su inversa son por tanto

$$T(x) = a + rx, \quad T^{-1}(y) = -\frac{1}{r}a + \frac{1}{r}y.$$

Dado que

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = r \|x_1 - x_2\|, \quad \|T^{-1}(y_1) - T^{-1}(y_2)\| = (1/r) \|y_1 - y_2\|,$$

las funciones  $T$  y  $T^{-1}$  son lipschitzianas, por tanto uniformemente continuas y por tanto continuas.

(b) Se demuestra de manera totalmente análoga.

3. (a) Si  $x \notin B[a, r]$  entonces,  $d(x, a) > r$ . Llamemos  $\delta = d(x, a) - r$  y consideremos la bola  $B(x, \delta)$ . Entonces,

$$y \in B(a, r) \cap B(x, \delta) \Rightarrow \begin{cases} d(a, y) < r \\ d(x, y) < d(x, a) - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < d(x, a) - r + r = d(x, a) \Rightarrow d(x, a) < d(x, a),$$

lo cual es absurdo. Es decir,  $B(x, \delta) \cap B(a, r) = \emptyset$  y por tanto,  $x \notin \overline{B(a, r)}$ . Concluimos que  $\overline{B(a, r)} \subset B[a, r]$ .

(b) Considerando en  $E = \{a, b\}$  ( $a \neq b$ ) la distancia trivial. Entonces  $\overline{B(a, 1)} = \{a\}$  y  $B[a, 1] = E$ , con lo cual no se verifica la igualdad.

4. Sabemos que en general para todo espacio métrico  $(X, d)$  se verifica  $\overline{B(a, r)} \subset B[a, r]$ . Veamos que en todo espacio normado  $E$  se verifica además  $B[a, r] \subset \overline{B(a, r)}$ . Sea  $x \in B[a, r]$ .

i) Si  $\|x - a\| < r$ , entonces  $x \in B(a, r)$  y trivialmente,  $x \in \overline{B(a, r)}$ .

ii) Si  $\|x - a\| = r$ , sea  $0 < \epsilon < r$  y elijamos

$$y = a + \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)(x - a).$$

Tenemos

$$\|y - a\| = \left\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)(x - a) \right\| = \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)r = r - \frac{\epsilon}{2} < r \Rightarrow y \in B(a, r).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \left\| a + \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)(x - a) - x \right\| \\ &= \left\| a + x - \frac{\epsilon}{2r}x - a + \frac{\epsilon}{2r}a - x \right\| \\ &= \frac{\epsilon}{2r} \|a - x\| = \frac{\epsilon}{2r}r = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Rightarrow y \in B(x, \epsilon). \end{aligned}$$

Se verifica  $B(x, \epsilon) \cap B(a, r) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $x \in \overline{B(a, r)}$ .

5. Sea  $F$  subespacio propio de  $E$ , es decir  $F \neq \{0\}$  y  $F \neq E$ . Existe  $y_0 \in E$  tal que  $y_0 \notin F$ . Sea  $x_0 \in F$  y cualquier bola  $B(x_0, \epsilon)$ . Para cualquier  $\lambda \neq 0$  escalar, el vector  $x = x_0 + \lambda(y_0 - x_0)$  no pertenece a  $F$ . Efectivamente,

$$x \in F \Rightarrow \lambda(y_0 - x_0) \in F \Rightarrow y_0 - x_0 \in F \Rightarrow y_0 \in F \text{ (absurdo)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\lambda| < \frac{\epsilon}{\|y_0 - x_0\|} &\Rightarrow d(x, x_0) = \|x - x_0\| = \|\lambda(y_0 - x_0)\| \\ &= |\lambda| \|y_0 - x_0\| < \frac{\epsilon}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - x_0\| = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, en toda bola  $B(x_0, \epsilon)$  hay puntos que no están en  $F$ .

6. Recordemos que si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces

$$X \text{ es compacto} \Rightarrow X \text{ está totalmente acotado} \Rightarrow X \text{ está acotado}.$$

Sea  $x \in E$  con  $x \neq 0$  fijo y  $\lambda$  escalar variable. Entonces,

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \rightarrow +\infty \quad (\text{si } |\lambda| \rightarrow +\infty).$$

Es decir,  $E$  no está acotado y por tanto no es compacto.

7. Sea la bola abierta  $B(a, r)$  y sean  $x, y \in B(a, r)$ . Veamos que el segmento  $[x, y]$  está contenido en  $B(a, r)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} z \in [x, y] &\Rightarrow \exists t \in [0, 1] : z = (1-t)x + ty \\ &\Rightarrow \|z - a\| = \|(1-t)x + ty - [(1-t)a + ta]\| \\ &\leq (1-t)\|x - a\| + t\|y - a\| < (1-t)r + tr = r \Rightarrow z \in B(a, r). \end{aligned}$$

Análogo razonamiento para bolas cerradas.

8. Sea  $a, b \in E$  y definamos  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ ,  $\varphi(t) = a + t(b - a)$ . Veamos que  $\varphi$  es un arco que une  $a$  con  $b$ . En efecto, claramente  $\varphi(0) = a$  y  $\varphi(1) = b$ . Veamos ahora que  $\varphi$  es continua. Si  $a = b$ , el resultado es evidente. Si  $a \neq b$ , sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon / \|b - a\|$ . Entonces, para cualquier  $t_0$  fijo y cualquier  $t$ , ambos en  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} |t - t_0| \leq \delta &\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| = \|a + t(b - a) - a - t_0(b - a)\| \\ &= |t - t_0| \|b - a\| \leq \frac{\epsilon}{\|b - a\|} \|b - a\| = \epsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\varphi$  es continua.

### 13.10. Aplicaciones lineales continuas entre espacios normados

1. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y  $f : E \rightarrow F$  lineal. Demostrar que si  $f$  es continua en un punto  $a \in E$ , entonces es uniformemente continua en  $E$ .

2. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y  $T : E \rightarrow F$  una aplicación lineal. Demostrar que

$$T \text{ es continua} \Leftrightarrow T \text{ está acotada en } B(0, 1).$$

3. Sea  $T : E \rightarrow F$  una aplicación lineal entre los espacios normados  $E$  y  $F$ . Demostrar que  $T$  no está acotada en todo  $E$  salvo si  $T = 0$ .

4. Sea  $T : E \rightarrow F$  una aplicación lineal entre los espacios normados  $E$  y  $F$ . Demostrar que:  $T$  es continua  $\Leftrightarrow T$  es acotada en cada  $A \subset E$  acotado.

5. Sea  $T : E \rightarrow F$  una aplicación lineal entre los espacios normados  $E$  y  $F$ . Demostrar que:  $T$  es continua  $\Leftrightarrow$  existe  $K > 0$  real tal que  $\|T(x)\| \leq K \|x\|$  para todo  $x \in E$

**Solución.** 1. Si  $f$  es continua en  $a$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$  si  $\|x - a\| < \delta$ . Sean ahora cualquier par de puntos  $x, y \in E$  con  $\|x - y\| < \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|(x - y + a) - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x - y + a) - f(a)\| < \epsilon \\ &\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(y) - f(a) + f(a)\| \\ &\quad \underbrace{=}_{f \text{ lineal}} \|f(x - y + a) - f(a)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

*Nota.* Esto implica que las aplicaciones lineales entre espacios normados tienen un comportamiento extremo con respecto a la continuidad: o son uniformemente continuas en todo el espacio inicial, o bien no son continuas en ningún punto.

2.  $\Rightarrow$ ) Como  $T$  es continua en  $E$ , es continua en  $0$ , luego existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x)\| < 1$  si  $\|x\| < \delta$ . Tenemos

$$\begin{aligned} x \in B(0, 1) &\Rightarrow \|\delta x\| = \delta \|x\| < \delta \cdot 1 = \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\| < 1 \\ &\Rightarrow \delta \|T(x)\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{1}{\delta} \Rightarrow T \text{ está acotada en } B(0, 1). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Como  $T$  está acotada en  $B(0, 1)$ , existe  $K > 0$  tal que  $\|T(x)\| < 1$  si  $\|x\| < 1$ . Veamos que  $T$  es continua en  $0$  (y por tanto, será continua en todo  $E$ ). Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $\delta = \epsilon/K$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|x\| < \delta &\Rightarrow \left\| \frac{1}{\delta} x \right\| = \frac{1}{\delta} \|x\| < 1 \Rightarrow \left\| T \left( \frac{1}{\delta} x \right) \right\| < K \\ &\Rightarrow \|T(x)\| < K\delta = \epsilon \Rightarrow T \text{ es continua en } 0. \end{aligned}$$

3. Si  $T \neq 0$ , existe  $x \in E$  tal que  $T(x) \neq 0$ . Entonces,  $\|T(\lambda x)\| = |\lambda| \|T(x)\|$ . Como  $\|T(x)\| \neq 0$  se verifica  $\|T(x)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ , luego  $T$  no está acotada en  $E$ . Por otra parte, si  $T = 0$  es claro que está acotada en  $E$ .

4.  $\Leftarrow$ ) Si  $T$  es acotada en cada  $A \subset E$  acotado, en particular está acotada en el conjunto acotado  $B(0, 1)$ , luego  $T$  es continua como consecuencia del

segundo apartado.

$\Rightarrow$ ) Si  $T$  es continua,  $T$  está acotada en  $B(0, 1)$ , es decir existe  $K > 0$  tal que  $\|T(x)\| < K$  si  $\|x\| < 1$ . Si  $A \subset E$  está acotado, está contenido en una bola  $B(0, r)$  con  $r > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \|x\| < r \Rightarrow \left\| \frac{1}{r}x \right\| < 1 \Rightarrow \left\| T\left(\frac{1}{r}x\right) \right\| < K \\ &\Rightarrow \frac{1}{r} \|T(x)\| < K \Rightarrow \|T(x)\| < rK \Rightarrow T \text{ está acotada en } A. \end{aligned}$$

5.  $\Rightarrow$ ) La bola cerrada  $\overline{B}(0, 1)$  está acotada. Por ser  $T$  continua,  $T$  está acotada en  $\overline{B}(0, 1)$  (apartado anterior). Es decir, existe  $K > 0$  real tal que  $\|T(x)\| \leq K$  si  $\|x\| \leq 1$ . Entonces,  $\forall x \in E$  ( $x \neq 0$ ):

$$\left\| \frac{1}{\|x\|}x \right\| = 1 \Rightarrow T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \leq K \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}T(x) \leq K \Rightarrow \|T(x)\| \leq K\|x\|,$$

y para  $x = 0$  la última desigualdad se verifica trivialmente.

$\Leftarrow$ ) Si  $\|x\| < 1$  se verifica  $\|T(x)\| \leq K\|x\| < K$ , es decir  $T$  está acotada en  $B(0, 1)$  lo cual implica que  $T$  es continua (por el apartado 2).

### 13.11. Una aplicación lineal discontinua

Se considera el espacio vectorial  $E = \mathcal{C}^1[0, 1]$  de las funciones reales de clase 1 definidas en  $[0, 1]$  con la norma  $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Demostrar que la aplicación

$$T : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(f) = f'(0)$$

es lineal pero no continua.

**Solución.** Para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y para todo  $f, g \in E$ ,

$$T(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = \lambda T(f) + \mu T(g)$$

es decir,  $T$  es lineal. Veamos que no es continua. Elijamos la sucesión de funciones de  $E$ :

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(n^2x)}{n}.$$

Tenemos para todo  $x \in [0, 1]$ :

$$\left| \frac{\text{sen}(n^2x)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|f_n\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \rightarrow 0.$$

Por otra parte,

$$T(f_n) = f'_n(0) = \frac{n^2 \cos(n^2 \cdot 0)}{n} = n \rightarrow +\infty.$$

Entonces, la función  $T$  no es continua pues si lo fuera, se tendría que verificar  $T(f_n) \rightarrow T(0) = 0$ .

### 13.12. Espacios normados de dimensión finita

1. Demostrar que todos los espacios normados  $(E, \|\cdot\|_E)$  de dimensión finita dada  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), son homeomorfos.

2. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados sobre  $\mathbb{K}$  con  $E$  de dimensión finita. Demostrar que toda aplicación lineal  $T : E \rightarrow F$  es continua.

3. Sea  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensión finita. Demostrar que todas las normas que se pueden definir en  $E$  son equivalentes.

**Solución.** 1. Dado que la relación *ser homeomorfo a* es de equivalencia, bastará demostrar que  $(E, \|\cdot\|_E)$  es homeomorfo a  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ . Por comodidad, denotaremos a  $\|\cdot\|_E$  simplemente por  $\|\cdot\|$ . Sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base de  $E$ . Definimos la aplicación lineal

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow E, \quad T(x) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, \text{ siendo } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Esta aplicación lineal es claramente biyectiva. Veamos que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuas. Tenemos para todo  $x \in \mathbb{K}^n$ :

$$\|T(x)\| = \left\| T \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(u_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(u_i)\|.$$

Llamemos  $M = \max \{\|T(u_i)\| \mid i = 1, \dots, n\}$ . Claramente  $M > 0$  y queda

$$\|T(x)\| \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| = M \|x\|_1 \quad \forall x \in E,$$

es decir  $T$  es continua, de acuerdo con una conocida propiedad.

Veamos ahora que  $T^{-1}$  es continua. Sea  $S = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_1 = 1\}$  y consideremos la aplicación:

$$f : S \rightarrow \mathbb{K}, \quad f(x) = \|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|.$$

Veamos que  $f$  es Lipschitziana (y por tanto será continua). Para todo  $x, y \in S$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n y_i u_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) u_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|u_i\| \leq K \|x - y\|_1 \text{ siendo } K = \max\{\|u_1\|, \dots, \|u_n\|\}. \end{aligned}$$

Como  $S$  es compacto en  $(\mathbb{K}, \|\cdot\|_1)$ ,  $f$  alcanza un mínimo absoluto en un punto  $a \in S$  es decir,  $f(x) \geq f(a) = m$  para todo  $x \in S$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \neq x \in \mathbb{K}^n &\Rightarrow \frac{x}{\|x\|_1} \in S \Rightarrow f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) = \frac{1}{\|x\|_1} f(x) \\ &= \frac{1}{\|x\|_1} T(x) \geq m. \end{aligned}$$

Como  $\|a\|_1 = 1$  y  $T(a) \neq 0$  ( $T$  es biyectiva y  $a \neq 0$ ) se tiene  $m = f(a) = \|T(a)\| > 0$ . Por tanto, para todo  $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$  se verifica

$$\|x\|_1 \leq \frac{1}{m} \|T(x)\|.$$

Sea ahora  $y \in E$ . Puesto que  $T$  es biyectiva, se tiene que  $T^{-1}(y) \in \mathbb{K}^n$  y por tanto

$$\|T^{-1}(y)\|_1 \leq \frac{1}{m} \|y\|,$$

lo cual implica que  $T^{-1}$  es continua por una conocida caracterización.

2. La aplicación  $T^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  del apartado anterior está acotada en la bola unidad de  $E$  por ser continua. Es decir, para todo  $x \in E$  existe  $K > 0$  tal que

$$T^{-1}(x) = |x_1| + \dots + |x_n| < K \text{ si } \|x\| < 1. \quad (*)$$

Sea ahora  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  base de  $E$ . Para todo  $x \in E$  podemos expresar  $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ . Entonces,

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(u_i)\| \leq M \sum_{i=1}^n |x_i|$$

si  $M = \max\{\|T(u_i)\| : i = 1, \dots, n\}$ . Si  $x \in E$  y  $\|x\| < 1$  tenemos por (\*) que  $\|T(x)\| < MK$ . La aplicación  $T$  está acotada en  $B(0, 1)$  y por tanto es continua.



3. Sean  $\| \cdot \|_1$  y  $\| \cdot \|_2$  dos normas sobre  $E$  y sea la biyección

$$i : (E, \| \cdot \|_1) \rightarrow (E, \| \cdot \|_2), \quad i(x) = x.$$

Como  $i$  e  $i^{-1}$  son lineales y  $E$  de dimensión finita,  $i$  e  $i^{-1}$  son continuas, por tanto existen  $K > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$\|i(x)\|_2 \leq K \|x\|_1 \wedge \|i^{-1}(x)\|_1 \leq M \|x\|_2 \quad \forall x \in E,$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{M} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Es decir,  $\| \cdot \|_1$  y  $\| \cdot \|_2$  son equivalentes.

### 13.13. Teorema de Riesz

Demostrar el teorema de Riesz:

Sea  $E$  un espacio normado. Entonces, son equivalentes:

- (a)  $E$  es de dimensión finita.
- (b) La bola cerrada unidad es compacta.
- (c) Los conjuntos compactos de  $E$  son exactamente los cerrados y acotados.
- (d)  $E$  es localmente compacto.

**Solución.** Primeramente veamos que (b), (c) y (d) son equivalentes.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Por hipótesis,  $\overline{B}(0, 1)$  es compacta y sabemos que toda propiedad topológica que tenga una bola abierta (cerrada) la tienen todas las bolas abiertas (cerradas). Sea  $K \subset E$  cerrado y acotado. Por estar acotado, está contenido en una bola cerrada  $\overline{B}(a, r)$  lo cual implica que  $K$  es compacto (por ser subconjunto cerrado de un compacto). Por otra parte, si  $K \subset E$  es compacto, entonces  $K$  es cerrado y acotado (pues todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado).

(c)  $\Rightarrow$  (d) Sea  $a \in E$ . Sabemos que en todo espacio normado se verifica  $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$ , lo cual implica que la bola  $\overline{B}(a, r)$  es conjunto cerrado. Como además está acotado, es compacto por la hipótesis (c). Concluimos que  $E$  es localmente compacto.

(d)  $\Rightarrow$  (b) Como  $E$  es localmente compacto, 0 tiene un entorno  $V(0)$  que es compacto. Existe una bola  $B(0, \epsilon) \subset V(0)$ . Tenemos

$$\overline{B}(0, \epsilon) = \underbrace{\overline{B(0, \epsilon)}}_{\text{cerrado}} \subset \underbrace{V(0)}_{\text{compacto}} \Rightarrow \overline{B}(0, \epsilon) \text{ es compacto.}$$

Como todas las bolas cerradas son homeomorfas, concluimos que la bola cerrada unidad es un conjunto compacto.

Demostremos ahora que (a) y (b) son equivalentes, con lo cual quedará probado el teorema de Riesz.

(a)  $\Rightarrow$  (b) Sea  $E$  de dimensión finita. Sabemos que en tal caso  $E$  es homeomorfo a  $\mathbb{K}^n$  con la norma  $\|\cdot\|_1$ , luego  $\overline{B}(0, 1)$  es homeomorfo a  $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$  (que es compacto), en consecuencia  $\overline{B}(0, 1)$  es compacto.

Para demostrar (b)  $\Rightarrow$  (a), demostraremos previamente el siguiente lema:

**Lema.** Sea  $E$  un espacio normado y  $F$  un subespacio propio y cerrado de  $E$ . Entonces, para cada  $0 < \epsilon < 1$  existe un vector  $x \in E$  tal que  $\epsilon < d(x, F) < 1$ .

*Demostración.* Como  $F$  es cerrado y  $F \neq E$ , existe  $y \in E - F$  tal que  $d(y, F) > 0$ . Entonces, algún vector proporcional a  $y$  i.e. de la forma  $\lambda y$  ha de cumplir  $\epsilon < d(\lambda y, F) < 1$ . Existe por tanto un  $u \in F$  tal que  $\|\lambda y - u\| < 1$ . Llamando  $x = \lambda y - u$ ,

$$\epsilon < d(\lambda y, F) = d(x + u, F) = \inf\{\|x + u - z\| : z \in F\}.$$

Como  $u \in F$ , llamando  $z' = z - u$ , cuando  $z$  recorre todo  $F$ , también  $z'$  recorre todo  $F$ . Por tanto

$$\epsilon < d(\lambda y, F) = \inf\{\|x - z'\| : z' \in F\} = d(x, F) < 1$$

y claramente  $x \notin F$ . Hemos demostrado el lema.  $\square$

(b)  $\Rightarrow$  (a) Supongamos que  $\dim E = +\infty$  y veamos que  $\overline{B}(0, 1)$  no es compacto. Por ser  $E$  espacio métrico, equivale a demostrar que  $\overline{B}(0, 1)$  no es secuencialmente compacto. Es decir, veamos que existe una sucesión en  $\overline{B}(0, 1)$  que no tiene subsucesión convergente en  $E$ .

Sea  $0 \neq x_1 \in E$  y sea  $F_1 = L[x_1]$ . Tenemos  $\dim F_1 = 1 \neq +\infty$ , luego  $F_1$  es subespacio propio de  $E$ . Además, por ser  $F_1$  subespacio de  $E$ , es conjunto cerrado. Por el lema anterior, existe  $x_2 \in E$  tal que  $1/2 < d(x_2, F_1) < 1$ . Es decir, existe un  $\|x_2\| < 1$  tal que  $\|x_1 - x_2\| > 1/2$ . Procediendo de manera análoga con  $F_2 = L[x_1, x_2]$  (subespacio propio y cerrado), existe  $x_3 \in E$  tal que

$$\|x_3\| < 1, \quad \|x_1 - x_3\| > \frac{1}{2}, \quad \|x_2 - x_3\| > \frac{1}{2}.$$

Podemos construir de esta manera una sucesión de puntos de  $\overline{B}(0, 1)$  que no admite subsucesión de Cauchy (cada dos términos distan entre sí más de

1/2), y por tanto no admite subsucesión convergente. Queda pues demostrado el teorema de Riesz.

### 13.14. Norma de una aplicación lineal y continua

Sean  $E$  y  $F$  dos espacios normados y  $T : E \rightarrow F$  una aplicación lineal y continua. Sabemos que en tal caso existe  $K > 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq K \|x\|$  para todo  $x \in E$ . En consecuencia el conjunto

$$\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0 \right\}$$

está acotado por  $K$ . Ello implica que tal conjunto tiene supremo finito. Definimos la norma de  $T$  y se representa por  $\|T\|$  a:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

1. Demostrar que  $\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|T(u)\|$ .
2. Demostrar que  $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$  para todo  $x \in E$ .
3. Sean  $E, F, G$  espacios normados y  $T : E \rightarrow F$ ,  $U : F \rightarrow G$  lineales y continuas. Demostrar que  $\|U \circ T\| \leq \|U\| \|T\|$ .
4. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y denotemos por  $\mathcal{L}(E, F)$  al espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas entre  $E$  y  $F$ . Demostrar que la aplicación  $T \rightarrow \|T\|$  es una norma en  $\mathcal{L}(E, F)$ .
5. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados. Demostrar que si  $F$  es de Banach entonces  $\mathcal{L}(E, F)$  también es de Banach.

**Solución.** 1. Para todo  $x \in E$  con  $x \neq 0$  y teniendo en cuenta que  $T$  es lineal

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| = \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|T(u)\|,$$

siendo  $u = x/\|x\|$  unitario, de donde fácilmente se deduce el resultado.

2. Para  $x \neq 0$  tenemos

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \Rightarrow \|T\| \geq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \quad \forall x \neq 0,$$

y para  $x = 0$  la desigualdad es trivial.

3. Como la composición de aplicaciones lineales es lineal y la de continuas es continua, está bien definida  $\|U \circ T\|$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|U \circ T\| &= \sup_{\|u\|=1} \|(U \circ T)(u)\| = \sup_{\|u\|=1} \|U(T(u))\| \leq \sup_{\|u\|=1} \|U\| \|T(u)\| \\ &\leq \|U\| \sup_{\|u\|=1} \|T\| \|u\| = \|U\| \|T\|. \end{aligned}$$

4. Claramente  $\|T\| \geq 0$  para todo  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .

(i) Tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} \|T\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \|T(x)\| = 0 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow T(x) = 0 \quad \forall x \neq 0. \end{aligned}$$

Como  $T$  es lineal,  $T(0) = 0$  luego  $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ .

(ii) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  escalar y para todo  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  :

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda T)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda T(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|T\|. \end{aligned}$$

(iii) Para todo  $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$  :

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T + S)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x) + S(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\| + \|S(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} \right) \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} = \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Es decir,  $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ .

5. Sea  $\{T_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{L}(E, F)$  y  $0 \neq x \in E$  fijo. Veamos que  $\{T_n(x)\}$  es de Cauchy en  $F$ . Efectivamente, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  natural tal que

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\epsilon}{\|x\|} \quad \text{si } n, m \geq n_0.$$

Entonces,

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\epsilon}{\|x\|} \Rightarrow \sup_{v \neq 0} \frac{\|T_n(v) - T_m(v)\|}{\|v\|} < \frac{\epsilon}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} < \frac{\epsilon}{\|x\|} \Rightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\| < \epsilon.$$

Al ser  $F$  de Banach,  $\{T_n(x)\}$  es convergente. Como  $\{T_n(0)\}$  es trivialmente convergente, tenemos definida una función  $T$  de la siguiente manera:

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

Veamos que  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , es decir que es lineal y continua. Para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  y para todo  $x, y \in E$ :

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda T_n(x) + \mu T_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \end{aligned}$$

luego  $T$  es lineal. Veamos ahora que es continua. Teniendo en cuenta la continuidad de la norma y que  $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\|$  para todo  $x \in E$ :

$$\|T(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \right\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(x)\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|T_n(x)\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|T_n\| \|x\|.$$

La sucesión  $T_n$  es de Cauchy y sabemos que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico está acotada, en consecuencia  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|T_n\|$  es finito y por tanto ocurre  $\|T(x)\| \leq M \|x\|$  para todo  $x \in E$ . Esto implica que  $T$  es continua. Hemos demostrado que  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Basta demostrar que  $T_n \rightarrow T$  en  $\mathcal{L}(E, F)$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por ser  $T_n$  sucesión de Cauchy, existe  $n_0$  natural tal que  $\|T_n - T_m\| < \epsilon$  si  $n, m \geq n_0$ . Sea  $x \in E$  y  $n \geq n_0$ , entonces para todo  $m \geq n_0$ :

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| = \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|.$$

Dado que  $T(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} T_m(x)$ ,

$$\begin{aligned} \|T(x) - T_n(x)\| &= \|(T - T_n)(x)\| \leq \epsilon \|x\| \\ \Rightarrow \frac{\|(T - T_n)(x)\|}{\|x\|} &\leq \epsilon \Rightarrow \|T - T_n\| \leq \epsilon \end{aligned}$$

lo cual demuestra que  $T_n \rightarrow T$  en  $\mathcal{L}(E, F)$ .

*Nota.* Se puede demostrar que la condición de ser  $F$  de Banach es condición necesaria para que lo sea  $\mathcal{L}(E, F)$ .

### 13.15. Diferenciabilidad entre espacios de Banach

Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach, ambos sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Sea  $A \subset E$  abierto y  $x_0 \in A$ . Sea  $f : A \rightarrow F$  una aplicación continua en  $x_0$ . Se dice que  $f$  es *diferenciable* en  $x_0$  si y sólo si existe una aplicación lineal  $\lambda : E \rightarrow F$  tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

1. Interpretar geoméricamente la definición anterior.
2. Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , la aplicación lineal  $\lambda$  es única. Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , a la única aplicación lineal  $\lambda : E \rightarrow F$  de la que habla la definición se la llama *diferencial* (o *derivada*) de  $f$  en  $x_0$  y se la representa por  $f'(x_0)$  o bien por  $Df(x_0)$ .
3. Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  entonces  $f'(x_0) : E \rightarrow F$  es continua.

*Nota.* Como consecuencia,  $f'(x_0)$  pertenece al espacio de Banach  $\mathcal{L}(E, F)$  de las aplicaciones lineales y continuas de  $E$  en  $F$ .

**Solución.** 1. Si  $\|h\|$  es pequeño, debido la límite anterior,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)\|$$

es todavía más pequeño. En consecuencia, el que  $f$  sea diferenciable en  $x_0$  significa que el incremento de  $f$  en un entorno de  $x_0$  se puede aproximar por medio de una aplicación lineal.

2. Supongamos que existieran dos aplicaciones lineales  $\lambda_1, \lambda_2 : E \rightarrow F$  tales que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_1(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_2(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea la aplicación lineal  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . Para todo  $h \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda(h)\| &= \|(\lambda_1 - \lambda_2)(h)\| = \|\lambda_1(h) - \lambda_2(h)\| \\ &= \|\lambda_1(h) - f(x_0 + h) + f(x_0) - \lambda_2(h) + f(x_0 + h) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_1(h)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_2(h)\|. \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $\|h\|$  ( $h \neq 0$ ),

$$0 \leq \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda_2(h)\|}{\|h\|}.$$

Tomando límites, y aplicando el teorema del sandwich,

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \leq 0 + 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Consideremos  $0 \neq h \in E$  fijo y  $t \in \mathbb{K}$  variable. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(th)\|}{\|th\|} \underbrace{=}_{\lambda \text{ lineal}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|t\lambda(h)\|}{\|th\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| \|\lambda(h)\|}{|t| \|h\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} \underbrace{=}_{h \text{ constante}} \frac{\|\lambda(h)\|}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \|\lambda(h)\| = 0 \Rightarrow \lambda(h) = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser  $\lambda$  lineal se verifica  $\lambda(0) = 0$  y por tanto  $\lambda = 0$ . Esto prueba que  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

3. Denotemos a  $f'(x_0)$  por  $\lambda$  y sea  $\epsilon > 0$ . Por hipótesis  $f$  es continua en  $x_0$ , por tanto existe  $0 < \delta_1$  tal que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , existe  $0 < \delta_2 < 1$  tal que

$$\|h\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2} \|h\|.$$

Si  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , entonces  $\delta < 1$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \|h\| < \delta &\Rightarrow \|\lambda(h)\| = \|(f(x_0 + h) - f(x_0)) - (f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h))\| \\ &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \|h\| \underbrace{\leq}_{\|h\| < 1} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, si  $\|h\| < \delta$  se verifica  $\|\lambda(h)\| < \epsilon$ . Pero

$$x \in B(0, 1) \Rightarrow \|x\| < 1 \Rightarrow \|\delta x\| = \delta \|x\| < \delta.$$

En consecuencia

$$x \in B(0, 1) \Rightarrow \|\lambda(x)\| = \left\| \lambda \left( \delta \cdot \frac{1}{\delta} x \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\delta} \lambda(\delta x) \right\| = \frac{1}{\delta} \|\lambda(\delta x)\| < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

La aplicación lineal  $\lambda$  está acotada en la bola abierta unidad, luego  $\lambda$  es continua.

### 13.16. Criterio de Dirichlet para la convergencia de series

1. Sea  $(\lambda_n)$  una sucesión monótona y acotada de números reales y  $(s_n)$  una sucesión acotada de vectores de un espacio normado  $E$ . Sea  $u_n = (\lambda_n - \lambda_{n+1})s_n$ . Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente convergente.

2. Demostrar el criterio de Dirichlet para la convergencia de series:

Sea  $E$  un espacio de Banach. Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  en donde:

(a)  $x_n = \lambda_n y_n$  con  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $y_n \in E$  para todo  $n$ .

(b)  $(\lambda_n)$  es monótona con límite 0.

(c) Las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$  están acotadas.

Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  es convergente.

3. Usando el criterio de Dirichlet, demostrar que la siguiente serie es convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}.$$

4. Demostrar el criterio de Leibniz para series alternadas a partir del criterio de Dirichlet.

**Solución.** 1. Como  $(s_n)$  está acotada, existe un  $K$  tal que  $\|s_n\| \leq K$  para todo  $n$ . Por tanto

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \|s_k\| \leq K \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}|.$$

Dado que  $(\lambda_n)$  es monótona (bien creciente, bien decreciente) deducimos que

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}| = |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|.$$

Al ser  $(\lambda_n)$  sucesión monótona y acotada, tiene límite  $\lambda$  y claramente se verifica  $|\lambda_1 - \lambda_{n+1}| \leq |\lambda_1 - \lambda|$ . Es decir, tenemos para todo  $n$ :

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\| \leq K |\lambda_1 - \lambda|.$$

La serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|$  es convergente al tener las sumas parciales acotadas, lo cual equivale a decir que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente



convergente.

2. Llamando  $s_n = y_1 + \dots + y_n$  tenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 (s_2 - s_1) + \dots + \lambda_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) s_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) s_{n-1} + \lambda_n s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k + \lambda_n s_n. \end{aligned}$$

Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  siendo  $u_n = (\lambda_n - \lambda_{n+1}) s_n$ . La sucesión  $(\lambda_n)$  es monótona y al tener límite, está acotada. La sucesión  $(s_n)$  está acotada por hipótesis. Por el problema anterior, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente convergente y por ser  $E$  espacio de Banach, también es convergente. Es decir, existe

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k \in E.$$

Dado que  $(\lambda_n) \rightarrow 0$  y  $(s_n)$  está acotada se verifica  $(\lambda_n s_n) \rightarrow 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k + \lambda_n s_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k = l. \end{aligned}$$

Hemos pues demostrado que  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  es convergente.

3. Consideramos en este caso  $E = \mathbb{R}$ , que sabemos que es espacio de Banach con la norma del valor absoluto. La sucesión  $\lambda_n = 1/n$  es monótona y con límite 0. Por otra parte, la serie de término general  $y_n = \text{sen}(n\pi/2)$  tiene sus sumas parciales  $s_n$  acotadas pues tal sucesión es  $(1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$ . Como consecuencia del criterio de Dirichlet, la serie dada es convergente.

4. Sea la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  con  $a_n$  monótona decreciente y límite 0. Como  $y_n = (-1)^n$  tiene las sumas parciales acotadas y  $\lambda_n = a_n$  es monótona con límite 0, se deduce del criterio de Dirichlet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  es convergente.

### 13.17. Criterio de Abel para la convergencia de series

1. Sea  $(\lambda_n)$  una sucesión monótona y acotada de números reales y  $(s_n)$  una sucesión acotada de vectores de un espacio normado  $E$ . Sea  $u_n =$

$(\lambda_n - \lambda_{n+1})u_n$ . Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente convergente.

2. Demostrar el criterio de Abel para la convergencia de series:

Sea  $E$  un espacio de Banach. Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  en donde:

(a)  $x_n = \lambda_n y_n$  con  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $y_n \in E$  para todo  $n$ .

(b)  $(\lambda_n)$  es monótona y acotada.

(c) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$  es convergente.

Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  es convergente.

3. Usando el criterio de Abel demostrar que es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

**Solución.** 1. Como  $(s_n)$  está acotada, existe un  $K$  tal que  $\|s_n\| \leq K$  para todo  $n$ . Por tanto

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \|s_k\| \leq K \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}|.$$

Dado que  $(\lambda_n)$  es monótona (bien creciente, bien decreciente) deducimos que

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}| = |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|.$$

Al ser  $(\lambda_n)$  sucesión monótona y acotada, tiene límite  $\lambda$  y claramente se verifica  $|\lambda_1 - \lambda_{n+1}| \leq |\lambda_1 - \lambda|$ . Es decir, tenemos para todo  $n$ :

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\| \leq K |\lambda_1 - \lambda|.$$

La serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|$  es convergente al tener las sumas parciales acotadas, lo cual equivale a decir que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente convergente.

2. Llamando  $s_n = y_1 + \dots + y_n$  tenemos

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 (s_2 - s_1) + \dots + \lambda_n (s_n - s_{n-1})$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) s_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) s_{n-1} + \lambda_n s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k + \lambda_n s_n.$$

Consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  siendo  $u_n = (\lambda_n - \lambda_{n+1})s_n$ . Se satisfacen las hipótesis del resultado del problema anterior pues  $(\lambda_n)$  es monótona acotada y  $(s_n)$  está acotada por ser convergente la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ . Por tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es absolutamente convergente y por ser  $E$  de Banach, es convergente. Es decir, existe

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})s_k \in E.$$

Al ser  $(\lambda_n)$  monótona y acotada, tiene límite  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Al ser  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$  convergente, existe  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in E$ . En consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + \dots + x_n) = l + \lambda s \in E.$$

Concluimos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  es convergente.

3. La sucesión  $\lambda_n = 1/n^2$  es claramente monótona y acotada. Por otra parte, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/(1+i)^n$  es convergente por ser geométrica de razón  $1/(1+i)$  y  $|1/(1+i)| = 1/\sqrt{2} < 1$ . Por el criterio de Abel, la serie dada es convergente.

### 13.18. Espacio de funciones completo y no compacto

Sea  $E = \mathcal{C}(I, I)$  el espacio de las funciones continuas de  $I = [0, 1]$  en  $I$  con la distancia

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}.$$

- a) Demostrar que  $E$  es completo.
- b) Demostrar que  $E$  no es compacto.
- c) Encontrar un elemento de  $E$  que tenga un único punto fijo.

(Propuesto en examen, Amp. de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** a) Como  $\mathbb{R}$  es completo e  $I = [0, 1]$  es cerrado, se concluye que  $I$  es completo. Consideremos una sucesión de Cauchy  $(f_n)$  en  $E$ , veamos que converge en  $E$ . Al ser  $(f_n)$  de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow \max\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} < \epsilon. \quad [1]$$

Esto implica que para todo  $x \in I$  la sucesión  $(f_n(x))$  es de Cauchy, y al ser  $I$  completo, tiene un límite al que llamamos  $f(x)$ . Además,  $f(x) \in I$ . Tomando límites cuando  $m$  tiende a  $\infty$  en [1], para cada  $n \geq n_0$  :

$$d(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon.$$

En consecuencia, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces se cumple  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in I$ . La convergencia de  $(f_n)$  hacia  $f$  es uniforme y al ser las  $f_n$  continuas, así lo es  $f$ . Es decir,  $f \in E$  y por tanto  $E$  es completo.

b) Veamos que  $E$  no es secuencialmente compacto. En espacios métricos esto equivale a no ser compacto. La sucesión  $(f_n)$  en  $E$  dada por  $f_n(x) = x^n$  converge a la función:  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1)$  y  $f(1) = 1$ . Cualquier subsucesión de  $(f_n)$  converge a  $f$ , que no pertenece en  $E$  pues  $f$  no es continua:  $E$  no es compacto.

c) Consideremos  $g(x) = x/2$ . Claramente  $g \in E$  y si  $x_0$  es punto fijo de  $g$  entonces  $x_0/2 = x_0$  o bien  $x_0 = 0$ :  $g$  tiene un único punto fijo.

### 13.19. Espacio de Banach con la norma del supremo

Sea  $I = [a, b]$  intervalo cerrado de la recta real y  $E = C(I)$  el espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de las funciones continuas  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

a) Demostrar que  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$  es una norma en  $E$ .

b) Demostrar que  $(E, \|\cdot\|)$  es espacio de Banach.

**Solución.** a) Las funciones continuas en  $I$  están acotadas, por tanto se verifica  $\|f\| \geq 0$  y finito para todo  $f \in E$ . Por otra parte,

$$1. \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \in I\} = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f = 0.$$

2. Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y para todo  $f \in E$ ,

$$\|\lambda f\| = \sup\{|(\lambda f)(x)| : x \in I\} = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in I\}$$

$$= \sup\{|\lambda| |f(x)| : x \in I\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in I\} = |\lambda| \|f\|.$$

3. Para todo  $f, g \in E$ ,

$$\|f + g\| = \sup\{|(f + g)(x)| : x \in I\} = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in I\}$$

$$\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in I\}$$

$$\leq \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|g(x)| : x \in I\} = \|f\| + \|g\|.$$

b) Sea  $f_n$  una sucesión de Cauchy en  $E$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $n_0$  tal que para todo  $n, m \geq n_0$  naturales se verifica  $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ , y como consecuencia para todo  $x \in I$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon,$$

luego para todo  $x \in I$  la sucesión  $f_n(x)$  es sucesión de Cauchy y por tanto convergente ( $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son completos). Llamando  $f(x)$  al límite de esta sucesión, queda definida una función  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

Veamos que esta función es continua, es decir, que pertenece a  $E$ . En efecto, para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$  y  $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon/2$  para todo  $n, m \geq N$ . Como consecuencia,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall x \in I, \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Es decir,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, y al ser las  $f_n$  continuas también lo es  $f$ . Concluimos que  $\mathcal{C}(I)$  es completo y por tanto de Banach.

### 13.20. Espacio de Banach $l^1(\mathbb{N})$

Sea  $l^1(\mathbb{N})$  el conjunto de las sucesiones  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$  con términos en  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), tales que  $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$  es finito.

a) Demostrar que  $l^1(\mathbb{N})$  es espacio vectorial con las operaciones habituales suma y producto por un escalar.

b) Demostrar que  $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$  define una norma en  $l^1(\mathbb{N})$ .

c) Demostrar que  $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  es de Banach.

**Solución.** a) Basta demostrar que  $l^1(\mathbb{N})$  es subespacio del espacio vectorial de las sucesiones con términos en  $\mathbb{K}$ . Efectivamente, la sucesión nula claramente pertenece a  $l^1(\mathbb{N})$ . Si  $x = (x_j)$  e  $y = (y_j)$  son elementos de  $l^1(\mathbb{N})$ , se verifica para todo  $k$  finito

$$\sum_{j=1}^k |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^k |x_j| + \sum_{j=1}^k |y_j| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Haciendo  $k \rightarrow \infty$ , queda

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j + y_j| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

lo cual demuestra que  $x + y \in l^1(\mathbb{N})$  y además que

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $x = (x_j) \in l^1(\mathbb{N})$  y usando el álgebra de series

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda| |x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \quad (\text{finito}),$$

lo cual demuestra que  $\lambda x \in l^1(\mathbb{N})$  y además que  $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$ .

b) La segunda y tercera propiedades de la norma se probaron en el apartado anterior. Por otra parte

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = 0 \Leftrightarrow |x_j| = 0 \forall j \Leftrightarrow x_j = 0 \forall j \Leftrightarrow x = 0,$$

y por tanto  $\|\cdot\|_1$  es norma.

c) Sea  $x^n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy. Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que  $\|x^m - x^n\| \leq \epsilon$  si  $m, n \geq n_0$  y como consecuencia,

$$|x_j^m - x_j^n| \leq \epsilon$$

para cualquier  $j$  fijo. Esto implica que la sucesión  $x_j^n$  es de Cauchy para todo  $j$  fijo y por la completitud de  $\mathbb{K}$  tiene un límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n = x_j$  que pertenece a  $\mathbb{K}$ . Consideremos ahora

$$\sum_{j=1}^k |x_j^m - x_j^n| \leq \epsilon$$

y tomemos límites cuando  $m \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{j=1}^k |x_j - x_j^n| \leq \epsilon$$

La igualdad anterior se verifica para todo  $k$  finito,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_j^n| \leq \epsilon$$

y por tanto,  $\|x - x^n\|_1 \leq \epsilon$  si  $n \geq n_0$ . Esto demuestra que  $x^n \rightarrow x$ , que  $x - x^n \in l^1(\mathbb{N})$  y como consecuencia  $x = x^n + (x - x^n) \in l^1(\mathbb{N})$ . Concluimos que  $l^1(\mathbb{N})$  es completo.

# Capítulo 14

## Análisis complejo

### 14.1. Proyección estereográfica

Se llama esfera de Riemann a la esfera

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Sea  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  el plano complejo ampliado. Definimos la aplicación:

$$\phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S, \quad \begin{cases} \phi(x + iy) = M & \text{si } x + iy \in \mathbb{C} \\ \phi(\infty) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

en donde  $M$  es el punto (distinto del  $(0, 0, 1)$ ) en el que la recta de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $(x, y, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  corta a la esfera. A la aplicación  $\phi$  se la llama *proyección estereográfica*.

1. Demostrar que las ecuaciones de la proyección estereográfica son

$$\phi(x + iy) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \text{ si } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

2. Demostrar que las ecuaciones de la inversa de la proyección estereográfica son

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 i}{x_3 - 1} \text{ si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1).$$

3. Definimos en  $\mathbb{C}_\infty$  la distancia (llamada *distancia cordal*) de la forma:

$$d_\infty(z, w) = d_2(\phi(z), \phi(w)), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}_\infty,$$

en donde  $d_2$  representa la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^3$ . Demostrar que:

$$d_\infty(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} \text{ si } z, w \in \mathbb{C},$$

$$d_{\infty}(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{si } z \in \mathbb{C}.$$

**Solución.** 1. Un vector de dirección de la recta  $r$  que pasa por  $(x, y, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  es  $(x, y, -1)$ . Por tanto unas ecuaciones paramétricas de  $r$  son  $X = \lambda x$ ,  $Y = \lambda y$ ,  $Z = 1 - \lambda$ . Obligando a que corten a  $S$ :

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \quad \text{o bien } \lambda(\lambda(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0$$

Obtenemos  $\lambda = 0$  o  $\lambda = 2/(x^2 + y^2 + 1)$ . Para  $\lambda = 0$  obtenemos el punto  $(0, 0, 1)$ , en consecuencia el punto de corte  $M$  corresponde a

$$\lambda = 2/(x^2 + y^2 + 1) = 2/(|z|^2 + 1).$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas:

$$M = \phi(x + iy) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad \text{si } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

2. Por consideraciones geométricas es claro que  $\phi$  es biyectiva lo cual implica que existe  $\phi^{-1}$ . Si  $\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x + iy$  entonces, existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_1 = \mu x, \quad x_2 = \mu y, \quad x_3 = 1 - \mu.$$

Eliminando  $\mu$  de entre estas ecuaciones obtenemos:

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x + iy = \frac{x_1 + x_2 i}{x_3 - 1} \quad \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1).$$

3. Llamemos  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ . Sean  $\phi(z) = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\phi(w) = (y_1, y_2, y_3)$ . Usando que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ :

$$\begin{aligned} d_{\infty}(z, w)^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \\ &= 2(1 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3). \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de  $\phi$ :

$$\begin{aligned} d_{\infty}(z, w)^2 &= 2 \left( 1 - \frac{4xu + 4yv + (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{4(|z|^2 + |w|^2 - 2xu - 2yv)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w} = |z|^2 - \bar{w}z - z\bar{w} + |w|^2$$



$$|z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 - 2xu - 2yv.$$

Queda por tanto

$$d_\infty(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} \quad \text{si } z, w \in \mathbb{C}.$$

Por último, para todo  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} d_\infty(z, \infty)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 2(1 - x_3) = 2 \left( 1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{4}{|z|^2 + 1} \Rightarrow d_\infty(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \end{aligned}$$

## 14.2. Derivada compleja

1. Si  $f(x) = z^2$ , hallar  $f'(z)$  usando la definición de derivada.
2. Si  $f(z) = z^3$ , hallar  $f'(z)$  usando la definición de derivada.
3. Si  $f(z) = \frac{1}{z}$ , hallar  $f'(z)$  para todo  $z$  real no nulo, usando la definición de derivada.
4. Demostrar que la función  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en  $z = 0$ .
5. Demostrar que si  $f$  es derivable en un punto  $z$ , entonces es continua en  $z$ .
6. Calcular las derivadas de las funciones complejas
  - (i)  $f(z) = \frac{a + bz}{c + dz}$  ( $a, b, c, d$  constantes complejas).
  - (ii)  $g(x) = \frac{3z + 5}{z^2 - 4z + 3}$ .
7. Calcular  $\frac{d}{dz}(z^3 + 5z^2 + 1)^8$ .

**Solución.** 1. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z + h) = 2z. \end{aligned}$$

2. Tenemos:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3z^2h + 3zh^2 + h^3 - z^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3z^2 + 3zh + h^2) = 3z^2.$$

3. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z - z - h}{h(z+h)z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(z+h)z} = -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

4. Se verifica

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Haciendo  $h = e^{i\theta}$  ( $r > 0$ ) queda

$$\frac{\bar{h}}{h} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}.$$

Esto implica que no existe el límite de  $\frac{\bar{h}}{h}$  cuando  $h \rightarrow 0$  (dependería de  $\theta$ ).

Es decir, no existe  $f'(0)$ .

5. Para  $h \neq 0$  se verifica:

$$f(z+h) - f(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} h. \quad (1)$$

Al ser  $f$  derivable en  $z$ , existe y es finito:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Tomando límites en (1) :

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) \right) - f(z) = f'(z) \cdot 0 = 0,$$

lo cual implica que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = f(z)$ , es decir  $f$  es continua en  $z$ .

6. Usando la fórmula de la derivada de un cociente:

$$(i) f'(z) = \frac{b(c+dz) - d(a+bz)}{(c+dz)^2} = \frac{bc - ad}{(c+dz)^2}.$$

$$(ii) g'(z) = \frac{3(z^2 - 4z + 3) - (2z - 4)(3z + 5)}{(z^2 - 4z + 3)^2} = \frac{-3z^2 - 10z + 29}{(z^2 - 4z + 3)^2}.$$

7. Usando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dz} (z^3 + 5z^2 + 1)^8 = 8(z^3 + 5z^2 + 1)^7 (3z^2 + 10z).$$

### 14.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Demostrar que la función  $f(z) = \lambda \bar{z}$  con  $\lambda \neq 0$  constante real no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}$ .

2. Determinar los puntos del plano complejo para los cuales es derivable la función  $f(z) = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$ .

3. Demostrar que si  $f(z) = e^z$  entonces  $f'(z) = e^z$  para todo  $z$  del plano complejo.

**Solución.** 1. Tenemos  $u = \lambda x$ ,  $v = -\lambda y$ . Para todo punto del plano complejo  $u_x = \lambda$  y  $v_y = -\lambda$ . Como en todo punto del plano complejo  $u_x \neq v_y$ , no se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann y por tanto  $f$  no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}$ .

2.  $f(z) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ , por tanto  $u = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = 0$ . Si  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$u_x = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u_y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Entonces  $u_x \neq 0$  lo cual implica  $u_x \neq v_y$ , es decir  $f$  no es derivable en  $z = x + iy$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Analicemos si es derivable en  $z = 0$ :

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{h^2}}{h} = 0$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Las funciones  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  son por tanto

$$u_x = \begin{cases} \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$u_y = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v_x = v_y = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Usando coordenadas polares fácilmente verificamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u_x = 0 = u_x(0, 0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u_y = 0 = u_y(0, 0),$$

es decir se cumplen las condiciones suficientes de derivabilidad, en consecuencia  $f$  es derivable en  $z = 0$  y además

$$f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0 + 0i = 0.$$

3. Tenemos  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , por tanto  $u = e^x \cos y$ ,  $v = e^x \sin y$ . Además,

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

Estas parciales son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$  y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto  $f$  es derivable en todo el plano complejo y su derivada es

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

## 14.4. Función exponencial compleja

1. Demostrar que para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  se verifica  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  y  $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$ .

2. Demostrar que para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  se verifica  $|e^z| = e^x$  y  $e^{z+2k\pi i} = e^z$ .

3. Determinar los valores de  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales (a)  $e^{3z} = 1$ , (b)  $e^{4z} = i$ .

**Solución.** 1. Sean  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  expresados en forma binómica. Entonces,

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)}.$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 \cos y_2 + \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(-\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)}{e^{x_2} \cdot 1} \\ &= e^{x_1-x_2} [\cos(y_1 - y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 - y_2)] = e^{z_1-z_2}. \end{aligned}$$

2. El número  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$  está expresado en forma trigonométrica, en consecuencia su módulo es  $|e^z| = e^x$ . Por otra parte,  $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} =$

$$e^z \cdot e^0(\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

3. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} e^{3z} = 1 &\Leftrightarrow e^{3x}(\cos 3y + i \operatorname{sen} 3y) = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{3x} = 1 \\ 3y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{2k\pi}{3}i, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) Análogamente

$$\begin{aligned} e^{4z} = i &\Leftrightarrow e^{4x}(\cos 4y + i \operatorname{sen} 4y) = 1(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{4x} = 1 \\ 4y = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi/8 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{8}\pi i + \frac{1}{2}k\pi i, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

## 14.5. Funciones trigonométricas complejas

1. Demostrar que las funciones seno y coseno complejos son una generalización de las correspondientes seno y coseno reales.

2. Demostrar las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z &= 1, \\ 1 + \tan^2 z &= \sec^2 z, \\ 1 + \cot^2 z &= \operatorname{csc}^2 z. \end{aligned}$$

3. Demostrar las relaciones

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \operatorname{cos}(-z) = \operatorname{cos} z, \quad \tan(-z) = -\tan z.$$

4. Demostrar las relaciones

$$\begin{aligned} a) \operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \operatorname{cos} z_2 \pm \operatorname{cos} z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ b) \operatorname{cos}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{cos} z_1 \operatorname{cos} z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ c) \tan(z_1 \pm z_2) &= \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}. \end{aligned}$$

5. (a) Determinar las partes real e imaginaria de las funciones  $\operatorname{sen} z$  y  $\operatorname{cos} z$ .

(b) Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, determinar las derivadas de

sen  $z$  y cos  $z$ .

6. Determinar el dominio de la función  $f(z) = \tan z$ .

7. Demostrar que: (a)  $\frac{d}{dz}(\tan z) = \frac{1}{\cos^2 z}$ . (b)  $\frac{d}{dz}(\cot z) = -\frac{1}{\sin^2 z}$ .

8. Hallar  $\frac{d}{dz}(\csc z)$  y  $\frac{d}{dz}(\sec z)$ .

**Solución.** 1. Para  $z = x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) - (\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))}{2i} \\ &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) - (\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i} = \frac{2i \operatorname{sen} x}{2i} = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))}{2} \\ &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2} = \frac{2 \operatorname{cos} x}{2} = \operatorname{cos} x. \end{aligned}$$

2. Usando las correspondientes definiciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z &= \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2e^0}{-4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2e^0}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Dividiendo la igualdad  $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$  entre  $\operatorname{cos}^2 z$ :  $\tan^2 z + 1 = \sec^2 z$ .  
Dividiéndola entre  $\operatorname{sen}^2 z$ :  $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$ .

3. Tenemos:

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

$$\operatorname{cos}(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \operatorname{cos} z.$$

$$\tan(-z) = \frac{\operatorname{sen}(-z)}{\operatorname{cos}(-z)} = \frac{-\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = -\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = -\tan z.$$

4. a) Desarrollemos el segundo miembro con el signo +,

$$\operatorname{sen} z_1 \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\
 &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\
 &\quad + \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\
 &= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \operatorname{sen}(z_1 + z_2).
 \end{aligned}$$

Análogo razonamiento con el otro signo.

b) Se razona de manera análoga a la del apartado anterior.

c) Tenemos

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sen}(z_1 + z_2)}{\cos(z_1 + z_2)} = \frac{\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}.$$

Dividiendo numerador y denominador de la última fracción entre  $\cos z_1 \cos z_2$  :

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}.$$

Análogo razonamiento para el otro signo.

5. (a) Para la función seno

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\
 &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i} \\
 &= \frac{1}{i} \cdot \frac{\cos x (e^{-y} - e^y) + i \operatorname{sen} x (e^{-y} + e^y)}{2} \\
 &= \frac{1}{i} (-\cos x \operatorname{senh} y + i \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \cos x \operatorname{senh} y \\
 &\Rightarrow u = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y, \quad v = \cos x \operatorname{senh} y.
 \end{aligned}$$

Para la función coseno

$$\begin{aligned}
 \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\
 &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos x (e^{-y} + e^y) + i \operatorname{sen} x (e^{-y} - e^y)}{2} \\
&= \cos x \cosh y + i(-\operatorname{sen} x \sinh y) \\
\Rightarrow U &= \cos x \cosh y, \quad V = -\operatorname{sen} x \sinh y.
\end{aligned}$$

(b) Función seno:

$$\begin{aligned}
u_x &= \cos x \cosh y, & u_y &= \operatorname{sen} x \sinh y, \\
v_x &= -\operatorname{sen} x \sinh y, & v_y &= \cos x \cosh y.
\end{aligned}$$

Las parciales son continuas para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto la función seno es derivable en  $\mathbb{C}$ . Su derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z &= u_x + i v_x = \cos x \cosh y + i(-\operatorname{sen} x \sinh y) \\
&= U + iV = \cos z.
\end{aligned}$$

Función coseno:

$$\begin{aligned}
U_x &= -\operatorname{sen} x \cosh y, & U_y &= \cos x \sinh y, \\
V_x &= -\cos x \sinh y, & V_y &= -\operatorname{sen} x \cosh y.
\end{aligned}$$

Las parciales son continuas para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto la función coseno es derivable en  $\mathbb{C}$ . Su derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \cos z &= U_x + iV_x = -\operatorname{sen} x \cosh y + i(-\cos x \sinh y) \\
&= -u + i(-v) = -(u + iv) = -\operatorname{sen} z.
\end{aligned}$$

6. Las funciones  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  están definidas para todo  $z \in \mathbb{C}$ , en consecuencia  $\tan z = \operatorname{sen} z / \cos z$  está definida para los valores de  $z$  que no anulan a  $\cos z$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{e^{2iz} + 1}{e^{iz}} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1.
\end{aligned}$$

Llamando  $z = x + iy$  con  $x, y$  reales:

$$\begin{aligned}
e^{2iz} = -1 &\Leftrightarrow e^{-2y+2ix} = -1 \Leftrightarrow e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = 1(\cos \pi + i \sin \pi) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2y} = 1 \\ 2x = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$



El dominio de la función tangente es por tanto

$$D = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. (a) Por definición de función tangente,  $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$ . Usando la fórmula de la derivada de un cociente con  $\operatorname{cos} z \neq 0$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} \right) = \frac{\operatorname{cos} z \operatorname{cos} z - (-\operatorname{sen} z) \operatorname{sen} z}{\operatorname{cos}^2 z} = \frac{\operatorname{cos}^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{cos}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 z}.$$

(b) Por definición de función cotangente,  $\cot z = \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z}$ . Usando la fórmula de la derivada de un cociente con  $\operatorname{sen} z \neq 0$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z} \right) = \frac{-\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z - \operatorname{cos} z \operatorname{cos} z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{-\operatorname{sen}^2 z - \operatorname{cos}^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}.$$

8. Usando las definiciones de las funciones cosecante, secante y la fórmula de la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{csc} z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} z} \right) = \frac{-\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\cot z \operatorname{csc} z.$$

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{sec} z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\operatorname{cos} z} \right) = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos}^2 z} = \tan z \operatorname{sec} z.$$

## 14.6. Funciones hiperbólicas complejas

1. Demostrar las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z &= 1, \\ 1 - \operatorname{tanh}^2 z &= \operatorname{sech}^2 z, \\ \operatorname{coth}^2 z - 1 &= \operatorname{csch}^2 z. \end{aligned}$$

2. Demostrar las relaciones

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \quad \operatorname{cosh}(-z) = \operatorname{cosh} z, \quad \operatorname{tanh}(-z) = -\operatorname{tanh} z.$$

3. Demostrar las relaciones

$$\begin{aligned} a) \quad \operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{senh} z_1 \operatorname{cosh} z_2 \pm \operatorname{cosh} z_1 \operatorname{senh} z_2, \\ b) \quad \operatorname{cosh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{cosh} z_1 \operatorname{cosh} z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2, \\ c) \quad \operatorname{tanh}(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{tanh} z_1 \pm \operatorname{tanh} z_2}{1 \pm \operatorname{tanh} z_1 \operatorname{tanh} z_2}. \end{aligned}$$

4. (a) Determinar las partes real e imaginaria de las funciones  $\sinh z$  y  $\cosh z$ .

(b) Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, determinar las derivadas de  $\sinh z$  y  $\cosh z$ .

5. Demostrar que

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z.$$

6. Calcular: (a)  $\frac{d}{dz} \operatorname{csch} z$ . (b)  $\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z$ .

**Solución.** 1. Usando las correspondientes definiciones

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^0}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2e^0}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Dividiendo la igualdad anterior entre  $\cosh^2 z$ ,  $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$ . Dividiendo ahora entre  $\sinh^2 z$ ,  $\coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$ .

2. Tenemos:

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = -\sinh z.$$

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z.$$

$$\tanh(-z) = \frac{\sinh(-z)}{\cosh(-z)} = \frac{-\sinh z}{\cosh z} = -\frac{\sinh z}{\cosh z} = -\tanh z.$$

3. a) Desarrollemos el segundo miembro con el signo +,

$$\begin{aligned} &\sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \\ &= \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \\ &= \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{(z_2-z_1)} + e^{(z_1-z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &\quad + \frac{e^{(z_1+z_2)} + e^{(z_2-z_1)} - e^{(z_1-z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{2e^{(z_1+z_2)} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Análogo razonamiento con el otro signo.

b) Se razona de manera análoga a la del apartado anterior.

c) Tenemos

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\sinh(z_1 + z_2)}{\cosh(z_1 + z_2)} = \frac{\sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2}{\cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2}.$$

Dividiendo numerador y denominador de la última fracción entre  $\cosh z_1 \cosh z_2$  :

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2}.$$

Análogo razonamiento para el otro signo.

4. (a) Para la función seno hiperbólico

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} \\ &= \frac{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2} \\ &= \frac{\cos y (e^x - e^{-x}) + i \operatorname{sen} y (e^x + e^{-x})}{2} \\ &= \cos y \sinh x + i \operatorname{sen} y \cosh x \\ &\Rightarrow u = \cos y \sinh x, \quad v = \operatorname{sen} y \cosh x. \end{aligned}$$

Para la función coseno hiperbólico

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} \\ &= \frac{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2} \\ &= \frac{\cos y (e^x + e^{-x}) + i \operatorname{sen} y (e^x - e^{-x})}{2} \\ &= \cos y \cosh x + i \operatorname{sen} y \sinh x \\ &\Rightarrow U = \cos y \cosh x, \quad V = \operatorname{sen} y \sinh x. \end{aligned}$$

(b) Función seno hiperbólico:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos y \cosh x, & u_y &= -\operatorname{sen} y \sinh x, \\ v_x &= \operatorname{sen} y \sinh x, & v_y &= \cos y \cosh x. \end{aligned}$$

Las parciales son continuas para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto la función seno hiperbólico es derivable en  $\mathbb{C}$ . Su derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sinh z &= u_x + iv_x = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x \\ &= U + iV = \cosh z. \end{aligned}$$

Función coseno hiperbólico:

$$\begin{aligned} U_x &= \cos y \sinh x, & U_y &= -\sin y \cosh x, \\ V_x &= \sin y \cosh x, & V_y &= \cos y \sinh x. \end{aligned}$$

Las parciales son continuas para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto la función coseno hiperbólico es derivable en  $\mathbb{C}$ . Su derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \cosh z &= U_x + iV_x = \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x \\ &= u + iv = \sinh z. \end{aligned}$$

5. Usando las definiciones de tangente y cotangente hiperbólicas, y la fórmula de la derivada del cociente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tanh z &= \frac{d}{dz} \left( \frac{\sinh z}{\cosh z} \right) = \frac{\cosh z \cosh z - \sinh z \sinh z}{\cosh^2 z} \\ &= \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z} = \frac{1}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \coth z &= \frac{d}{dz} \left( \frac{\cosh z}{\sinh z} \right) = \frac{\sinh z \sinh z - \cosh z \cosh z}{\sinh^2 z} \\ &= \frac{\sinh^2 z - \cosh^2 z}{\sinh^2 z} = \frac{-1}{\sinh^2 z} = -\operatorname{csch}^2 z. \end{aligned}$$

$$6. (a) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sinh z} \right) = \frac{-\cosh z}{\sinh^2 z} = -\coth z \operatorname{csch} z.$$

$$(b) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\cosh z} \right) = \frac{-\sinh z}{\cosh^2 z} = -\tanh z \operatorname{sech} z.$$

## 14.7. Logaritmo complejo

1. Demostrar que  $z = 0$  no tiene logaritmos y que si  $z \neq 0$  entonces

$$\log z = \log |z| + i \arg z,$$

en donde  $\arg z$  representa el conjunto de los argumentos de  $z$ .

2. Interpretar  $\log z$  como una aplicación de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  en un grupo cociente determinado por un subgrupo del grupo aditivo de los números complejos.

3. Demostrar que la aplicación logaritmo es un homomorfismo entre el grupo multiplicativo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y el grupo aditivo  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ .

4. Determinar los logaritmos principales de los números:

$$\sqrt{3} + i, \quad -4, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 3i, \quad 9, \quad \sqrt{3} - i.$$

5. Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  que no contiene al origen y  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua que satisface  $e^{\varphi(z)} = z$  para todo  $z \in \Omega$ . Demostrar que  $\varphi$  es derivable en  $\Omega$  y además  $\varphi'(z) = 1/z$  para todo  $z \in \Omega$ .

6. Demostrar que la rama principal de  $\log$  es derivable en  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  siendo  $\log'(z) = \frac{1}{z}$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ .

7. Demostrar que si existe una determinación  $\varphi(z)$  de  $\log z$  en un abierto conexo  $D \subset \mathbb{C}$  que no contiene al origen, cualquier otra determinación es de la forma  $\varphi(z) + 2k\pi i$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Recíprocamente,  $\varphi(z) + 2k\pi i$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , es una determinación de  $\log z$ .

**Solución.** 1. Recordamos que si  $z \in \mathbb{C}$ , decimos que  $w \in \mathbb{C}$  es un logaritmo de  $z$  si  $e^w = z$ , y denotamos por  $\log z$  al conjunto de todos los logaritmos de  $z$ , es decir  $\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ .  $\square$

Para todo  $w \in \mathbb{C}$  se verifica  $e^w \neq 0$ , en consecuencia  $z = 0$  no tiene logaritmos. Si  $z \neq 0$ ,  $\alpha$  es un argumento de  $z$  y expresando en forma binómica  $w = x + iy$ :

$$w \in \log z \Leftrightarrow e^{x+iy} = z \Leftrightarrow e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |z| \\ y = \alpha + i2\pi k, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow z = x + iy = \log |z| + i \arg z.$$

2. El conjunto  $i2\pi\mathbb{Z} = \{i2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$  es claramente un subgrupo del grupo aditivo de los complejos. Es además subgrupo normal pues  $(\mathbb{C}, +)$  es conmutativo, en consecuencia está definido el grupo cociente  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ . Si  $\log |z| + i\alpha$  es un logaritmo de  $z$ , entonces los demás logaritmos son de la forma

$$\log |z| + i(\alpha + 2k\pi) = (\log |z| + i\alpha) + i2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

los cuales pertenecen todos a un mismo elemento de  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ . Por tanto,  $\log z$  está determinado unívocamente como elemento del mencionado grupo cociente.

3. Usando conocidas propiedades del módulo y el argumento, se verifica para todo  $z, w$  complejos no nulos:

$$\begin{aligned} \log(zw) &= \log |zw| + i \arg(zw) = \log(|z||w|) + i(\arg z + \arg w) \\ &= \log |z| + \log |w| + i \arg z + i \arg w = (\log |z| + i \arg z) + (\log |w| + i \arg w) \\ &= \log z + \log w, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye el resultado.

4. Recordamos que si  $z$  es un número complejo no nulo, se llama logaritmo principal o rama principal de  $z$  al logaritmo obtenido al considerar su argumento principal, es decir  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .  $\square$

Inmediatamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{3} + i) &= \log 4 + \frac{\pi}{3}i = 2 \log 2 + \frac{\pi}{3}i. \\ \log(-4) &= \log 4 + \pi i = 2 \log 2 + \pi i. \\ \log\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \log 1 - \frac{2\pi}{3}i = -\frac{2\pi}{3}i. \\ \log(3i) &= \log 3 + \frac{\pi}{2}i. \\ \log 9 &= \log 9 + 0i = 2 \log 3. \\ \log(\sqrt{3} - i) &= \log 4 - \frac{\pi}{6}i = 2 \log 2 - \frac{\pi}{6}i. \end{aligned}$$

5. Sea  $a \in \Omega$  genérico y demostremos que efectivamente  $\varphi'(a) = 1/a$ . Para ello usaremos la caracterización del límite de una función por sucesiones. Consideremos una sucesión  $a_n$  de elementos de  $\Omega \setminus \{a\}$  tal que  $a_n \rightarrow a$  y llamemos  $b_n = \varphi(a_n)$ . Como  $\varphi$  es continua,  $b_n \rightarrow b$ . Además,  $b_n \neq b$  para todo  $n$  pues

$$b_n = b \Rightarrow \varphi(a_n) = \varphi(a) \Rightarrow e^{\varphi(a_n)} = e^{\varphi(a)} \Rightarrow a_n = a,$$

que es absurdo. Entonces, está definido el cociente  $\frac{\varphi(a_n) - \varphi(a)}{a_n - a}$ . Además,

$$\frac{\varphi(a_n) - \varphi(a)}{a_n - a} = \frac{b_n - b}{e^{b_n} - e^b} = \frac{1}{\frac{e^{b_n} - e^b}{b_n - b}}.$$

Ahora bien, la derivada de la función  $e^z$  es  $e^z$ , por tanto

$$\frac{1}{\frac{e^{b_n} - e^b}{b_n - b}} \rightarrow \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}.$$

Por el teorema de caracterización del límite de una función por sucesiones:

$$\varphi'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \frac{1}{a}.$$

6. Las partes real e imaginaria de  $\log$  son continuas en  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , por tanto también lo es  $\log$ . Basta ahora aplicar el resultado del apartado anterior.

7. Recordamos que si  $D \subset \mathbb{C}$  es un abierto conexo que no contiene al origen y  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua que satisface  $e^{\varphi(z)} = z$  para todo  $z \in D$ , a tal función se la llama *determinación del log*.  $\square$

Sean  $\varphi(z)$  y  $\phi(z)$  dos determinaciones del  $\log z$  en  $D$ . Dado que dos logaritmos de un número  $z$  difieren en  $2k\pi i$  con  $k$  entero, la función

$$h : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(z) = \frac{\varphi(z) - \phi(z)}{2\pi i}$$

es continua y sólo toma valores enteros. Como  $D$  es conexo, ha de tomar todos los valores reales comprendidos entre dos imágenes y esto sólo puede ocurrir si  $h$  es constante. Es decir,  $\varphi(z) - \phi(z) = 2k\pi i$  para todo  $z \in D$  con  $k$  entero.

Recíprocamente, si  $\varphi(z)$  es determinación de  $\log z$  en  $D$ , la función  $\phi(z) = \varphi(z) + 2k\pi i$  también es continua en  $D$  y satisface

$$e^{\phi(z)} = e^{\varphi(z) + 2k\pi i} = e^{\varphi(z)} e^{2k\pi i} = z \cdot 1 = z,$$

por tanto  $\phi(z)$  es una determinación de  $\log z$  en  $D$ .

## 14.8. Funciones armónicas

1. Analizar si son armónicas las funciones:

$$a) f(x, y) = 2e^x \cos y. \quad b) g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

2. Analizar si son armónicas las funciones:

$$a) f(x, y) = \log(x^2 + y^2). \quad b) g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

3. Sea  $A \subset \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Demostrar que las funciones partes real e imaginaria de  $f$  son funciones armónicas en  $A$ .

**Solución.** Recordamos la definición de función armónica: sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $f$  es armónica en  $A$ , si  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ en } A.$$

Nota. A la igualdad anterior se la llama ecuación de Laplace, y se la representa por  $\nabla^2 f = 0$ .  $\square$

1. a) Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2e^x \cos y, & \frac{\partial f}{\partial y} &= -2e^x \sin y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2e^x \cos y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2e^x \cos y, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\nabla^2 f = 0$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , y además es claro  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ . Concluimos que  $f$  es armónica en  $\mathbb{R}^2$ .

b) En el abierto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{-2yx}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\nabla^2 g = 0$  en  $A$ , y además es claro  $g \in \mathcal{C}^2(A)$ . Concluimos que  $g$  es armónica en  $A$ .



2. a) En el abierto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

lo cual implica que  $\nabla^2 f = 0$  en  $A$ , y además es claro  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ . Concluimos que  $f$  es armónica en  $A$ .

b) En el abierto  $A = \mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2bx + 2cy,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2c,$$

lo cual implica que  $\nabla^2 g = 0 \Leftrightarrow a + c = 0$ . Además es claro  $g \in \mathcal{C}^2(A)$ . Concluimos que  $g$  es armónica en  $A$ , si y sólo si  $a + c = 0$ .

3. Si  $f$  es analítica en  $A$ , sabemos que las funciones partes real e imaginaria  $u$  y  $v$  de  $f$  son funciones de clase infinito en  $A$ , y por tanto de clase 2. En  $A$ , se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Derivando y usando el teorema de Schwartz de las derivadas cruzadas,

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

lo cual implica que  $u$  y  $v$  son armónicas en  $A$ .

## 14.9. Función armónica conjugada

Comprobar que la función  $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$  es armónica en  $\mathbb{R}^2$  y determinar su armónica conjugada  $v$  para expresar  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  como función holomorfa de  $z$  en  $\mathbb{C}$ .

**Solución.** Claramente  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ . Tenemos

$$u_x = 6xy + 4x, \quad u_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y, \quad u_{xx} = 6y + 4, \quad u_{yy} = -6y - 4.$$

Es decir,  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto  $u$  es armónica en el plano. Si la función  $f = u + iv$  es holomorfa, se han de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . De la primera ecuación deducimos:

$$v = \int u_x dy = \int (6xy + 4x) dy = 3xy^2 + 4xy + \varphi(x).$$

De la segunda:

$$3x^2 - 3y^2 - 4y = -(3y^2 + 4y + \varphi'(x)) \Rightarrow \varphi'(x) = -3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = -x^3 + C.$$

La función pedida es por tanto:

$$f(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i(3xy^2 + 4xy - x^3 + C).$$

Para expresar  $f(z)$  en términos de  $z$  usamos el método de Milne-Thompson. Para  $y = 0$  obtenemos  $f(x) = 2x^2 - i(x^3 + C)$  y la función pedida se puede expresar en la forma  $f(z) = 2z^2 - iz^3 - iC$  o bien

$$f(z) = 2z^2 - iz^3 + K, \quad (K \in \mathbb{C}).$$

## 14.10. Familia de funciones armónicas

Hallar todas las funciones armónicas de la forma  $w = f(x^2 + y^2)$ .

**Solución.** Denotemos  $t = x^2 + y^2$ . Entonces:

$$w_x = f'(t) \cdot 2x, \quad w_y = f'(t) \cdot 2y,$$

$$w_{xx} = f''(t) \cdot 2x \cdot 2x + f'(t) \cdot 2, \quad w_{yy} = f''(t) \cdot 2y \cdot 2y + f'(t) \cdot 2.$$

La función  $w$  es armónica si y sólo si  $\nabla^2 w = w_{xx} + w_{yy} = 0$ . Por tanto:

$$\nabla^2 w = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2)f''(t) + 4f'(t) = 0 \Leftrightarrow tf''(t) + f'(t) = 0.$$

Resolvamos la ecuación diferencial anterior:

$$tf''(t) + f'(t) = 0, \quad \frac{f''(t)}{f'(t)} = -\frac{1}{t}, \quad \log |f'(t)| = -\log |t| + C_1,$$

$$f'(t) = \frac{C_1}{t}, \quad f(t) = C_1 \log |t| + C_2, \quad f(x^2 + y^2) = C_1 \log(x^2 + y^2) + C_2.$$

Las funciones pedidas son por tanto

$$w = C_1 \log(x^2 + y^2) + C_2, \quad (C_1, C_2 \text{ constantes}).$$

### 14.11. Polinomio de Hurwitz

Sea  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ . Se dice que  $p(z)$  es un polinomio de Hurwitz si todos sus ceros tienen parte real negativa. Demostrar que si  $p(z)$  es un polinomio de Hurwitz, también lo es  $p'(z)$ .

**Solución.** Sea  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) un polinomio de Hurwitz, podemos escribir  $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$  con  $\operatorname{Re} z_j < 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Hallemos el cociente  $p'(z)/p(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{a_n[(z - z_2) \dots (z - z_n) + \dots + (z - z_1) \dots (z - z_{n-1})]}{a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} \\ &= \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n}. \end{aligned}$$

Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z \neq z_j$  y supongamos que  $\operatorname{Re} z \geq 0$ . En este caso,  $\operatorname{Re}(z - z_j) > 0$  y por consiguiente  $\operatorname{Re}(1/(z - z_j)) > 0$ . Esto se deduce del hecho de que si  $w \in \mathbb{C}$  con  $w \neq 0$  entonces  $1/w = \bar{w}/|w|^2$ , es decir  $\operatorname{Re}(1/w)$  y  $\operatorname{Re} w$  tienen el mismo signo. Entonces

$$\operatorname{Re} \frac{p'(z)}{p(z)} = \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_1} + \dots + \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_n} > 0.$$

Es decir, si  $\operatorname{Re} z \geq 0$  con  $z \neq z_j$  entonces  $\operatorname{Re}(p'(z)/p(z))$  es distinta de cero y en consecuencia  $p'(z) \neq 0$  ( $z$  no es raíz de  $p'(z)$ ). Las raíces de  $p'(z)$  tienen por tanto parte real negativa.

Obsérvese que si algún  $z_j$  fuera raíz de  $p'(z)$ , ya tiene parte real negativa por hipótesis.

### 14.12. Funciones holomorfas $f$ con $\operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = 1$

Encontrar todas las funciones holomorfas  $f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen la condición  $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = 1$  siendo  $a, b$  constantes reales no simultáneamente nulas.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Denotando  $f = u + iv$  en donde  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ , tenemos  $au + bv = 1$ . Si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , existen las parciales de  $u$  y  $v$  en todo  $\mathbb{R}^2$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . Derivando la igualdad  $au + bv = 1$  y usando las mencionadas ecuaciones:

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} av_y - bu_y = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $a, b$  no son simultáneamente nulas,  $a^2 + b^2 \neq 0$  lo cual implica que el sistema anterior tiene la única solución  $u_y = v_y = 0$  y como consecuencia  $u_x = v_x = 0$ .

Esto implica  $f' = u_x + iv_x = 0$  en  $\mathbb{C}$  y de forma obligatoria  $f$  ha de ser constante es decir,  $f(z) = c_1 + c_2i$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $f$  que cumplen las condiciones dadas son por tanto

$$f(z) = c_1 + c_2i \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, ac_1 + bc_2 = 1).$$

### 14.13. Principio del módulo máximo

1. Sea el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y sea  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  y no constante. Analizar cuales de cada una de las siguientes situaciones es posible

a)  $|f| \leq 3$  en  $\overline{\mathbb{D}}$  y  $f(0) = -3$ .

b)  $|f| \leq 3$  en  $\overline{\mathbb{D}}$  y  $f(1) = 3$ .

c)  $|f| \leq 3$  en  $\overline{\mathbb{D}}$  y  $f(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)$ .

d)  $f(1/2) = 4$  y si  $x^2 + y^2 = 1$ , entonces  $f(x+iy) = 3$

2. Sean  $a_1, \dots, a_n$  puntos de la circunferencia unidad  $|z| = 1$ . Demostrar que existe un  $z$  de dicha circunferencia tal que el producto de distancias de  $z$  a los  $a_j$  es al menos 1.

3. Determinar el máximo absoluto de  $|f(z)|$  en  $|z| \leq 1$  para la función  $f(z) = z^2 - 3z + 2$ .

**Solución.** Recordamos el principio del módulo máximo:

Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio es decir, conexo y abierto. (a) Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y no constante, entonces  $|f(z)|$  no tiene máximo relativo en  $D$  (como consecuencia, tampoco absoluto). (b) Si  $f$  es holomorfa en  $D$  acotada, continua en  $\overline{D}$  y no constante, entonces  $|f(z)|$  alcanza un máximo absoluto en la frontera de  $\overline{D}$ .  $\square$

1. a) La función  $|f|$  tendría un máximo relativo en  $0 \in \mathbb{D}$ , lo cual contradice al principio del módulo máximo. No es posible.

b) La función  $f(z) = z + 2$  holomorfa en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  y no constante. Además,

$$|f(z)| \leq |z + 2| \leq |z| + |2| \leq 1 + 2 = 3 \text{ y } f(1) = 3,$$

luego la situación es posible.

c) Se verifica  $|f(0)| = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 3$ . La función  $|f|$  tendría un máximo relativo en  $0 \in \mathbb{D}$ , lo cual contradice al principio del módulo máximo. No es posible.

d) Para todo  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  se verifica  $|f(z)| = 3$ . La función no alcanzaría máximo absoluto en  $\overline{\mathbb{D}}$ , lo cual contradice al principio del módulo máximo. No es posible.

2. Sea  $\mathbb{D}$  el disco unidad  $|z| < 1$  y definamos:

$$f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j).$$

La función  $f$  es claramente holomorfa en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Además,  $|f(0)| = 1$  y  $|f(a_j)| = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$  luego  $f$  no es constante. Por el principio del módulo máximo  $|f(z)|$  alcanza un máximo absoluto en un punto  $z_0$  de la frontera de  $\overline{\mathbb{D}}$  es decir, cumpliendo  $|z_0| = 1$ . Es decir

$$|f(z_0)| = \prod_{j=1}^n |z_0 - a_j| \geq |f(0)| = 1.$$

3. Claramente la función es no constante, holomorfa en  $|z| < 1$  y continua en  $|z| = 1$ . Por el principio del módulo máximo, el máximo absoluto de  $|f(z)|$  se alcanza en  $|z| = 1$ . Llamando  $z = x + yi$  con  $x, y$  reales podemos expresar

$$f(z) = f(x + iy) = (x^2 - y^2 - 3x + 2) + i(2xy - 3y).$$

Máximicemos

$$|f(x + iy)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2xy - 3y)^2$$

con la condición  $x^2 + y^2 = 1$ . Usando  $y^2 = 1 - x^2$ :

$$\begin{aligned} |f(x + iy)|^2 &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (1 - x^2)(2x - 3)^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Weierstrass fácilmente verificamos que el máximo absoluto de  $\varphi(x) = 8x^2 - 18x + 10$  en  $[-1, 1]$  es  $\varphi_{\max}(-1) = 36$ . En consecuencia,

$$|f|_{\max}(-1) = \sqrt{36} = 6.$$

### 14.14. Lema de Schwarz

1. Demostrar el lema de Schwarz:

Sea  $\mathbb{D}$  el disco unidad  $|z| < 1$ . Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| < 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Entonces,

i) Se verifica  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

ii) Si para  $z_0 \in \mathbb{D}$  no nulo se verifica  $|f(z_0)| = |z_0|$ , existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $f(z) = \lambda z$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

2. Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  tal que  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| \leq |z + 3/2|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

i) Demostrar que  $|f(1/2)| \leq 1$ .

ii) Determinar todas las funciones  $f$  para las cuales  $|f(1/2)| = 1$ .

**Solución.** 1. i) Como  $f(0) = 0$ , el desarrollo en serie de Maclaurin de  $f$  es

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

En consecuencia  $f(z)/z$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ . Dado que por hipótesis  $|f(z)| < 1$ , tenemos

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad \text{si } |z| = r \quad (0 < r < 1).$$

Por el principio del módulo máximo, la desigualdad anterior es también válida para  $|z| \leq r$ . Sea ahora  $0 \neq z \in \mathbb{D}$  fijo, entonces

$$\frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r} \quad \forall r \geq |z| \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|,$$

y si  $z = 0$  la última desigualdad se cumple trivialmente por la hipótesis  $f(0) = 0$ .

ii) La función  $f(z)/z$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y según el apartado anterior satisface  $|f(z)/z| \leq 1$ . Si  $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$  satisface  $|f(z_0)| = |z_0|$  entonces  $|f(z_0)/z_0| = 1$ , lo cual implica que  $|f(z)/z|$  tiene un máximo en  $z_0$ . Por el principio del módulo máximo  $f(z)/z$  ha de ser constante, i.e.  $f(z)/z = \lambda$  con  $|\lambda| = 1$ , lo cual completa la demostración.

2. i) Consideremos la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z + 3/2}.$$

Dado que  $z \neq -3/2$ , en  $\mathbb{D}$ , la función  $g$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ . Además  $g(0) = 0$  y  $|g(z)| \leq 1$  por la hipótesis  $|f(z)| \leq |z + 3/2|$ . Aplicando el lema de Schwarz a  $g$ , deducimos  $|g(z)| \leq |z|$  en  $\mathbb{D}$ , en particular  $|f(1/2)| \leq 1/2 \leq 1$ .

ii) Si  $|f(1/2)| = 1$ , entonces

$$|g(1/2)| = \left| \frac{f(1/2)}{2} \right| = \frac{1}{2} = \left| \frac{1}{2} \right|.$$

Por el lema de Schwarz, ha de ser necesariamente  $g(z) = \lambda z$  con  $\lambda$  constante compleja de módulo 1. Es decir,

$$f(z) = \lambda z(z + 3/2), \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1). \quad (*)$$

Por otra parte, si  $f$  es de la forma anterior,

$$|f(1/2)| = |\lambda| \left| \frac{1}{2} \right| \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

en consecuencia todas las funciones pedidas son las de la forma (\*).

### 14.15. Fórmulas integrales de Cauchy

1. Calcular (a)  $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} dz$ . (b)  $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$ .

2. Calcular (a)  $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen}^6 z}{z - \pi/6} dz$ . (b)  $\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ .

3. Calcular  $\int_C \frac{e^{2z}}{z + \pi i} dz$ , si  $C$  es

(a) La circunferencia  $|z - 1| = 4$ . (b) La elipse  $|z - 2| + |z + 2| = 6$ .

**Solución.** Recordamos el teorema de las fórmulas integrales de Cauchy: Sea  $f(z)$  una función analítica en una región cerrada  $\mathcal{R}$  del plano complejo cuya frontera es una curva cerrada simple  $C$ . Sea  $a$  un punto interior a  $\mathcal{R}$ . Entonces,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

en donde  $C$  se recorre en sentido antihorario. Para  $n = 0$  obtenemos

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a). \quad \square$$

1. (a) La función  $f(z) = e^z$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , por tanto en  $\mathcal{R} \equiv |z| \leq 3$  y 2 es interior a  $\mathcal{R}$ . Aplicando la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi e^2 i.$$

(b) La función  $g(z) = e^z/(z-2)$  es analítica en  $\mathcal{R}' \equiv |z| \leq 1$ . Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2} dz = 0.$$

2. (a) La función  $f(z) = \operatorname{sen}^6 z$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , por tanto en  $\mathcal{R} \equiv |z| \leq 1$  y  $\pi/6$  es interior a  $\mathcal{R}$ . Aplicando la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen}^6 z}{z - \pi/6} dz = 2\pi i f(\pi/6) = 2\pi i \operatorname{sen}^6(\pi/6) = \frac{\pi}{32} i.$$

(b) La función  $f(z) = e^{iz}$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , por tanto en  $\mathcal{R} \equiv |z| \leq 2$  y 0 es interior a  $\mathcal{R}$ . Tenemos  $f'(z) = ie^{iz}$ ,  $f''(z) = -e^{iz}$ , luego  $f''(0) = -1$ . Aplicando la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3} dz = \frac{2\pi}{2!} i f''(0) = 2\pi i \operatorname{sen}^6(\pi/6) = -\pi i.$$

3. (a) La función  $f(z) = e^{2z}$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , por tanto en  $\mathcal{R} \equiv |z-1| \leq 4$  y  $-\pi i$  es interior a  $\mathcal{R}$  pues

$$|-\pi i - 1| = \sqrt{\pi^2 + 1} < 4.$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z + \pi i} dz = 2\pi i f(-\pi i) = 2\pi i e^{-2\pi i} = 2\pi i.$$

(b) El punto  $-\pi i$  es exterior a  $\mathcal{R} \equiv |z-2| + |z+2| = 6$  pues

$$|-\pi i - 2| + |-\pi i + 2| = \sqrt{\pi^2 + 4} + \sqrt{\pi^2 + 4} > 6.$$

En consecuencia, la función  $f(z) = e^{2z}/(z + \pi i)$  es analítica en  $\mathcal{R}$ . Aplicando el teorema Cauchy-Goursat,

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z + \pi i} dz = 0.$$

## 14.16. Teorema de Liouville, demostración

Demostrar el teorema de Liouville:

Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y acotada, entonces es constante.

**Solución.** Ver <http://youtu.be/yfMv9eqYOk>

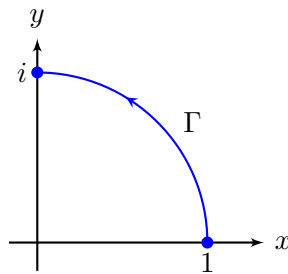


### 14.17. Integral de $(\log z)^3 dz/z$ en un arco de circunferencia

Calcular la integral  $I = \int_1^i \frac{\log^3 z}{z} dz$  en el arco de circunferencia  $|z| = 1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** *Primer método.* La función subintegral es analítica en un dominio que contiene al arco de circunferencia dado.



En consecuencia podemos aplicar la fórmula de Newton-Leibniz. Para hallar la correspondiente integral indefinida efectuamos el cambio de variable  $w = \log z$ , con lo cual  $dw = dz/z$ . Tenemos:

$$\int \frac{\log^3 z}{z} dz = \int w^3 \frac{1}{z} z dw = \int w^3 dw = \frac{w^4}{4} + C = \frac{\log^4 z}{4} + C$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{\log^4 z}{4} \right]_1^i = \frac{\log^4 i}{4} - \frac{\log^4 1}{4} \\ &= \frac{(\log 1 + \pi i/2)^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{\pi^4/16}{4} = \frac{\pi^4}{64}. \end{aligned}$$

*Segundo método.* Efectuando el cambio de variable  $w = e^{i\theta}$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\log^3(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} i(i\theta \log e)^3 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} i^4 \theta^3 d\theta = \left[ \frac{\theta^4}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^4}{64}. \end{aligned}$$

**14.18. Integral  $\int_T \bar{z}^2 dz$  sobre una curva de Jordan**

Sean  $a, b$  y  $c$  tres puntos no alineados del plano complejo. Calcular la integral

$$\int_T \bar{z}^2 dz,$$

siendo  $T$  el borde del triángulo determinado por los puntos anteriores y recorrido en el sentido positivo. Generalizar el resultado obtenido al caso en el que se sustituya en la integral anterior el triángulo  $T$  por una curva de Jordan  $\Gamma$ .

(Propuesto en examen, Ampliación de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Desarrollando la función integrando:

$$\begin{aligned} \int_T \bar{z}^2 dz &= \int_T (x - iy)^2 (dx + idy) = \int_T (x^2 - y^2 - 2xyi) (dx + idy) \\ &= \int_T (x^2 - y^2) dx + 2xy dy + i \int_T -2xy dx + (x^2 - y^2) dy. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Green

$$I_1 = \int_T (x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 4 \iint_D y dx dy = 4M_x,$$

$$I_2 = \int_T -2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 4 \iint_D x dx dy = 4M_y,$$

en donde  $M_x$ ,  $M_y$  son los momentos estáticos de la placa  $D$  que limita el triángulo cuando la densidad es  $\delta(x, y) = 1$ . Si  $(x_g, y_g)$  es el centro de gravedad de  $D$  (es decir, el baricentro del triángulo) entonces  $(x_g, y_g) = (M_y/A, M_x/A)$  siendo  $A$  el área del triángulo. Por tanto

$$\int_T \bar{z}^2 dz = I_1 + iI_2 = 4A(x_g + iy_g) = \frac{4A(a + b + c)}{3}.$$

El razonamiento es análogo si sustituimos  $T$  por una curva de Jordan  $\Gamma$ . La integral es

$$\int_\Gamma \bar{z}^2 dz = I_1 + iI_2 = 4A(x_g + iy_g),$$

siendo  $A$  el área del recinto  $D$  que limita  $\Gamma$  y  $(x_g, y_g)$  el centro de gravedad de la placa  $D$  para la densidad  $\delta(x, y) = 1$ .

### 14.19. Integral $\int_0^{+\infty} (\cos x / \cosh x) dx$ por residuos

Calcular aplicando la técnica de residuos la integral real impropia

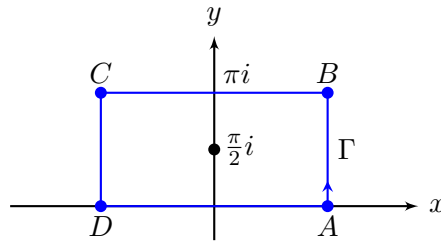
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx.$$

Sugerencia: integrar  $f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z}$  a lo largo de un cierto rectángulo.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Elijamos el rectángulo  $\Gamma$  de vértices:

$$A(R, 0), B(R, \pi), C(-R, \pi), D(-R, 0) \quad (R > 0).$$



Hallemos las singularidades de  $f(z)$  en el interior geométrico de  $R$ . Dado que las funciones  $\cos z$  y  $\cosh z$  son analíticas en  $\mathbb{C}$ , las singularidades de  $f(z)$  se obtienen en los puntos que anulan a  $\cosh z$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \cosh z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} \\ &\Leftrightarrow e^z + \frac{1}{e^z} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2z} + 1}{e^z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1. \end{aligned}$$

Escribiendo  $z = x + iy$  con  $x, y$  reales:

$$\begin{aligned} e^{2z} = -1 &\Leftrightarrow e^{2x+2iy} = \cos \pi + i \sin \pi \Leftrightarrow e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = \\ \cos \pi + i \sin \pi &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} = 1 \\ 2y = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi/2 + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

El único punto singular en el interior geométrico de  $R$  es  $z_0 = \pi i/2$  y no hay singularidades en la frontera. Dado que  $\cos z_0 \neq 0$ , se trata de un polo. Integrando en sentido antihorario se verifica:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{DA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz \quad (1)$$

Llamemos respectivamente  $I, I_1, I_2, I_3, I_4$  a las integrales que aparecen en (1) y analicemos cada una de ellas. Para calcular  $I$ , hallemos el siguiente límite usando la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pi i/2} \frac{e^{iz}(z - \pi i/2)}{\cosh z} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{z \rightarrow \pi i/2} \frac{ie^{iz}(z - \pi i/2) + e^{iz}}{\sinh z} \\ &= \frac{e^{-\pi/2}}{\sinh(\pi i/2)} = \frac{e^{-\pi/2}}{(e^{\pi i/2} - e^{-\pi i/2})/2} = \frac{e^{-\pi/2}}{i \sin(\pi/2)} = \frac{e^{-\pi/2}}{i} \neq 0. \end{aligned}$$

Es decir,  $z_0 = \pi i/2$  es polo simple de la función  $f$  y  $\text{Res}(f, \pi i/2) = e^{-\pi/2}/i$ . Aplicando el teorema de los residuos de Cauchy,  $I = 2\pi i \cdot e^{-\pi/2}/i = 2\pi e^{-\pi/2}$ .

La integral  $I_1$  es:

$$I_1 = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx.$$

Efectuando el cambio  $z = R + iy$  para  $I_2$  y  $z = -R + iy$  para  $I_4$ :

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{e^{R-iy} idy}{\cosh(R+iy)}, \quad I_4 = \int_\pi^0 \frac{e^{-Ri-y} idy}{\cosh(-R+iy)}.$$

Efectuando el cambio  $z = x + \pi i$  para  $I_3$ :

$$I_3 = \int_R^{-R} \frac{e^{ix-\pi}}{\cosh(x+\pi i)} dx.$$

Dado que  $I$  es constante,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I = 2\pi e^{-\pi/2}$ . Hallemos ahora  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_1$ . Separando  $I_1$  en suma de dos integrales, efectuando el cambio  $x = -t$ , y teniendo en cuenta que la función  $\cosh x$  es par:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx = \int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx + \int_0^R \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx \\ &= \int_R^0 \frac{e^{-it}}{\cosh(-t)} (-dt) + \int_0^R \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx = \int_0^R \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{\cosh x} dx \\ &= 2 \int_0^R \frac{\cos x}{\cosh x} dx \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} I_1 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx. \end{aligned}$$

Para hallar  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3$ , tenemos por una parte

$$\cosh(x + \pi i) = \frac{e^{x+\pi i} + e^{-x-\pi i}}{2} = \frac{-e^x - e^{-x}}{2} = -\cosh x.$$

Separando  $I_3$  en suma de dos integrales, efectuando el cambio  $x = -t$ , y teniendo en cuenta que la función  $\cosh x$  es par, obtenemos de manera análoga a la de  $I_1$ :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3 = 2e^{-\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx.$$

Tomando límites en la igualdad (1) cuando  $R \rightarrow +\infty$  :

$$2\pi e^{-\pi/2} = 2(1 + e^{-\pi}) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} I_2 + \lim_{R \rightarrow +\infty} I_4.$$

Si demostramos  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2 = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_4 = 0$ , entonces:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi}{2}.$$

y ya tendríamos calculada la integral pedida. Acotemos la integral  $I_2$ . Usando la propiedad  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$  y que 1 es cota de  $e^{-y}$  en  $[0, \pi]$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{iR-yj}}{\cosh(R+iy)} \right| &= \frac{|e^{-y}|}{|e^{R+iy} + e^{-R-iy}|/2} = \frac{2e^{-y}}{|e^R e^{iy} - (-e^{-R} e^{-iy})|} \\ &\leq \frac{2e^{-y}}{||e^R e^{iy}| - |(-e^{-R} e^{-iy})||} = \frac{2e^{-y}}{e^R - e^{-R}} \leq \frac{2}{e^R - e^{-R}}. \end{aligned}$$

Como el módulo de la integral de una función a lo largo de una curva es menor que una cota del módulo de la función por la longitud de la curva:

$$0 \leq |I_2| \leq \frac{2}{e^R - e^{-R}} \cdot \pi \Rightarrow 0 \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} |I_2| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{e^R - e^{-R}} = 0.$$

En consecuencia,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2 = 0$ . De manera análoga se demuestra que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_4 = 0$ . Podemos pues concluir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi}{2}.$$

## 14.20. Función holomorfa biperiódica

Sea  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  salvo por una cantidad finita de polos y que verifica

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z+1) = f(z), \quad f(z+i) = f(z).$$

Diremos que  $f$  es doblemente periódica de periodos 1 e  $i$ . Consideremos un paralelogramo de vértices  $z_0 + i$ ,  $z_0$ ,  $z_0 + 1$ ,  $z_0 + 1 + i$  cuyo borde llamamos  $\Gamma$  siendo  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto cualquiera pero tal que  $f$  no tiene ningún polo en  $\Gamma$ .

1. Calcular  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ .
2. Estudiar si  $g(z) = f'(z)/f(z)$  es doblemente periódica, y en caso afirmativo determinar sus periodos. Suponiendo que  $f$  no tiene ceros sobre  $\Gamma$ , calcular  $\int_{\Gamma} (f'(z)/f(z)) dz$ .
3. Si  $f$  tiene  $m$  polos en  $\mathbb{C}$ , hallar el número de raíces de la ecuación  $f(z)$ .

(Propuesto en examen, Amp. de Cálculo, ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. Consideremos los lados orientados del paralelogramo:

$$\Gamma_1 : (\text{ de origen } z_0 + i \text{ y extremo } z_0) z = z_0 + i - ti, \quad t \in [0, 1],$$

$$\Gamma_2 : (\text{ de origen } z_0 \text{ y extremo } z_0 + 1) z = z_0 + t, \quad t \in [0, 1],$$

$$\Gamma_3 : (\text{ de origen } z_0 + 1 \text{ y extremo } z_0 + 1 + i) z = z_0 + 1 + ti, \quad t \in [0, 1],$$

$$\Gamma_4 : (\text{ de origen } z_0 + 1 + i \text{ y extremo } z_0 + i) z = z_0 + 1 + i - t, \quad t \in [0, 1].$$

Entonces,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz + \int_{\Gamma_4} f(z) dz.$$

Teniendo en cuenta que  $f$  es periódica de periodo  $i$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_4} f(z) dz &= \int_0^1 f(z_0 + t) dt + \int_0^1 f(z_0 + 1 + i - t)(-dt) \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t) dt - \int_0^1 f(z_0 + 1 - t) dt. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio  $u = 1 - t$  :

$$\int_0^1 f(z_0 + 1 - t) dt = \int_1^0 f(z_0 + u) (-du) = \int_0^1 f(z_0 + u) du.$$

En consecuencia,  $\int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_4} f(z) dz = 0$ . Teniendo en cuenta que  $f$  es periódica de periodo 1 deducimos de forma análoga que  $\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz = 0$ . Es decir,  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

2. Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(z+1) = f(z) \\ f(z+i) = f(z) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f'(z+1) = f'(z) \\ f'(z+i) = f'(z) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} g(z+1) = \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} = \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) \\ g(z+i) = \frac{f'(z+i)}{f(z+i)} = \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z), \end{cases} \end{aligned}$$

lo cual implica que  $g$  es doblemente periódica de periodos 1 e  $i$ . Además, si  $f$  no tiene ceros sobre  $\Gamma$  entonces  $g$  no tiene polos sobre  $\Gamma$ . Usando el apartado anterior concluimos que  $\int_{\Gamma} (f'(z)/f(z)) dz = 0$ .

3. De acuerdo con el teorema del residuo logarítmico y el apartado anterior:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

siendo  $N$  el número de ceros de  $f(z)$  en el interior de  $\Gamma$  y  $P$  el número de polos de  $f(z)$  en el interior de  $\Gamma$  (contando en ambos casos los órdenes). Dado que podemos mover a placer  $z_0$  en el plano complejo, concluimos que el número de ceros de  $f(z)$  es  $m$ .

### 14.21. Principio del argumento: ceros en $\operatorname{Re}(z) > 0$

Usando el principio del argumento, calcular el número de ceros de la función

$$f(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1$$

en el semiplano  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

**Solución.** Consideremos la curvas

$$\gamma_1(t) = ti, \quad t \in [-R, R],$$

$$\gamma_2(t) = R \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

sea  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Elijamos  $R$  suficientemente grande para que todos los ceros de  $f(z)$  en  $\operatorname{Re}(z) > 0$  estén en el interior geométrico  $D$  de  $\gamma$ . Según el principio del argumento, si  $N$  es el número de ceros de  $f(z)$  en  $D$  y  $P$  el de sus polos, entonces:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z)$$

siendo en nuestro caso  $P = 0$  por ser  $f(z)$  polinómica. Primero vamos a calcular  $\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} f(z)$  siendo  $\gamma_1$  la semicircunferencia contenida en  $\gamma$  y recorrida en sentido antihorario. Podemos expresar:

$$f(z) = z^5 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} f(z) &= 5 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) \\ \Rightarrow \Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} f(z) &= 5\pi + \Delta_{\gamma_1} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) \end{aligned}$$

Por la continuidad del argumento, para  $R \rightarrow +\infty$  obtenemos  $\Delta_{\gamma_1} \text{Arg} f(z) = 5\pi$ . Ahora vamos a mover  $z$  en el segmento  $\gamma_2$  que va desde  $iR$  hasta  $-iR$ . La ecuación de este segmento es  $z = it$  con  $t \in [-R, R]$ . Sustituyendo en  $f(z)$  obtenemos:

$$f(z) = (it)^5 + (it)^4 + 2(it)^3 - 8(it) - 1 = (t^4 - 1) + (t^5 - 2t^3 - 8t)i.$$

Haremos un esbozo de la gráfica de:

$$(u, v) = (t^4 - 1, t^5 - 2t^3 - 8t), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Para  $t^4 - 1 = 0$  obtenemos  $t = \pm 1$  y para  $t^5 - 2t^3 - 8t = 0$ ,  $t = \pm 2, t = 0$ . Obtenemos el cuadro de valores:

$t$	2	1	0	-1	-2
$u$	15	0	-1	0	15
$v$	0	-9	0	9	0

Por otra parte,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} v = \pm\infty$ . Haciendo un esbozo de la curva transformada por  $f$  de la  $\gamma_2$  cuando  $t$  se recorre desde  $t = +\infty$  hasta  $t = -\infty$  deducimos:

$$\Delta \text{Arg}_{\gamma_2} f(z) = -3\pi \Rightarrow \Delta \text{Arg}_{\gamma} f(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi \Rightarrow N = 1.$$

La función  $f(z)$  tiene pues exactamente un cero en  $\text{Re}(z) > 0$ .

## 14.22. Una integral con residuo en el punto del infinito

Calcular la integral:  $I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17} dz}{(z^2 + 2)^3 (z^3 + 3)^4}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

**Solución.** La función integrando  $f(z)$  tiene en la región  $|z| < 3$  dos polos triples y tres cuádruples. Esto hace prácticamente inviable calcular la integral por medio de estos polos. Usaremos en su lugar el residuo en el punto del infinito. Concretamente aplicaremos la conocida propiedad: si una función  $g(z)$  tiene en el plano extendido  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  un número finito de puntos singulares, entonces la suma de todos los residuos, incluido el residuo en el infinito, es igual a 0. Es decir, si  $z_1, \dots, z_m$  son las singularidades finitas de  $g(z)$  entonces:

$$\text{Res}(g, \infty) + \sum_{k=1}^m \text{Res}(g, z_k) = 0.$$



Nótese que todos las singularidades finitas de la función integrando dada  $f(z)$  están en  $|z| < 3$ . En consecuencia:

$$I = \int_{|z|=3} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$

Para calcular  $\operatorname{Res}(f, \infty)$  hallaremos el desarrollo en serie de Laurent de  $f(z)$  en potencias enteras de  $z$ . Tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^{18}}{(z^2 + 2)^3(z^3 + 3)^4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{h(z)}.$$

Usando la serie geométrica es claro que el desarrollo en serie de Laurent de  $h(z)$  en un entorno de  $\infty$  es de la forma:

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Efectuando la división de 1 entre  $h(z)$  según las potencias crecientes de  $z$  obtenemos la forma del desarrollo de  $f(z)$  :

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}.$$

Por otra parte sabemos que  $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{coef}(1/z)$  en el desarrollo de de Laurent de  $f(z)$  en un entorno de  $\infty$ . Podemos por tanto concluir que:

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17} dz}{(z^2 + 2)^3(z^3 + 3)^4} = 2\pi i.$$

### 14.23. Ceros de las funciones analíticas

1. Hallar los ceros de la función  $f(z) = z^4 + 4z^2$  y determinar sus órdenes.
2. Hallar los ceros de  $f(z) = 1 + \cos z$  y determinar sus multiplicidades.
3. Hallar el orden del cero  $z_0 = 0$  para la función  $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$ .
4. Hallar los ceros de la función  $f(z) = (z^2 + 1)^3 \sinh z$  determinando sus órdenes.

**Solución.** Recordamos la siguiente definición y teorema:

**Definición.** Sea  $f$  una función analítica en un entorno de  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Se dice que  $z_0$  es un cero de orden (o multiplicidad)  $n$  de  $f$  si, y sólo si

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

**Teorema.**  $z_0$  es un cero de orden  $n$  de  $f$  si, y sólo si  $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$  en un entorno de  $z_0$  con  $\varphi$  analítica en dicho entorno y  $\varphi(z_0) \neq 0$   $\square$

1. Ceros de  $f$  :

$$z^4 + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm 2i.$$

Tenemos  $f'(z) = 4z^3 + 8z$ ,  $f''(z) = 12z^2 + 8$ . Entonces,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 8 \neq 0.$$

$$f(2i) = 0, \quad f'(2i) = -16i \neq 0.$$

$$f(-2i) = 0, \quad f'(-2i) = 16i \neq 0.$$

Por tanto,  $z = 0$  es cero doble y  $z = \pm 2i$  son ceros simples.

Otra forma:  $f(z) = z^2(z^2 + 4)$  con  $\varphi(z) = z^2 + 4$ ,  $\varphi(z)$  analítica en un entorno de 0 (en realidad en todo  $\mathbb{C}$ ) y  $\varphi(0) \neq 0$ . Es decir, 0 es cero doble de  $f$ . Por otra parte,

$$f(z) = (z - 2i)\varphi_1(z), \quad \varphi_1(z) = z^2(z + 2i),$$

con  $\varphi_1(z)$  analítica en un entorno de  $2i$  y  $\varphi_1(2i) \neq 0$ . Es decir,  $2i$  es cero simple de  $f$ . Análogo razonamiento para  $-2i$ .

2. Ceros de  $f$  :

$$\begin{aligned} 1 + \cos z = 0 &\Leftrightarrow \cos z = -1 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -1 \Leftrightarrow e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = -2 \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} + 2e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{iz} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -1. \end{aligned}$$

Llamando  $z = x + iy$  con  $x, y$  reales:

$$e^{iz} = -1 \Leftrightarrow e^{-y+ix} = -1 \Leftrightarrow e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = 1 \\ x = (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Determinemos las multiplicidades

$$f'(z) = -\sin z \Rightarrow f'((2k + 1)\pi) = 0,$$

$$f''(z) = -\cos z \Rightarrow f''((2k+1)\pi) = -\cos((2k+1)\pi) = 1 \neq 0.$$

Todos los ceros son dobles.

3. Podemos expresar:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^8}{z - (z - z^3/3! + z^5/5! + \dots)} = \frac{z^8}{z^3/3! - z^5/5! + \dots} \\ &= \frac{z^5}{1/3! - z^2/5! + \dots} = z^5 \cdot \frac{1}{1/3! - z^2/5! + \dots}. \end{aligned}$$

Entonces,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ , lo cual implica por el teorema de Riemann que la función  $f(z)$  es analítica en un entorno de 0 si definimos  $f(0) = 0$ . Dado que

$$\varphi(z) = \frac{1}{1/3! - z^2/5! + \dots}$$

es analítica en un entorno de 0 y  $\varphi(0) = 3! \neq 0$ , concluimos que  $z_0 = 0$  es cero quintuple de la función dada.

4. Ceros de  $f$  :

$$(z^2 + 1)^3 \sinh z = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)^3 = 0 \vee \sinh z = 0 \Leftrightarrow z = \pm i \vee \sinh z = 0.$$

Por otra parte,

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z - \frac{1}{e^z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} - 1 = 0.$$

Llamando  $z = x + iy$  con  $x, y$  reales:

$$\begin{aligned} e^{2z} = 1 &\Leftrightarrow e^{2x+2yi} = 1 \Leftrightarrow e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 1(\cos 0 + i \sin 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} = 1 \\ 2y = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow z = k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Determinemos el orden de los ceros. Tenemos:

$$f(z) = (z - i)^3 [(z + i)^3 \sinh z].$$

La función  $\varphi(z) = (z + i)^3 \sinh z$  es analítica en un entorno de  $i$  (en realidad en todo  $\mathbb{C}$ ) y además  $\varphi(i) = -8i \sinh i \neq 0$ , luego  $i$  es cero triple de  $f$ . También  $-i$  es cero triple (análogo razonamiento). La derivada de  $f$  es

$$\begin{aligned} f'(z) &= 3(z^2 + 1)^2 2z \sinh z + (z^2 + 1)^3 \cosh z \\ &= (z^2 + 1) [6z \sinh z + (z^2 + 1) \cosh z]. \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que  $f'(k\pi i) \neq 0$  lo cual implica que  $k\pi i$  es cero simple. Podemos concluir:

$$\begin{cases} z = \pm i & \text{polos triples,} \\ z = k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}) & \text{polos simples.} \end{cases}$$

### 14.24. Series complejas: conceptos básicos

1. (Condición necesaria para la convergencia de una serie). Demostrar que

si la serie compleja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  es convergente, entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

2. (Serie geométrica). Se considera la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Demostrar que

a) Es convergente si, y sólo si  $|z| < 1$ .

b) Si es convergente, su suma es  $S = \frac{1}{1-z}$ .

3. (Álgebra de series). Supongamos que las series  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  son convergentes de sumas respectivas  $U$  y  $V$ . Demostrar que

a) La serie suma  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$  es convergente con suma  $U + V$ .

b) Para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es convergente con suma  $\lambda U$ .

4. Hallar la suma de la series

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \cdot \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(i \left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right).$$

5. Sea  $u_n = u'_n + iu''_n$  el término general de una serie ( $u'_n, u''_n \in \mathbb{R}$ ).

(i) Demostrar que para que la serie de término general  $u_n$  sea convergente, es necesario y suficiente que las series de término general  $u'_n$  y  $u''_n$  lo sean.

(ii) Demostrar además, si  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  representan las sumas de estas tres series, se verifica  $S = S' + iS''$ .

6. (Criterio de Cauchy para la convergencia de series). Sea  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie de números complejos. Demostrar que para que sea convergente es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente condición:

Para todo  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que

$$n \geq m \geq N \Rightarrow |u_m + u_{m+1} + \dots + u_n| < \epsilon.$$

**Solución.** 1. Por hipótesis existe  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  y dicho límite es finito. Por otra parte.  $u_n = S_n - S_{n-1}$  para todo  $n \geq 2$ , por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

2. El término enésimo de la serie es  $u_n = z^{n-1}$ . Si  $|x| \geq 1$ , también  $|u^{n-1}| = |z|^{n-1} \geq 1$ . Es decir,  $\{u_n\}$  no tiende a 0, lo cual implica que la serie no es convergente.

Sea  $|x| < 1$ . La suma parcial enésima es:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{s - 1},$$

por tanto,  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{0 - 1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}$ , finito. Quedan pues demostrados los apartados a) y b).

3. a) Sean  $U_n$  y  $V_n$  las sumas parciales enésimas de las series dadas, respectivamente. Entonces la suma parcial enésima de la serie suma es  $U_n + V_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = U + V,$$

es decir la serie suma es convergente con suma  $U + V$ .

b) La suma parcial enésima de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es  $\lambda U_n$ . Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda U_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lambda U,$$

es decir la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$  es convergente con suma  $\lambda U$ .

4. a) La serie es convergente y  $|1/2| < 1$ , por tanto es convergente de suma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

b) La serie es convergente y  $|1/(1+i)| = 1/\sqrt{2} < 1$ , por tanto es convergente de suma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/(1+i)} = 1 - i.$$

c) Usando los dos apartados anteriores y el teorema del álgebra de series:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( i \left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \right)$$

$$\begin{aligned}
&= i \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \\
&= i \cdot 2 + 5(1-i) = 5 + i.
\end{aligned}$$

5. Sean

$$S_n = u_1 + \dots + u_n, \quad S'_n = u'_1 + \dots + u'_n, \quad S''_n = u''_1 + \dots + u''_n.$$

Por un conocido teorema de sucesiones complejas, para que  $S'_n$  tienda a  $S'$  y  $S''_n$  tienda a  $S''$  es necesario y suficiente que  $S_n$  tienda a  $S' + iS''$ , de donde resultan (i) y (ii).

6. Sea  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Se verifica para  $n \geq m$ :

$$|S_n - S_{m-1}| = |u_m + u_{m+1} + \dots + u_n|,$$

luego la propiedad resulta del Criterio de Cauchy para sucesiones.

## 14.25. Series complejas: criterios de la raíz y del cociente

1. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

2. Demostrar que no toda serie convergente es absolutamente convergente.

3. Demostrar el criterio de la raíz:

Sea  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie compleja. Supongamos que  $\sqrt[n]{|u_n|}$  tiene límite  $L$ . Entonces:

i) Si  $L < 1$ , la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $L > 1$ , la serie es divergente.

iii) Si  $L = 1$ , el criterio no decide.

4. Demostrar el criterio del cociente:

Sea  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  una serie compleja. Supongamos que  $|u_{n+1}/u_n|$  tiene límite  $L$ . Entonces:

i) Si  $L < 1$ , la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $L > 1$ , la serie es divergente.

iii) Si  $L = 1$ , el criterio no decide.

5. Estudiar la convergencia absoluta de las series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n}. \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } in}{3^n}. \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

6. Estudiar las regiones de convergencia absoluta de las series

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(z+1)^n} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(z-3i)^{2n}}.$$

Nota. No se pide analizar los casos dudosos.

7. Estudiar las regiones de convergencia absoluta de las series

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nz} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{nz}.$$

Nota. No se pide analizar los casos dudosos.

**Solución.** 1. Sea  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  absolutamente convergente. Sea  $\epsilon > 0$ . Por el criterio de Cauchy para series, existe  $n_0$  natural tal que

$$\begin{aligned} n \geq m \geq n_0 &\Rightarrow |u_n + u_{n+1} + \dots + u_m| \\ &= |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \epsilon. \end{aligned}$$

Pero  $|u_n + u_{n+1} + \dots + u_m| \leq |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|$ , lo cual implica, de nuevo por el criterio de Cauchy, que la serie  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  es convergente.

2. Consideremos la serie real (y por tanto compleja):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Sabemos por teoría de series reales que es convergente pero no absolutamente convergente.

3. *i)* Como  $L < 1$ , consideremos un número  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Por definición de límite, para  $n$  suficientemente grande se verifica  $\sqrt[n]{|u_n|} < r$ , o de forma equivalente  $|u_n| < r^n$ . Como la serie de término general  $r^n$  es convergente (geométrica de razón un número en módulo menor que 1), se deduce que la serie de término general  $|u_n|$  es convergente.

*ii)* Si  $L > 1$ , por definición de límite se verifica para  $n$  suficientemente grande  $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$ , o de forma equivalente  $|u_n| > 1$ . El límite de  $u_n$  no tiende a 0, luego la serie es divergente.

iii) Elijamos las series reales (y por tanto complejas):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Para la primera serie tenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1, \end{aligned}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{1/n} n^{1/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{1/n}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2^0} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Sabemos por teoría de series reales que la primera es divergente y la segunda convergente. Esto demuestra que el criterio de la raíz no decide sobre el carácter de la serie si  $L = 1$ .

4. i) Como  $L < 1$ , consideremos un número  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Por definición de límite, para  $n$  suficientemente grande se verifica  $|u_{n+1}/u_n| < r$ . Si pérdida de generalidad, podemos suprimir un número finito de términos de la serie de tal manera que se verifique  $|u_{n+1}/u_n| < r$  para todo  $n$ . Tenemos pues

$$|u_n| = \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{u_2}{u_1} \right| \cdot |u_1| < |u_1| r^{n-1}.$$

Como  $r$  tiene valor absoluto menor que 1, la serie de término general  $|u_1| r^{n-1}$  es convergente (álgebra de series y teorema de convergencia de la serie geométrica). Por el criterio de comparación, la serie de término general  $|u_n|$  es convergente.

ii) Si  $L > 1$ , entonces para  $n$  suficientemente grande se verifica  $|u_{n+1}/u_n| > 1$ , o de forma equivalente  $|u_{n+1}| > |u_n|$ , luego el término general  $u_n$  no tiende a 0 y como consecuencia la serie es divergente.



(iii) Consideremos las series reales (y por tanto complejas):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En ambos casos,  $L = 1$ , la primera es divergente y la segunda convergente, según conocidos resultados de series reales.

5. a) Usando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(1+i)^n n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1+i}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \cdot |1| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \end{aligned}$$

por tanto la serie es absolutamente convergente.

(b) Usando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} i(n+1)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\operatorname{sen} in} \right| \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} i(n+1)}{\operatorname{sen} in} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{-n-1} - e^{n+1}}{e^{-n} - e^n} \right|. \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador entre  $e^{n+1}$ :

$$L = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{-2n-2} - 1}{e^{-2n-1} - 1/e} \right| = \frac{e}{3} < 1,$$

por tanto la serie es absolutamente convergente.

(c) Usando el criterio de la raíz:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|z-2|^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z-2|} = \frac{1}{|z-2|}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{|z-2|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |z-2|.$$

Por tanto, si  $1 < |z-2|$  la serie es absolutamente convergente, si  $1 > |z-2|$  es divergente, y si  $|z-2| = 1$  también es divergente según el conocido resultado acerca de las series geométricas.

6. a) Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(n+1)(z+1)^{n+1}} \cdot n(z+1)^n \right| = \frac{1}{|z+1|} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{|z+1|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |z+1|. \end{aligned}$$

b) De manera análoga:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)2^{n+1}}{(z-3i)^{2n+2}} \cdot \frac{(z-3i)^{2n}}{n2^n} \right| = \frac{1}{|z-3i|^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{n} \\ &= \frac{2}{|z-3i|^2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < |z-3i|. \end{aligned}$$

7. a) Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}e^{-(n+1)z}}{\sqrt{n}e^{-nz}} \right| = \frac{1}{|e^z|} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{|e^z|} < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < |e^z| \Leftrightarrow 1 < |e^{x+iy}| \Leftrightarrow 1 < e^x \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned}$$

b) De manera análoga:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)e^{(n+1)z}}{ne^{nz}} \right| = |e^z| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = |e^z| < 1 \\ &\Leftrightarrow |e^{x+iy}| < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z < 0. \end{aligned}$$

## 14.26. Series complejas enteras, radio de convergencia

1. Sea la serie entera compleja  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Demostrar que si converge para  $z = z_0 \neq 0$ , entonces converge para todo  $z$  tal que  $|z| < |z_0|$ .

2. Sea la serie entera compleja  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Demostrar que existe un único

$\rho \in [0, +\infty]$  tal que:

i) Si  $|z| < \rho$  la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $|z| > \rho$  la serie es divergente.

A  $\rho$  se le llama *radio de convergencia* de la serie entera dada, y al círculo

abierto  $|z| < \rho$ , *círculo o disco de convergencia*.

3. Generalizar el resultado del problema anterior para la serie entera compleja  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ .

4. Hallar los radios de convergencia de las series enteras o de potencias

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in} z^n. \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z}{1-i} \right)^n.$$

5. Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 2^n}.$$

**Solución.** 1. Si la serie converge para  $z = z_0$ , entonces  $a_n z_0^n \rightarrow 0$ , lo cual implica que existe  $K \geq 0$  tal que  $|a_n z_0^n| \leq K$  para todo  $n$ . Entonces, si  $|z| < |z_0|$ :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq K \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

La serie de término general  $|z/z_0|^n$  es geométrica de razón menor que 1, luego es convergente. Por el teorema del álgebra de series también lo es la de término general  $K |z/z_0|^n$  y por el criterio de la mayorante, también lo es  $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ .

2. *Existencia de  $\rho$* . Llamemos

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}, \quad S' = \{ |z| : z \in S \}.$$

Como  $0 \in S$ , también  $0 \in S'$  es decir  $S' \neq \emptyset$ . Llamemos  $\rho = \sup S'$  (será finito o infinito). Sea  $z$  tal que  $|z| < \rho$ , entonces  $|z|$  no es cota superior de  $S'$  lo cual implica que existe  $z_0 \in S$  con  $|z| < |z_0|$ . Por el problema anterior, la serie converge absolutamente en  $z$ .

Sea  $z$  tal que  $|z| > \rho$ . Si la serie fuera convergente en  $z$ , entonces  $z \in S$  con lo cual  $|z| \in S'$  y  $\rho$  no sería cota superior de  $S'$  (absurdo).

*Unicidad de  $\rho$* . Si existieran dos  $\rho < \rho'$  cumpliendo las condiciones *i)* y *ii)*, elijamos  $z$  tal que  $\rho < |z| < \rho'$ . Entonces la serie sería a la vez absolutamente convergente y divergente en  $z$  (absurdo).

3. Llamando  $w = z - z_0$  obtenemos la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n w^n$ . Existe por tanto un

único  $\rho \in [0, +\infty]$  tal que:

i) Si  $|w| < \rho$  la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $|w| > \rho$  la serie es divergente.

o bien, existe por tanto un único  $\rho \in [0, +\infty]$  tal que:

i) Si  $|z - z_0| < \rho$  la serie es absolutamente convergente.

ii) Si  $|z - z_0| > \rho$  la serie es divergente.

Nota. Mantenemos las definiciones: a  $\rho$  se le llama radio de convergencia de la serie entera dada, y al círculo abierto  $|z - z_0| < \rho$ , círculo o disco de convergencia.

4. a) La serie es  $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^i z)^n$  (geométrica). Es absolutamente convergente si y sólo si  $|e^i z| = |e^i| |z| = 1 \cdot |z| = |z| < 1$ , por tanto el radio de convergencia es  $R = 1$ .

b) La serie es geométrica. Es absolutamente convergente si y sólo si

$$\left| \frac{z}{1-i} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{2}} < 1, \text{ o bien } |z| < \sqrt{2}$$

por tanto el radio de convergencia es  $R = \sqrt{2}$ .

5. Aplicando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(z-1)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{(z-1)^n} \right| = \frac{|z-1|}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{|z-1|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2. \end{aligned}$$

Si  $|z-1| < 2$  la serie es absolutamente convergente y si  $|z-1| > 2$ , divergente. Su radio de convergencia es por tanto  $R = 2$ .

## 14.27. Fórmula de Cauchy-Hadamard

1. Demostrar el teorema de Cauchy-Hadamard:

Sea la serie entera compleja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  y  $\rho$  su radio de convergencia. Entonces

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

2. Usando la fórmula de Cauchy-Hadamard hallar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad a_{2n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

**Solución.** 1. Recordamos que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup\{x_n : n \geq p\})$$

para  $x_n$  sucesión de números reales. Sea la serie de términos positivos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \quad (1)$$

*i)* Veamos que si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} < 1$ , la serie (\*) converge. En efecto, sea  $r$  fijo tal que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} < r < 1$ . Entonces, para  $n$  suficientemente grande,

$$\sup\{u_m^{1/m} : m \geq n\} < r.$$

Tenemos:

$$\sup\{u_m^{1/m} : m \geq n\} < r \Rightarrow u_m^{1/m} < r \Rightarrow u_m < r^m.$$

Como  $|r| = r < 1$ , la correspondiente serie geométrica es convergente, luego también lo es la serie (1).

*ii)* Veamos que si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} < 1$ , la serie (1) diverge. En efecto, sea  $r$  fijo tal que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} > r > 1$ . Entonces, y razonando de manera análoga a *i)*, para  $n$  suficientemente grande, se verifica  $u_m > r^m$ . Como  $|r| = r > 1$ , la correspondiente serie geométrica es divergente, luego también lo es la serie (1).

Consideremos ahora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \quad (2)$$

Entonces, si  $\rho \neq 0$  y  $\rho \neq +\infty$  :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} |z| = |z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

$$\Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Por tanto, la serie (2) es absolutamente convergente si, y sólo si se verifica la última desigualdad, en consecuencia

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Los casos  $\rho = 0$  y  $\rho = +\infty$  son triviales.

2. Usamos la propiedad de que el límite superior de una sucesión es el supremo de los límites de las subsucesiones convergentes. En nuestro caso es claro que los límites de las subsucesiones convergentes de  $|a_n|^{1/n}$  son

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{2n}|^{1/(2n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \sup\{1/2, 1/3\} = 1/2,$$

por tanto el radio de convergencia es  $\rho = 2$ .

## 14.28. Teorema de Pitagoras trigonométrico por series de potencias

Usando los desarrollos en serie de potencias, demostrar el teorema de Pitágoras trigonométrico en  $\mathbb{C}$ , es decir

$$\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Solución.** Sabemos que para todo  $z \in \mathbb{C}$  se verifica

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

siendo ambas series absolutamente convergentes para todo  $z$ . Para dos series absolutamente convergentes  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , también sabemos que se verifica el teorema del producto de Cauchy:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k)+1)!} z^{2(n-k)+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(2k+1)!(2(n-k)+1)!} z^{2(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Haciendo una traslación de subíndices podemos escribir

$$\operatorname{sen}^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2k+1)!(2(n-k-1)+1)!} \right) z^{2n}.$$

Por otra parte,

$$\binom{2n}{2k+1} = \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!} = \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2(n-k-1)+1)!}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{sen}^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} z^{2n}. \quad (1)$$

Procedemos de manera análoga para  $\cos^2 x$ :

$$\begin{aligned} \cos^2 z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} z^{2(n-k)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(2k)!(2(n-k))!} z^{2n} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\binom{2n}{2k} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2(n-k))!}.$$

En consecuencia,

$$\cos^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \quad (2)$$

Usando los desarrollos (1) y (2), podemos escribir

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} z^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} = (1-1)^{2n} = 0.$$

Concluimos pues que  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

## 14.29. Ecuación funcional compleja

Determinar todas las funciones enteras  $f$  que satisfacen la ecuación funcional compleja

$$f(2z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**Solución.** Si  $f$  es una función entera, se puede expresar en todo el plano complejo como suma de una serie de potencias convergente, i.e.  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Si  $f$  satisface la ecuación funcional dada, se ha de verificar

$$\sum_{n \geq 0} 2^n a_n z^n = \frac{\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1 + (-1)^n}{2} a_n z^n,$$

lo cual implica

$$2^n a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Si  $a_n \neq 0$  entonces,  $2^n = (1 + (-1)^n)/2$ , o de forma equivalente  $2^{n+1} = 1 + (-1)^n$ . Claramente, esta relación no se cumple para  $n \geq 1$ , luego ha de ser  $a_n = 0$  si  $n \geq 1$ . En consecuencia, las únicas posibles funciones enteras que satisfacen la ecuación funcional son las constantes, y es inmediato verificar que éstas la satisfacen.

Concluimos que las funciones enteras que satisfacen la ecuación funcional dada son exactamente las funciones constantes.



### 14.30. Desarrollo en serie de Laurent

1. Desarrollar en serie de Laurent la función  $f(z) = \frac{1}{3z-7}$  en potencias enteras de  $z$ .

2. Desarrollar en serie de Laurent la función  $f(z) = \frac{(4+i)z+3i-8}{z^2+z-6}$  en potencias enteras de  $z$ .

3. Desarrollar  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$  en una corona abierta de centro  $z_0 = -2$ .

4. Desarrollar  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$  en una corona abierta de centro  $z_0 = 1$ .

5. Desarrollar  $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$  en un entorno de  $z_0 = \infty$ .

6. Determinar los diferentes desarrollos en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

**Solución.** 1. La función es analítica en todo el plano complejo salvo en  $z = 7/3$ . La función es pues analítica en las coronas abiertas  $0 < |z| < 7/3$  y  $7/3 < |z| < +\infty$ . Dividiendo el numerador y denominador de  $f(z)$  entre  $-7$  y usando la suma de la serie geométrica obtenemos:

$$f(z) = \frac{-1}{7} \frac{1}{1 - \frac{3}{7}z} = -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n z^n \quad (|3z/7| < 1).$$

Tenemos por tanto los desarrollos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{3^n}{7^{n+1}} z^n \quad (0 < |z| < 7/3),$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{7^n} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (7/3 < |z| < +\infty).$$

2. (Resolución esquemática) La función racional dada es analítica en todos los puntos del plano complejo salvo aquellos que anulan al denominador. Resolviendo  $z^2 + z - 6 = 0$  obtenemos  $z = 2$ ,  $z = -3$ . La función es pues analítica en la tres coronas abiertas

$$0 < |z| < 2, \quad 2 < |z| < 3, \quad 3 < |z| < +\infty.$$

Descomponiendo en fracciones simples:  $f(z) = \dots = i \cdot \frac{1}{z-2} + 4 \cdot \frac{1}{z+3}$ .

Llamando  $f_1(z) = \frac{1}{z-2}$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{z+3}$  y procediendo como en el ejemplo anterior obtendríamos desarrollos de Laurent (I), (II), (III) y (IV) :

$$f_1(z) = \begin{cases} (I) & \text{si } 0 < |z| < 2 \\ (II) & \text{si } 2 < |z| < +\infty, \end{cases}$$

$$f_2(z) = \begin{cases} (III) & \text{si } 0 < |z| < 3 \\ (IV) & \text{si } 3 < |z| < +\infty. \end{cases}$$

Entonces,

$$f(z) = \begin{cases} i(I) + 4(III) & \text{si } 0 < |z| < 2 \\ i(II) + 4(III) & \text{si } 2 < |z| < 3 \\ i(II) + 4(IV) & \text{si } 3 < |z| < +\infty. \end{cases}$$

3. Efectuando el cambio  $u = z + 2$  y usando la suma de la serie geométrica:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{u-2}{u} \cdot \frac{-1}{1-u} = \left(1 - \frac{2}{u}\right) (-1 - u - u^2 - u^3 - \dots) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + u^3 + \dots \quad (|u| < 1). \end{aligned}$$

Por tanto podemos expresar

$$f(z) = \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (z+2)^n \quad (0 < |z+2| < 1).$$

4. Efectuando el cambio  $u = z - 1$  y usando el desarrollo en serie de la función exponencial obtenemos para  $u \neq 0$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2(u+1)}}{u^2} = \frac{e^2}{u^2} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n u^n}{n!} \\ &= \frac{e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^2 2^n}{n!} u^{n-2}. \end{aligned}$$

Podemos por tanto expresar

$$f(z) = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^2 2^{n+2}}{(n+2)!} (z-1)^n, \quad (0 < |z-1| < +\infty).$$

5. Un entorno de  $\infty$  es una región de la forma  $|z| > a$ . La función  $f$  no es analítica exactamente en  $z = 3$ , tenemos por tanto que desarrollar en la

corona abierta  $3 < |z| < +\infty$ . Consideremos la función  $g(z) = 1/(z - 3)$ . Entonces:

$$g(z) = \frac{1}{z - 3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 3/z}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^{-n-1} \quad (|3/z| < 1).$$

Derivando

$$g'(z) = -\frac{1}{(z - 3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-n - 1) 3^n z^{-n-2} \quad (3 < |z|)$$

Podemos por tanto expresar

$$(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n + 1) 3^n}{z^{n+2}}, \quad (3 < |z| < +\infty).$$

6. Descomponiendo en suma de fracciones simples obtenemos

$$f(z) = \frac{1/2}{z} - \frac{1}{z - 1} + \frac{1/2}{z - 2},$$

o bien

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - z/2}.$$

Denotemos

$$f_1(z) = \frac{1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{1 - z/2},$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1}{2} f_1(z) + f_2(z) - \frac{1}{4} f_3(z).$$

Usando el conocido teorema acerca de la serie geométrica

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1 - z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & (0 < |z| < 1) \quad (S_1) \\ -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \\ = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} & (1 < |z|) \quad (S_2) \end{cases}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{1 - z/2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} & (0 < |z| < 2) \quad (S_3) \\ -\frac{2}{z} \frac{1}{1 - 2/z} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2z)^n} \\ = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1} z^{n+1}} & (2 < |z|) \quad (S_4) \end{cases}$$

Es decir,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} + S_1 - \frac{1}{4} S_3 & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ \frac{2}{z} + S_2 - \frac{1}{4} S_3 & \text{si } 1 < |z| < 2 \\ \frac{1}{2z} + S_2 - \frac{1}{4} S_4 & \text{si } 2 < |z| < +\infty \end{cases}$$

### 14.31. Serie de Laurent con parámetros

Se considera la función compleja de variable compleja:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{\lambda z^2 + (\lambda^2 + 1)z + \lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

(a) Hallar y clasificar sus singularidades según los diferentes valores del parámetro complejo  $\lambda$ .

(b) Para cada valor de  $\lambda \in \mathbb{C}$  hallar los diferentes desarrollos en serie de Laurent de  $f(z)$  en potencias de  $z$  y especificar sus respectivos dominios de validez.

(c) Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función real de variable real definida en  $[0, 2\pi]$  :

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{1 + a^2 - 2a \cos t} \quad (0 < a < 1).$$

Indicación: la serie de Fourier es

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \text{con } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{int} dt.$$

Relacionar esta serie con algún desarrollo de Laurent de  $f(z)$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Para  $\lambda = 0$  la función es  $f(z) = (z^2 - 1)/z$  y por tanto  $z = 0$  es polo simple. Para  $\lambda \neq 0$  fácilmente verificamos que las raíces del denominador de  $f(z)$  son  $z_1 = -1/\lambda$  y  $z_2 = -\lambda$ . Estas dos raíces son iguales para  $\lambda = \pm 1$ . Si  $\lambda \neq \pm 1$  el numerador de  $z$  no se anula y por tanto  $z_1$  y  $z_2$  son polos simples. Si  $\lambda = 1$  entonces  $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$  con lo cual  $z = -1$  es polo simple. Si  $\lambda = -1$  entonces  $f(z) = (z + 1)/(1 - z)$  con lo cual  $z = 1$  es polo simple. Podemos concluir que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda = 0 : & 0 & \text{polo simple} \\ \lambda = 1 : & -1 & \text{polo simple} \\ \lambda = -1 : & 1 & \text{polo simple} \\ \lambda \neq \pm 1 \wedge \lambda \neq 0 : & -\lambda, -1/\lambda & \text{polos simples.} \end{array} \right.$$

(b) Para  $\lambda = 0$  tenemos

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z} = -\frac{1}{z} + z \quad (0 < |z| < +\infty).$$

Para  $\lambda = 1$  y usando el teorema relativo a la suma de la serie geométrica

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - 1}{z + 1} = 1 - \frac{2}{1 + z} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \quad (0 < |z| < 1) \\ 1 - \frac{2}{z} \frac{1}{1 + 1/z} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \quad (1 < |z| < +\infty). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Para  $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z + 1}{1 - z} = -1 + \frac{2}{1 - z} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} -1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad (0 < |z| < 1) \\ -1 - \frac{2}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (1 < |z| < +\infty). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Para  $\lambda \neq 0, \pm 1$ , efectuando la división euclídea y descomponiendo en fracciones simples

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} z + 2}{(z + \frac{1}{\lambda})(z + \lambda)} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{A}{z + \frac{1}{\lambda}} + \frac{B}{z + \lambda} \right) \\ &= \dots = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{z + \frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{z + \lambda}. \end{aligned}$$

Hallemos los desarrollos en serie de Laurent de las fracciones simples anteriores.

$$\frac{1}{z + \frac{1}{\lambda}} = \lambda \frac{1}{1 + \lambda z} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda z)^n \quad (|\lambda z| < 1).$$

Queda

$$\frac{1}{z + \frac{1}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \lambda^{n+1} z^n \quad (0 < |z| < 1/|\lambda|), \quad (\text{desarrollo } L_1(z)).$$

Análogamente

$$\frac{1}{z + \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\lambda z}\right)^n \quad (1/|\lambda z| < 1),$$

$$\frac{1}{z + \frac{1}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^n} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (1/|\lambda| < |z| < +\infty) \quad (\text{desarrollo } L_2(z)).$$

$$\frac{1}{z + \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{z}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{z}{\lambda}\right)^n \quad (|z/\lambda| < 1),$$

$$\frac{1}{z + \lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < |\lambda|) \quad (\text{desarrollo } L_3(z)).$$

$$\frac{1}{z + \lambda} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\lambda}{z}\right)^n \quad (|\lambda/z| < 1),$$

$$\frac{1}{z + \lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{z^{n+1}} \quad (|\lambda| < |z| < +\infty) \quad (\text{desarrollo } L_4(z)).$$

Si  $0 < |\lambda| < 1$  entonces,  $0 < |\lambda| < 1 < 1/|\lambda|$ . Tendríamos los desarrollos

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_1(z) - L_3(z) \quad (0 < |z| < |\lambda|),$$

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_4(z) - L_1(z) \quad (|\lambda| < |z| < 1/|\lambda|),$$

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_2(z) - L_4(z) \quad (1/|\lambda| < |z| < +\infty).$$

Si  $|\lambda| > 1$  entonces,  $1/|\lambda| < 1 < |\lambda|$ . Tendríamos los desarrollos

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_1(z) - L_3(z) \quad (0 < |z| < 1/|\lambda|),$$

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_2(z) - L_3(z) \quad (1/|\lambda| < |z| < |\lambda|),$$

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} L_2(z) - L_4(z) \quad (|\lambda| < |z| < +\infty).$$

(c) Desarrollemos  $c_n$ . Para ello efectuamos la sustitución  $z = e^{it}$  con lo cual  $dz = izdt$ ,  $\sin t = (z^2 - 1)/2iz$  y  $\cos t = (z^2 + 1)/2z$ . Por tanto

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{1 + a^2 - 2a\frac{z^2+1}{2z}} \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} =$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)z^{n-1} dz}{az^2 - (1 + a^2)z + a} = -\frac{i}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{az^2-(1+a^2)z+a} dz}{z^{-(n-1)}} = -\frac{i}{2} A_{-n}.$$

en donde  $A_{-n}$  es el coeficiente de  $1/z^n$  en el desarrollo en serie de Laurent de la función  $f(z)$  del apartado (a) para  $\lambda = a < 1 < 1/a = 1/\lambda$ . Corresponde al desarrollo

$$f(z) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} L_4(z) - L_1(z) \quad (a < |z| < 1/a),$$

y el coeficiente de  $1/z^n$  es  $(-1/a^2)(-1)^{n-1} = (-1)^n a^{n-3}$ . El desarrollo pedido es

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{n-3} i}{2} e^{int}.$$

### 14.32. Recurrente compleja por serie de potencias

(a) Los términos de una sucesión  $(a_n)$  de números complejos satisfacen la relación de recurrencia de segundo orden  $4a_{n+2} + 4a_{n+1} + a_n = 0$ . Encontrar una acotación de la forma  $|a_n| \leq MK^n$ .

(b) Demostrar que la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  tiene su radio de convergencia no nulo.

(c) Resolver la ecuación en diferencias  $4a_{n+2} + 4a_{n+1} + a_n = 4$  con  $a_0 = 1, a_1 = -1$ .

Indicación. Multiplicar por  $z^{n+2}$  ambos miembros de la ecuación en diferencias finitas y despejar  $f(z)$ . Después, desarrollar  $f(z)$  en serie de potencias.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Tenemos  $a_{n+2} = -(a_{n+1} + a_n/4)$ . En consecuencia:

$$|a_{n+2}| = \left| a_{n+1} + \frac{a_n}{4} \right| \leq |a_{n+1}| + \left| \frac{a_n}{4} \right| \leq \max\{|a_{n+1}|, |a_n|\}$$

$$+\frac{1}{4} \text{máx} \{|a_{n+1}|, |a_n|\} = \frac{5}{4} \text{máx} \{|a_{n+1}|, |a_n|\}.$$

Para  $n = 0$  las desigualdad se pueden escribir en la forma:

$$|a_2| \leq \frac{5}{4} \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\}.$$

Para  $n = 1$  en la forma:

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \frac{5}{4} \text{máx} \{|a_2|, |a_1|\} \leq \frac{5}{4} \text{máx} \left\{ \frac{5}{4} \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\}, |a_0| \right\} \\ &= \left( \frac{5}{4} \right)^2 \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\}. \end{aligned}$$

Usando el método de inducción, se llega inmediatamente a la acotación:

$$|a_n| \leq \left( \frac{5}{4} \right)^{n-1} \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\} = \left( \frac{4}{5} \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\} \right) \left( \frac{5}{4} \right)^n.$$

En consecuencia tenemos  $|a_n| \leq MK^n$  siendo:

$$M = \frac{4}{5} \text{máx} \{|a_1|, |a_0|\}, \quad K = \frac{5}{4}.$$

(b) El radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  sabemos que viene dado por  $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Por el apartado anterior tenemos  $|a_n| \leq MK^n$ . Entonces:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{MK^n} = K \limsup \sqrt[n]{M}.$$

Por otra parte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} M^{1/n} = M^0 = 1$  si  $M \neq 0$ . Si  $M = 0$  es decir,  $|a_1| = |a_2| = 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 0$ . Todo esto implica que en cualquier caso  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq K$  y por tanto  $R \geq 1/K > 0$ . Es decir, el radio de convergencia es no nulo.

(c) Multiplicando ambos miembros de la ecuación recurrente por  $z^{n+2}$ :

$$4a_{n+2}z^{n+2} + 4a_{n+1}z^{n+2} + a_n z^{n+2} = 4z^{n+2}.$$

Tomando sumas:

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}z^{n+2} + 4z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 4z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Las series del primer miembro tienen radio de convergencia  $R$  y la del segundo miembro 1 (geométrica de razón  $z$ ). La igualdad tiene sentido pues



para  $|z| < \min\{1, R\}$ . Al ser  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$  ( $|z| < 1$ ) obtenemos:

$$4(f(z) - a_0 - a_1 z) + 4z(f(z) - a_0) + z^2 f(z) = \frac{4z^2}{1-z},$$

igualdad válida para  $|z| < \min\{1, R\}$ . Sustituyendo  $a_0 = 1, a_1 = -1$ , despejando  $f(z)$  y simplificando obtenemos:

$$f(z) = \frac{4z^2 - 4z + 4}{(z+2)^2(1-z)}$$

y efectuando la descomposición en fracciones simples:

$$f(z) = \frac{4/9}{1-z} + \frac{-32/9}{z+2} + \frac{28/3}{(z+2)^2}.$$

Desarrollemos en serie  $f_1(z) = 1/(1-z)$ ,  $f_2(z) = 1/(z+2)$  y  $f_3(z) = 1/(z+2)^2$ :

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z/2)^n \quad (|z| < 2).$$

Derivando la última igualdad respecto de  $z$ :

$$\begin{aligned} -f_3(z) &= -\frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-z}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+2}} z^n. \end{aligned}$$

Este último desarrollo es válido para  $|z| < 2$  pues toda serie de potencias y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia. Además claramente los desarrollos anteriores de  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son válidos para  $|z| < \min\{1, R\}$ . La expresión de  $f(z)$  para esos valores de  $z$  es por tanto:

$$f(z) = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n - \frac{28}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+2}} z^n.$$

Operando y simplificando obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{4}{9} + \frac{(-1)^n}{2^n} \left( \frac{7n}{3} + \frac{5}{9} \right) \right] z^n,$$

con lo cual, la solución de la ecuación en diferencias es:

$$a_n = \frac{1}{9} \left( 4 + \frac{(-1)^n (21n + 5)}{2^n} \right).$$

### 14.33. Suma de series por residuos

1. Sea  $N$  entero no negativo y  $\Gamma_N$  el cuadrado de vértices

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)(1+i), \quad \left(N + \frac{1}{2}\right)(1-i),$$

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)(-1+i), \quad \left(N + \frac{1}{2}\right)(-1-i).$$

Demostrar que existe  $M > 0$  tal que  $|\cot \pi z| \leq M$  para todo  $z \in \Gamma_N$ .

2. Sea  $f(z)$  analítica en todo el plano complejo salvo en un número finito de polos  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ninguno de los cuales es un número entero. Supongamos además que existen  $H > 0$  y  $k > 1$  tales que

$$|f(z)| \leq \frac{H}{|z|^k} \text{ para } |z| \text{ suficientemente grande.}$$

Demostrar que  $\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_j} (f(z) \cot \pi z)$ .

3. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$  con  $(a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$ .

4. Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4}$  con  $(a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$ .

5. Demostrar que (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

6. Sea  $f(z)$  analítica en todo el plano complejo salvo en un número finito de polos  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ninguno de los cuales es un número entero. Supongamos además que existen  $H > 0$  y  $k > 1$  tales que  $|f(z)| \leq H/|z|^k$  para  $|z|$  suficientemente grande. Con estas hipótesis, se demuestra que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_j} (f(z) \csc \pi z).$$

Usando este resultado, hallar  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$  ( $a > 0$ ).

**Solución.** 1. Dado que  $\sin \pi z = 0$  si y sólo si  $z$  es entero y que  $\Gamma_N$  no contiene puntos con coordenadas enteras,  $\cot \pi z$  está definida en todo  $\Gamma_N$ .

Distinguiremos tres casos

*i)*  $y > 1/2$ . En este caso,

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left| \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \right| = \left| \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} \right| = \left| \frac{e^{\pi ix - \pi y} + e^{-\pi ix + \pi y}}{e^{\pi ix - \pi y} - e^{-\pi ix + \pi y}} \right| \\ &\leq \frac{|e^{\pi ix - \pi y}| + |e^{-\pi ix + \pi y}|}{\left| |e^{\pi ix - \pi y}| - |e^{-\pi ix + \pi y}| \right|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{|e^{-\pi y} - e^{\pi y}|} \\ &\stackrel{y > 1/2 \Rightarrow e^{\pi y} > e^{-\pi y}}{=} \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \stackrel{y > 1/2}{\leq} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = M_1 > 0. \end{aligned}$$

*ii)*  $y < -1/2$ . Razonando como en el caso anterior

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{|e^{-\pi y} - e^{\pi y}|} \stackrel{y < -1/2 \Rightarrow e^{-\pi y} > e^{\pi y}}{=} \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \\ &= \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \stackrel{y < -1/2}{\leq} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = M_1 > 0. \end{aligned}$$

*iii)*  $1/2 \leq y \leq -1/2$ . Si  $z = n + \frac{1}{2} + iy$ , usando que  $\cot(\pi/2 + w) = -\tan w$ , que  $\tan iw = i \tanh w$  y que la función  $\tanh t$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= |\cot \pi (n + 1/2 + iy)| = |\cot (\pi/2 + \pi iy)| \\ &= |-\tan \pi iy| = |\tanh \pi y| \leq \tanh \pi/2 = M_2 > 0 \end{aligned}$$

Si  $z = -n - \frac{1}{2} + iy$  y razonando de manera análoga,

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= |\cot \pi (-n - 1/2 + iy)| = |\cot (-\pi/2 + \pi iy)| \\ &= |\tan \pi iy| \leq \tanh \pi/2 = M_2 > 0. \end{aligned}$$

Basta ahora elegir  $M = \max\{M_1, M_2\}$ .

Nota. Dado que

$$M_2 = \tanh \frac{\pi}{2} = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} < \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = M_1,$$

podemos elegir  $M = M_1$ .

2. Para todo  $n$  entero tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow n} (z - n) f(z) \pi \cot \pi z &= \pi f(n) \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\tan \pi z} = \pi f(n) \cdot \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &\stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \pi f(n) \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi \cos^2 \pi z} = \pi f(n) \cdot \frac{1}{\pi} = f(n). \end{aligned}$$

Los polos de la función  $\pi f(z) \cot \pi z$  son por tanto los números enteros y además

$$\text{Res}_{z=n} \pi f(z) \cot \pi z = f(n).$$

Si  $\Gamma_N$  es la curva del problema anterior recorrida en sentido antihorario con  $N$  suficientemente grande para que encierre todos los polos de  $f(z)$  y aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz = 2\pi i \left( \sum_{-N}^N f(n) + \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j} \pi f(z) \cot \pi z \right).$$

El lado del cuadrado  $\Gamma_N$  es  $2N+1$ , luego su longitud es  $L = 8N+4$ . Entonces, usando el resultado del problema anterior y las hipótesis de acotación dadas

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz \right| \leq \frac{\pi HM}{N^k} (8N + 4).$$

Tomando límites cuando  $N \rightarrow +\infty$  queda

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz = 0,$$

con lo cual se verifica

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j} (f(z) \cot \pi z).$$

3. Consideremos la función  $f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}$ . Como  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = 1$  (finito), la función  $|f(z)|/|z|^2$  está acotada para  $|z|$  suficientemente grande. Es además analítica en  $\mathbb{C}$  salvo en los polos no enteros y simples  $z = \pm a$ , por tanto podemos aplicar la fórmula

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j} (f(z) \cot \pi z).$$

siendo  $z_1, \dots, z_m$  los polos de  $f(z)$ , ( $z_j \notin \mathbb{Z}$ ). Tenemos,

$$\operatorname{Res}_{z=a} (f(z) \cot \pi z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\cot \pi z}{(z-a)(z+a)} = \frac{\cot \pi a}{2a}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-a} (f(z) \cot \pi z) = \lim_{z \rightarrow -a} (z+a) \frac{\cot \pi z}{(z-a)(z+a)} = \frac{\cot(-\pi a)}{-2a} = \frac{\cot \pi a}{2a}.$$

Como  $f(z)$  es función par y  $f(0) = -1/a^2$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} - \frac{1}{a^2}.$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{\pi \cot \pi a}{a}$$

Despejando obtenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1 - \pi a \cot \pi a}{2a^2}.$$

4. Procedemos como el problema anterior. Consideremos la función  $f(z) = \frac{1}{z^4 - a^4}$ . Como  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = 0$  (finito), la función  $|f(z)|/|z|^2$  está acotada para  $|z|$  suficientemente grande. Es además analítica en  $\mathbb{C}$  salvo en los polos no enteros y simples  $z = \pm a$ , y  $z = \pm ai$ . Fácilmente obtenemos los residuos

$$\operatorname{Res}_{z=a} (f(z) \cot \pi z) = \operatorname{Res}_{z=-a} (f(z) \cot \pi z) = \frac{\cot \pi a}{4a^3},$$

$$\operatorname{Res}_{z=ai} (f(z) \cot \pi z) = \operatorname{Res}_{z=-ai} (f(z) \cot \pi z) = \frac{\coth \pi a}{4a^3},$$

Como  $f(z)$  es función par y  $f(0) = -1/a^4$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} - \frac{1}{a^4}.$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = -\pi \left[ \frac{\cot \pi a}{2a^3} + \frac{\coth \pi a}{2a^3} \right]$$

Despejando obtenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\cot \pi a + \coth \pi a).$$

5. (a) Sea  $f(z) = 1/z^2$  y hallemos el residuo de la función  $\pi f(z) \cot \pi z$  en el polo  $z = 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \pi f(z) \cot \pi z &= \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \operatorname{sen} \pi z} = \frac{\pi \left( 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots \right)}{z^2 \left( \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} - \dots \right)} \\ &= \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots}{z^3 - \frac{\pi^2 z^5}{3!} + \frac{\pi^4 z^7}{5!} - \dots} \stackrel{=}{=} \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \dots \\ &\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \pi f(z) \cot \pi z = \operatorname{coef} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Procediendo como en los problemas anteriores,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz &= 2\pi i \left( \sum_{-N}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_1^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \\ &= 2\pi i \left( 2 \sum_1^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \stackrel{N \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

(b) Sea  $f(z) = 1/z^4$  y hallemos el residuo de la función  $\pi f(z) \cot \pi z$  en el polo  $z = 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \pi f(z) \cot \pi z &= \frac{\pi \cos \pi z}{z^4 \operatorname{sen} \pi z} = \frac{\pi \left( 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots \right)}{z^4 \left( \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} - \dots \right)} \\ &= \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots}{z^5 - \frac{\pi^2 z^7}{3!} + \frac{\pi^4 z^9}{5!} - \dots} \stackrel{=}{=} \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z^3} - \frac{\pi^4}{45z} + \dots \\ &\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \pi f(z) \cot \pi z = \operatorname{coef} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{\pi^4}{45}. \end{aligned}$$

Procediendo como en el apartado anterior,

$$\int_{\Gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz = 2\pi i \left( \sum_{-N}^{-1} \frac{1}{n^4} + \sum_1^N \frac{1}{n^4} - \frac{\pi^4}{45} \right)$$

$$= 2\pi i \left( 2 \sum_1^N \frac{1}{n^4} - \frac{\pi^4}{45} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. Consideremos la función  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ . Como  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = 1$  (finito), la función  $|f(z)| / |z|^2$  está acotada para  $|z|$  suficientemente grande. Es además analítica en  $\mathbb{C}$  salvo en los polos no enteros y simples  $z = \pm ai$ , por tanto podemos aplicar la fórmula

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_j} (f(z) \operatorname{csc} \pi z).$$

siendo  $z_1, \dots, z_m$  los polos de  $f(z)$ , ( $z_j \notin \mathbb{Z}$ ). Tenemos,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=ai} (f(z) \operatorname{csc} \pi z) &= \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{\operatorname{csc} \pi z}{(z - ai)(z + ai)} \\ &= \frac{\operatorname{csc} \pi ai}{2ai} = \frac{1}{2ai \operatorname{sen} \pi ai} = \frac{1}{2ai(i \operatorname{senh} \pi a)} = -\frac{1}{2a \operatorname{senh} \pi a}, \\ \operatorname{Res}_{z=-ai} (f(z) \operatorname{csc} \pi z) &= \lim_{z \rightarrow -ai} (z + ai) \frac{\operatorname{csc} \pi z}{(z - ai)(z + ai)} \\ &= \frac{\operatorname{csc}(-\pi ai)}{-2ai} = \frac{\operatorname{csc} \pi ai}{2ai} = -\frac{1}{2a \operatorname{senh} \pi a}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \operatorname{senh} \pi a}.$$

### 14.34. Familia de racionales complejas

Para cada número real  $t$  con  $|t| < 1$  se considera la función compleja definida por

$$f(z) = \frac{4 - z^2}{4 - 4tz + z^2}.$$

y se pide:

- (a) Descomponer  $f(z)$  en fracciones simples.
- (b) Obtener la expresión de las derivadas sucesivas en  $z = 0$  de la función  $f(z)$ .
- (c) Demostrar que el coeficiente  $T_n(t)$  de  $z^n$  en el desarrollo en serie de Taylor en  $z = 0$  de  $f(z)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $t$  y que se cumple la relación de recurrencia

$$4T_{n+1} - 4tT_n(t) + T_{n-1}(t) = 0.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Efectuando la división euclídea:

$$f(z) = -1 + \frac{-4tz + 8}{z^2 - 4tz + 4}.$$

Resolviendo  $z^2 - 4tz + 4 = 0$  obtenemos  $a = 2t + 2i\sqrt{1-t^2}$  y  $\bar{a} = 2t - 2i\sqrt{1-t^2}$ . Expresando en fracciones simples:

$$\frac{-4tz + 8}{z^2 - 4tz + 4} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-\bar{a}} = \frac{A(z-\bar{a}) + B(z-a)}{(z-a)(z-\bar{a})}.$$

Para  $z = a$ , tenemos  $-4ta + 8 = A(a - \bar{a})$  y para  $z = \bar{a}$ ,  $-4t\bar{a} + 8 = B(\bar{a} - a)$ . Entonces:

$$A = \frac{-4ta + 8}{a - \bar{a}} = \frac{-8t^2 - 8ti\sqrt{1-t^2} + 8}{4i\sqrt{1-t^2}} = \frac{-2t^2 - 2ti\sqrt{1-t^2} + 2}{i\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{-2t^2i + 2t\sqrt{1-t^2} + 2i}{-\sqrt{1-t^2}} = -2t - \frac{2(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}i = -2t - 2\sqrt{1-t^2}i = -a.$$

Operando de manera análoga obtenemos  $B = -\bar{a}$ , por tanto la descomposición en fracciones simples de  $f(z)$  es

$$f(z) = -1 - \frac{a}{z-a} - \frac{\bar{a}}{z-\bar{a}} \quad \left(a = 2t + 2i\sqrt{1-t^2}\right).$$

(b) Llamando  $f_1(z) = -a/(z-a)$  y  $f_2(z) = -\bar{a}/(z-\bar{a})$ :

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n \Rightarrow f_1^{(n)}(0) = \frac{n!}{a^n}.$$

Razonando de manera análoga obtenemos  $f_2^{(n)}(0) = n!/\bar{a}^n$ . Por tanto, si  $n \geq 1$

$$f^{(n)}(0) = n! \left( \frac{1}{a^n} + \frac{1}{\bar{a}^n} \right) = \frac{n!(a^n + \bar{a}^n)}{(a\bar{a})^n} = \frac{n!(a^n + \bar{a}^n)}{(4t^2 + 4 - 4t^2)^n} = \frac{n!(a^n + \bar{a}^n)}{4^n}.$$

(c) Veamos que efectivamente se verifica la relación de recurrencia dada. En un entorno del origen podemos escribir

$$\frac{4 - z^2}{4 - 4tz + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)z^n$$



o bien  $4 - z^2 = (4 - 4tz + z^2)(T_0(t) + T_1(t)z + T_2(t)z^2 + \dots)$ . Igualando coeficientes obtenemos

$$\begin{cases} 4 = 4T_0(t) \\ 0 = 4T_1(t) - 4tT_0(t) \\ -1 = 4T_2(t) - 4tT_1(t) + T_0(t), \end{cases}$$

de lo cual deducimos  $T_0(t) = 1$ ,  $T_1(t) = t$ ,  $T_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ . Estos polinomios se han obtenido identificando en ambos miembros los coeficientes de  $z^0$ ,  $z^1$  y  $z^2$ . Identificando en ambos miembros el coeficiente de  $z^{n+1}$  (para  $n \geq 2$ ):

$$0 = 4T_{n+1} - 4tT_n(t) + T_{n-1}(t),$$

que es la relación de recurrencia pedida. Demostremos por inducción que  $T_n(t)$  es un polinomio de grado  $n$ . Hemos visto que es cierto para  $n = 0, 1, 2$ . Sea cierto para todo  $k \leq n$ . De la relación de recurrencia tenemos que  $T_{n+1}(t) = tT_n(t) - \frac{1}{4}T_{n-1}(t)$ , lo cual implica que  $T_{n+1}(t)$  es un polinomio. Como el grado de  $T_n(t)$  es  $n$  se deduce que el grado de  $tT_n(t)$  es  $n+1$  y al ser el grado de  $\frac{1}{4}T_{n-1}(t)$  igual a  $n-1$ , concluimos que el grado de  $T_{n+1}(t)$  es  $n+1$ .

### 14.35. Teorema de Rouché

- Hallar el número de ceros de  $F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$  en  $|z| < 1$ .
- Aplicando el teorema de Rouché, hallar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones en los dominios que se indican.
  - $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$  en  $|z| < 2$ .
  - $z^3 + z + 1 = 0$  en  $|z| < 1/2$ .
- Hallar el número de soluciones de la ecuación  $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$  en  $2 < |z| < 3$ .

**Solución.** Recordamos el teorema de Rouché:

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones analíticas en un dominio cerrado  $D$  del plano complejo limitado por el contorno  $\Gamma$ . Supongamos que se verifica

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \Gamma.$$

Entonces,  $F(z) = f(z) + g(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $D$  que  $f(z)$  (teniendo en cuenta multiplicidades).  $\square$

1. Elijamos  $f(z) = -4z^5$ ,  $g(z) = z^8 + z^2 - 1$ . En  $|z| = 1$  se verifica

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + |-1| = |z|^8 + |z|^2 + 1 = 3,$$

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4|z|^5 = 4.$$

Por tanto,  $|f(z)| > |g(z)|$  en  $|z| < 1$ . Según el teorema de Rouché  $F(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $|z| < 1$  que  $-4z^5$  incluyendo multiplicidades es decir, 4 raíces.

2. 1) Llamemos  $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$  y elijamos  $f(z) = -3z^3$ ,  $g(z) = z^4 - 1$ . En  $|z| = 2$  se verifica

$$|g(z)| = |z^4 - 1| \leq |z^4| + |-1| = |z|^4 + 1 = 16 + 1 = 17,$$

$$|f(z)| = |-3z^3| = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

Por tanto,  $|f(z)| > |g(z)|$  en  $|z| < 2$ . Según el teorema de Rouché  $F(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $|z| < 2$  que  $-3z^3$  incluyendo multiplicidades es decir, 3 raíces.

2) Llamemos  $F(z) = z^3 + z + 1$  y elijamos  $f(z) = 1$ ,  $g(z) = z^3 + z$ . En  $|z| = 1/2$  se verifica

$$|g(z)| = |z^3 + z| \leq |z^3| + |z| = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8},$$

$$|f(z)| = |1| = 1.$$

Por tanto,  $|f(z)| > |g(z)|$  en  $|z| < 1/2$ . Según el teorema de Rouché  $F(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $|z| < 1/2$  que 1 incluyendo multiplicidades es decir, no tiene raíces.

3. Llamemos  $F(z) = 4z^4 - 29z^2 + 25$  y sean  $N_1$  el número de raíces de  $F(z)$  en  $|z| < 3$ , y  $N_2$  el número de raíces de  $F(z)$  en  $|z| < 2$ . Entonces, el número de raíces de  $F(z)$  en  $2 < |z| < 3$  es  $N_1 - N_2$ , si  $F(z)$  no tiene raíces en  $|z| = 2$ .

Aplicando el teorema de Rouché para  $|z| < 3$  considerando  $f(z) = 4z^3$ , fácilmente obtenemos que  $N_1 = 4$ , y aplicándolo para  $|z| < 2$  considerando  $f(z) = -29z^2$ , fácilmente obtenemos que  $N_2 = 2$ .

En el proceso de cálculo de  $N_2$  ya se habrá comprobado que  $F(z)$  no tiene raíces en  $|z| = 2$  pues  $|f(z)| > |g(z)|$ . Concluimos que el número de raíces de  $F(z)$  en  $2 < |z| < 3$  considerando multiplicidades es  $N_1 - N_2 = 2$ .

### 14.36. Función holomorfa: representación integral

Se considera la función compleja definida mediante la representación integral

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt.$$

(a) Comprobar que la función está bien definida en el semiplano de los números complejos con parte real estrictamente positiva y calcular el valor  $f(z)$  cuando  $z$  es un número real positivo.

(b) Aceptando que la función  $f$  es holomorfa en ese semiplano, determinar el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos t^2 dt.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Sea  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} e^{-zt^2} &= e^{-(x+iy)t^2} = e^{-xt^2} e^{-iyt^2} = e^{-xt^2} [\cos(-yt^2) + i \sin(-yt^2)] \\ &= e^{-xt^2} \cos(yt^2) - ie^{-xt^2} \sin(yt^2). \end{aligned}$$

Por otra parte,  $|e^{-xt^2} \cos(yt^2)| \leq e^{-xt^2}$  y  $|e^{-xt^2} \sin(yt^2)| \leq e^{-xt^2}$  lo cual implica que si la integral  $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$  es convergente para  $x > 0$  también son convergentes

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(yt^2) dt \text{ y } \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin(yt^2) dt. \quad (1)$$

Efectuando el cambio  $u = \sqrt{x}t$  y usando la integral de Euler

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{x}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Al ser convergentes las integrales que aparecen en (1), lo es la integral  $\int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ , es decir  $f(z)$  está bien definida en  $\operatorname{Re} z > 0$ .

(b) Llamemos  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos t^2 dt$  y  $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin t^2 dt$ . Entonces,

$$\begin{aligned} K &= I - iJ = \int_0^{+\infty} (e^{-t^2} \cos t^2 - ie^{-t^2} \sin t^2) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} [\cos(-t^2) + i \sin(-t^2)] dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)t^2} dt = f(1+i).$$

Por el apartado anterior,  $f(x) = \sqrt{\pi}/(2\sqrt{x})$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Usando el principio de identidad de las funciones holomorfas (según el enunciado podemos aceptar que  $f$  lo es),  $f(z) = \sqrt{\pi}/(2\sqrt{z})$  en  $\text{Re } z > 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} K = I - iJ = f(1+i) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2} e^{\pi i/8}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}} e^{-\pi i/8} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}} \left( \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right). \end{aligned}$$

Igualando partes reales queda

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}} \cos \frac{\pi}{8}.$$

### 14.37. Integral $\int_0^{+\infty} x dx / ((1+x)^n - (1-x)^n)$ por residuos

a) Para cada valor de  $n$  entero positivo calcular todas las raíces reales o complejas de la ecuación  $(1+z)^n = (1-z)^n$ .

b) Para cada valor de  $n$  entero positivo, determinar y clasificar las singularidades de la función compleja:

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^n - (1-z)^n}.$$

c) Aplicando la técnica de residuos, calcular la siguiente integral real, determinando previamente los valores de  $n$  (entero positivo) para los cuales es convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^n - (1-x)^n}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** a) Claramente  $z = 1$  no es solución de la ecuación. Para  $z \neq 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n = 1 &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ \Leftrightarrow 1+z &= e^{\frac{2k\pi}{n}i} - ze^{\frac{2k\pi}{n}i} \Leftrightarrow z(1+e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = e^{\frac{2k\pi}{n}i} - 1 \Leftrightarrow z = \frac{e^{\frac{2k\pi}{n}i} - 1}{e^{\frac{2k\pi}{n}i} + 1}. \end{aligned}$$

Si  $e^{\frac{2k\pi}{n}i} = 1$  ( es decir, si  $n = 2k$  ) no está definido  $z$ . Multiplicando y dividiendo por  $e^{-\frac{k\pi}{n}i}$  obtenemos las soluciones de la ecuación:

$$z_k = \frac{e^{\frac{2k\pi}{n}i} - 1}{e^{\frac{2k\pi}{n}i} + 1} = \frac{e^{\frac{k\pi}{n}i} - e^{-\frac{k\pi}{n}i}}{e^{\frac{k\pi}{n}i} + e^{-\frac{k\pi}{n}i}} = i \tan \frac{k\pi}{n},$$

para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  y  $2k \neq n$ , es decir tenemos  $n$  raíces si  $n$  es impar y  $n - 1$  raíces si  $n$  es par.

b) Veamos que  $z_0 = 0$  es singularidad evitable

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(1+z)^n - (1-z)^n} = \frac{z}{1+nz+p(z) - (1-nz+q(z))} \\ &= \frac{z}{2nz+p(z)-q(z)} = \frac{1}{2n+(p(z)-q(z))/z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

El límite es finito y por tanto la singularidad es evitable. Veamos que las otras raíces son polos simples.

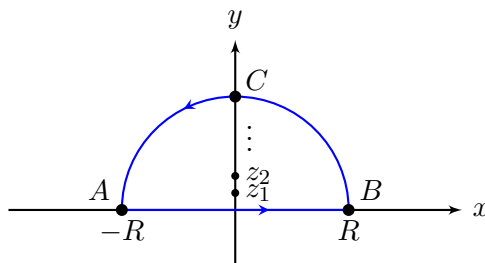
$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_k} f(z)(z - z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z}{(1+z)^n - (1-z)^n} \cdot (z - z_k) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z(z - z_k)}{(z - z_0) \dots (z - z_k) \dots (z - z_n)} = \frac{z_k}{(z_k - z_0) \dots (z_k - z_n)} \neq 0. \end{aligned}$$

El límite es no nulo pues todas las raíces son distintas y estamos en el caso  $z_k \neq 0$ .

c) Para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  tenemos:

$$f(-x) = \frac{-x}{(1-x)^n - (1+x)^n} = \frac{x}{(1+x)^n - (1-x)^n} = f(x).$$

Es decir,  $f$  es función par. Por otra parte  $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$  es impropia en  $+\infty$  y no es impropia en 0. Por un conocido teorema, la integral  $I$  será convergente sii el grado del denominador es mayor o igual que 3. Es decir,  $I$  es convergente sii  $n \geq 3$  y además  $I = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ . Consideremos ahora las curvas  $\gamma \equiv ABCA$  y  $\Gamma \equiv BCA$  de la figura.



La singularidad  $z_k = i \tan(k\pi/n)$  está en el semiplano  $y > 0$  sii  $0 < k\pi/n < \pi/2$ , o bien sii  $0 < k < n/2$ . Para  $R$  suficientemente grande podemos escribir:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad [*]$$

Hallaremos pues los residuos en los polos simples  $z_k$  con  $0 < k < n/2$  (recuérdese que  $z_0 = 0$  es singularidad evitable).

$$\begin{aligned} \forall k : 0 < k < n/2 \Rightarrow \text{Res}(f, z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z(z - z_k)}{(1+z)^n - (1-z)^n} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{2z - z_k}{n(1+z)^{n-1} + n(1-z)^{n-1}} = \frac{z_k}{n(1+z_k)^{n-1} + n(1-z_k)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Como  $z_k$  cumple  $(1+z_k)^n = (1-z_k)^n$ , tenemos  $(1+z_k)^{n-1} = (1-z_k)^n / (1+z_k)$  y por tanto:

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{z_k}{n \left( \frac{(1-z_k)^n}{1+z_k} + (1-z_k)^{n-1} \right)} = \frac{z_k(1+z_k)}{2n(1-z_k)^{n-1}}.$$

Simplifiquemos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} 1 - z_k &= 1 - i \tan \frac{k\pi}{n} = 1 - \frac{e^{\frac{k\pi}{n}i} - e^{-\frac{k\pi}{n}i}}{e^{\frac{k\pi}{n}i} + e^{-\frac{k\pi}{n}i}} = \frac{2e^{\frac{k\pi}{n}i}}{2 \cos \frac{k\pi}{n}} = \frac{e^{-\frac{k\pi}{n}i}}{\cos \frac{k\pi}{n}}, \\ 1 + z_k &= 1 + i \tan \frac{k\pi}{n} = 1 + \frac{e^{\frac{k\pi}{n}i} - e^{-\frac{k\pi}{n}i}}{e^{\frac{k\pi}{n}i} + e^{-\frac{k\pi}{n}i}} = \frac{2e^{\frac{k\pi}{n}i}}{2 \cos \frac{k\pi}{n}} = \frac{e^{\frac{k\pi}{n}i}}{\cos \frac{k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_k) &= \frac{z_k e^{\frac{k\pi}{n}i} \cos^{n-1}(k\pi/n)}{2n \cos(k\pi/n) (e^{-\frac{k\pi}{n}i})^{n-1}} = \frac{z_k}{2n} \cos^{n-2}(k\pi/n) e^{(\frac{k\pi}{n} + \frac{k(n-1)\pi}{n})i} \\ &= \frac{z_k}{2n} \cos^{n-2}(k\pi/n) e^{k\pi i} = \frac{(-1)^k z_k \cos^{n-2}(k\pi/n)}{2n}. \end{aligned}$$

Tomando límites en la igualdad [\*] cuando  $R \rightarrow +\infty$  y aplicando una conocida propiedad (Lema de Jordan):

$$2\pi i \sum_{0 < k < n/2} \text{Res}(f, z_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + 0.$$

De forma equivalente:

$$2\pi i \sum_{0 < k < n/2} \frac{(-1)^k i \left(\tan \frac{k\pi}{n}\right) \left(\cos \frac{k\pi}{n}\right)^{n-2}}{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{n} \sum_{0 < k < n/2} (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n}\right)^{n-3} = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

La integral pedida es por tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^n - (1-x)^n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{0 < k < n/2} (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n}\right)^{n-3}.$$

### 14.38. Una aplicación de las desigualdades de Cauchy

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una función entera (holomorfa en todo el plano complejo), tal que  $a_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$  y además satisface la desigualdad  $|f(x)| \leq x$  para todo  $x \geq 0$ . Se pide:

- (a) Calcular  $f(0)$  y  $f(1)$ .
- (b) Demostrar que  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- (c) Demostrar que  $f(z) = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Indicación: utilizar las desigualdades de Cauchy para las derivadas de  $f$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Tenemos  $|f(0)| \leq |0| = 0$ , lo cual implica  $f(0) = 0$ . Además,  $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ .

(b) Expresando en forma exponencial  $z = \rho e^{i\theta}$  :

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\rho e^{i\theta})^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n |e^{in\theta}| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = f(\rho).$$

De  $0 \leq |f(z)| \leq f(\rho)$  deducimos  $f(\rho) = |f(\rho)|$ , y de  $\rho \geq 0$  y  $|f(x)| \leq x \ \forall x \geq 0$  :

$$|f(z)| \leq f(\rho) \leq \rho = |z|.$$

Es decir,  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

(c) Recordamos el teorema de las desigualdades de Cauchy: Si  $f(z)$  es holomorfa en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y  $|f(z)| \leq M$  en la circunferencia  $|z - a| = r$  contenida en  $\Omega$ , entonces

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En nuestro caso, dado que  $f(z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  y que  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  tenemos para todo  $r > 0$

$$|a_n n!| = \left| f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{n!r}{r^n} = \frac{n!}{r^{n-1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Es decir,  $0 \leq |a_n| \leq 1/r^{n-1}$ . Para  $n \geq 2$  y tomando límites cuando  $r \rightarrow +\infty$  obtenemos  $0 \leq |a_n| \leq 0$ . Por tanto,  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ . Como  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ , concluimos que  $f(z) = z$ .

### 14.39. Un problema de Dirichlet

Se considera una función compleja  $f(z)$  holomorfa en el semiplano  $\text{Im } z \geq 0$  y tal que  $|z|^p |f(z)| \leq M$  en dicho semiplano con  $p > 0$ ,  $M > 0$  constantes. Se pide:

(a) Para cada  $z_0 \in \mathbb{C} : \text{Im } z_0 < 0$  calcular la integral compleja curvilínea

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} dz.$$

siendo  $\Gamma_R$  el circuito formado por la circunferencia  $z(t) = Re^{it}$  con  $t \in [0, \pi]$  y el segmento rectilíneo  $[-R, R]$ , recorrido en sentido positivo.

(b) Si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  con  $y > 0$ , calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t, 0)}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

(c) Aplicando el apartado anterior a la función  $f(z) = 1/(z + i)$ , resolver el siguiente problema de Dirichlet en el semiplano  $y > 0$ : Hallar una función  $u(x, y)$  con  $y > 0$  tal que  $\Delta u = 0$ ,  $u(x, 0) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).



**Solución.** (a) La función  $f(z)/(z-\bar{z}_0)$  es holomorfa en el interior geométrico de  $\Gamma_R$ . Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)} dz &= \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{f(z)}{z-\bar{z}_0}}{(z-z_0)} dz \\ &= 2\pi i \frac{f(z_0)}{z_0-\bar{z}_0} = \frac{2\pi i f(z_0)}{2i \operatorname{Im} z_0} = \frac{\pi f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}. \end{aligned}$$

(b) Llamando  $\Gamma$  a la parte del circuito formado por la semicircunferencia:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)} = \int_{-R}^R \frac{u(t,0) + iv(t,0)}{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} dt + \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}. \quad (1)$$

En  $|z| = R$  y teniendo en cuenta las hipótesis de acotación dadas:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)} \right| &= \frac{|f(z)|}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|} \leq \frac{|f(z)|}{||z|-|z_0|| \cdot ||z| - |\bar{z}_0||} \\ &= \frac{|f(z)|}{(z-z_0)(R^2-|z_0|^2)} \leq \frac{M/|z|^p}{(R^2-|z_0|^2)} = \frac{M}{R^p(R^2-|z_0|^2)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)} \right| \leq \frac{M\pi R}{R^p(R^2-|z_0|^2)} \rightarrow 0 \text{ (si } R \rightarrow +\infty),$$

lo cual implica que la integral a lo largo de  $\Gamma$  tiende a 0 cuando  $R \rightarrow +\infty$ . Tomando límites en (1) cuando  $R \rightarrow +\infty$  y usando que  $(t-z_0)(t-\bar{z}_0) = (t-x_0)^2 + y_0^2$ :

$$\frac{\pi f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t,0) dt}{(t-x_0)^2 + y_0^2} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t,0) dt}{(t-x_0)^2 + y_0^2} dt \quad (2)$$

(en el supuesto de que las integrales sean convergente). Tomando partes reales en (2) y denotando  $x_0, y_0$  por  $x, y$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t,0) dt}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{\pi \operatorname{Re} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}.$$

(c) La función  $f(z) = 1/(z+i)$  es holomorfa en  $\operatorname{Im} z \geq 0$ . Podemos expresar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+i} = \frac{1}{x+(y+1)i} = \frac{x-(y+1)i}{x^2+y^2+2y+1} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2+2y+1} + i \frac{-(y+1)}{x^2+y^2+2y+1} = u(x,y) + iv(x,y). \end{aligned}$$

Al ser  $f(z)$  holomorfa para  $y > 0$ ,  $u(x,y)$  es armónica en  $y > 0$ , es decir  $\Delta u = 0$ . Además,  $u(x,0) = x/(x^2+1)$ .

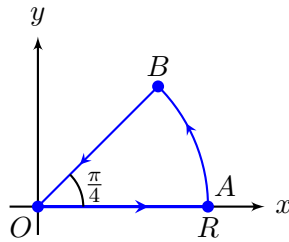
### 14.40. Integrales de Fresnel

Se sabe que las integrales de Fresnel:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 dx,$$

son convergentes. Calcular su valor. Indicación: usar la integral de Euler, es decir  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

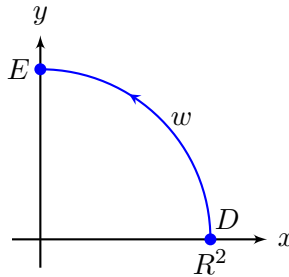
**Solución.** Consideremos la función  $f(z) = e^{iz^2}$  y el contorno  $\gamma \equiv OABO$  de la figura:



Tenemos

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz. \quad (1)$$

Se verifica  $\int_{\gamma} e^{iz^2} dz = 0$  pues la función  $f(z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ . Veamos que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} e^{iz^2} dz = 0$ . Haciendo el cambio  $w = z^2$ , obtenemos  $dz = \frac{dw}{2\sqrt{w}}$  y el arco  $AB$  se transforma en el  $DE$ :



Por tanto,  $\int_{AB} e^{iz^2} dz = \int_{DE} \frac{e^{iw}}{2\sqrt{w}} dw$ . Por otra parte y para  $|z| = R$ :

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{w}} \right| = \frac{1}{2(R^2)^{1/2}} = \frac{1/2}{(R^2)^{1/2}} = \frac{1/2}{(R^2)^k} \quad (k = 1/2 > 0).$$

Por un conocido lema de acotación:

$$\lim_{R^2 \rightarrow +\infty} \int_{DE} \frac{e^{iz^2}}{2\sqrt{w}} dw = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} e^{iz^2} dz = 0.$$

Hallemos ahora  $\int_{BO} e^{iz^2} dz$ . Los puntos del segmento  $BO$  son de la forma  $z = \rho e^{\pi i/4}$  con  $\rho \in [0, R]$ , en consecuencia:

$$\int_{BO} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{i\rho^2 e^{\pi i/2}} e^{\pi i/4} d\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho.$$

Tomando límites en la igualdad (1) y usando que  $\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{\pi}/2$  :

$$0 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{+\infty} \sen x^2 dx - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Igualando partes real e imaginaria:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sen x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

### 14.41. Límite de promedios en un polígono regular

(a) Siendo  $n$  un entero positivo, determinar la expresión de la suma

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

(b) Se considera un polígono regular de  $n$  lados inscrito en una circunferencia de radio 1. Determinar el promedio de las distancias de un vértice fijo del polígono a los vértices restantes. Calcular el valor límite de esos promedios cuando el número de lados crece indefinidamente.

(c) Determinar el valor de la integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - e^{it}| dt.$$

Justificar la relación del resultado obtenido con el resultado del apartado anterior.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Vamos a denotar  $S_2 = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ . De manera análoga denotamos  $S_1 = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ . Obtenemos para  $e^{ix} - 1 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} S_1 + S_2i &= e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = \frac{e^{ix}(e^{inx} - 1)}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{ix} \cdot \frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} = e^{ix} \cdot \frac{2i \sin \frac{nx}{2}}{2i \sin \frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{i(n-1)x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{(n+1)x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left( \cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x \right). \end{aligned}$$

Igualando partes imaginarias, obtenemos la suma pedida

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Nota: la relación  $e^{ix} - 1 = 0$  es equivalente a  $x = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . En este caso, la suma pedida es claramente igual a 0. (b) Sabemos que las raíces enésimas de un número complejo corresponden a los vértices de un polígono regular de  $n$  lados. Podemos suponer entonces que los vértices son los afijos de las raíces enésimas de la unidad. Es decir, los vértices del polígono son  $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$  con  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Tomando como referencia el vértice  $w_0 = 1$ , la media aritmética de las distancias del vértice  $w_0$  a los restantes vértices  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  vendrá dado por

$$p_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |1 - w_k|}{n-1}.$$

Hallemos previamente  $|1 - e^{i\alpha}|$  siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$|1 - e^{i\alpha}|^2 = |1 - \cos \alpha + i \sin \alpha|^2 = 1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sin(\alpha/2) &= \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2} \Rightarrow \sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2 \\ \Rightarrow |1 - e^{i\alpha}| &= \sqrt{4 \sin^2(\alpha/2)} = 2 |\sin(\alpha/2)|. \end{aligned}$$

Como consecuencia,  $|1 - w_k| = |1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$ . Simplifiquemos  $p_n$

$$p_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \quad (\text{pues } 0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{n-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n-1}{2} \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2} \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} \quad (\text{apartado (a)}) \\
 &= \frac{2}{n-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n-1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n}.
 \end{aligned}$$

Para hallar este límite consideremos la función auxiliar  $f(x) = \frac{2}{x-1} \cot \frac{\pi}{2x}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cot \frac{\pi}{2x}}{x-1} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ +\infty \end{array} \right\} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2x}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} \quad (\text{L'Hopital}) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2x}\right)} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2x}\right)} \quad (u = \pi x/2) \\
 &= \frac{4}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u}{\sin u}\right)^2 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{\pi}.
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - e^{it}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 |\sin(t/2)| dt \quad (\text{por el apartado (b)}) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt \quad (\text{pues } 0 \leq t/2 \leq \pi) = \frac{1}{\pi} [-2 \cos(t/2)]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} (-2)(-1 - 1) = \frac{4}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Analicemos la coincidencia de estos dos resultados. Para ello particionamos el intervalo  $[0, 2\pi]$  en  $n$  subintervalos. La longitud de cada uno de estos es  $2\pi/n$ . La partición correspondiente es por tanto

$$0 < 1 \cdot \frac{2\pi}{n} < 2 \cdot \frac{2\pi}{n} < \dots < (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} < n \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Como consecuencia de un conocido teorema para la integral de Riemann de una función continua:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - e^{it}| dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left| 1 - e^{\frac{2k\pi}{n} i} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n.$$

## 14.42. Fórmula integral de Cauchy y matriz exponencial

La fórmula integral de Cauchy se puede generalizar a matrices de la siguiente manera

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(zI - M)^{-1} dz,$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia  $|z| = r$ ,  $I$  es la matriz identidad y todos los autovalores de  $zI - M$  están en el interior de  $\gamma$ .

(a) Calcular las integrales complejas

$$I_1(t) = \int_{|z|=r} \frac{ze^z dz}{z^2 + t^2}, \quad I_2(t) = \int_{|z|=r} \frac{te^z dz}{z^2 + t^2} \quad (t \in \mathbb{R}, |t| < r).$$

(b) Si  $A$  es la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , calcular  $f(tA) = e^{tA}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Hallemos  $I_1(t)$ , Si  $t \neq 0$ , las singularidades son  $z = \pm ti$  (polos simples). Los residuos en estos polos son

$$\text{Res}[f, ti] = \lim_{z \rightarrow ti} \frac{ze^z(z - ti)}{(z - ti)(z + ti)} = \frac{tie^{ti}}{2ti} = \frac{e^{ti}}{2},$$

$$\text{Res}[f, -ti] = \lim_{z \rightarrow -ti} \frac{ze^z(z + ti)}{(z - ti)(z + ti)} = \frac{-tie^{-ti}}{-2ti} = \frac{e^{-ti}}{2}.$$

Aplicando el teorema de los residuos de Cauchy

$$I_1(t) = 2\pi i \left( \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2} \right) = 2\pi i \cos t. \quad (1)$$

Si  $t = 0$ , tenemos  $I_1(0) = \int_{|z|=r} e^z dz/z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$  (fórmula integral de Cauchy), por tanto también es válida la igualdad (1) en este caso. Procedemos de manera análoga para  $I_2(t)$ :

$$\text{Res}[f, ti] = \lim_{z \rightarrow ti} \frac{te^z}{z + ti} = \frac{te^{ti}}{2ti} = \frac{e^{ti}}{2i},$$

$$\text{Res}[f, -ti] = \lim_{z \rightarrow -ti} \frac{te^z}{z - ti} = \frac{-te^{-ti}}{-2ti} = -\frac{e^{-ti}}{2i},$$

$$I_2(t) = 2\pi i \left( \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} \right) = 2\pi i \sin t. \quad (2)$$

Si  $t = 0$ , tenemos trivialmente  $I_2(0) = 0$ , por tanto también es válida la igualdad (2) en este caso.

(b) Llamando  $M = tA$  :

$$zI - M = zI - tA = \begin{bmatrix} z - 2t & -5t \\ t & z + 2t \end{bmatrix},$$

$$(zI - M)^{-1} = \frac{1}{z^2 + t^2} \begin{bmatrix} z + 2t & 5t \\ -t & z - 2t \end{bmatrix}.$$

Usando los resultados del apartado anterior

$$e^{tA} = f(tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + t^2} \begin{bmatrix} z + 2t & 5t \\ -t & z - 2t \end{bmatrix} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} 2\pi i \cos t + 4\pi i \sin t & 10\pi i \sin t \\ -2\pi i \sin t & 2\pi i \cos t - 4\pi i \sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t & 5 \sin t \\ -\sin t & 2 \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix}.$$

### 14.43. Polinomio de Lagrange-Sylvester, representación integral

a) Comprobar que cualquiera que sea la función  $f(z)$  holomorfa en los puntos de  $\Gamma$  y en su interior, la función definida mediante

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot \frac{p(\xi) - p(z)}{\xi - z} d\xi$$

es un polinomio en  $z$  cuyo grado se determinará.

(b) Supóngase que  $a$  es un cero del polinomio  $p(z)$ . Determinar el valor de la función  $\varphi(z)$  en  $a$ .

(c) Supóngase que  $a$  es un cero del polinomio  $p(z)$  de multiplicidad  $\nu$ . Determinar los valores que toman en el punto  $a$  las funciones derivadas  $\varphi^{(k)}$  para  $k = 1, 2, \dots, \nu - 1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Sea  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , entonces podemos expresar  $p(\xi) - p(z)$  en la forma  $a_n(\xi^n - z^n) + \dots + a_1(\xi - z)$ . Por otra parte:

$$\xi^k - z^k = (\xi - z)(\xi^{k-1} + \xi^{k-2}z + \dots + \xi z^{k-2} + z^{k-1})$$

con lo cual obtenemos la igualdad:

$$p(\xi) - p(z) = (\xi - z)(b_{n-1}(\xi)z^{n-1} + \dots + b_0(\xi)) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)z^k$$

siendo  $b_k(\xi)$  polinomios en  $\xi$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Podemos por tanto expresar:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)z^k d\xi = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot b_k(\xi) d\xi \right) z^k.$$

Es decir,  $\varphi(z)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n-1$ .

(b) Usando que  $p(a) = 0$  y la fórmula integral de Cauchy:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot \frac{p(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(a).$$

(c) Podemos expresar la función  $\varphi(z)$  de la siguiente manera:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} p(z) \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

Usando de nuevo la fórmula integral de Cauchy con  $z$  en el interior de  $\Gamma$ :

$$\varphi(z) = f(z) - p(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{p(\xi)} \cdot \frac{1}{\xi - z} d\xi \right) = f(z) - p(z)g(z).$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad  $\varphi(z) = f(z) - p(z)g(z)$ . Usando la regla de Newton-Leibniz para la derivada  $k$ -ésima de un producto:

$$\varphi^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^{(k-j)}(z) g^{(j)}(z). \quad (1)$$

Como  $a$  es un cero de multiplicidad  $\nu$  del polinomio  $p(z)$ , se verifica

$$p(a) = p'(a) = \dots = p^{(\nu-1)}(a) = 0.$$

Usando (1) deducimos  $\varphi^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  para todo  $k = 1, 2, \dots, \nu-1$ .



### 14.44. Transformado de un polinomio complejo

Para cada polinomio complejo  $p(z)$  se define el nuevo polinomio  $p^*(z) = \overline{p(-\bar{z})}$  en donde  $\bar{z}$  es el conjugado de  $z$ .

1) Si  $p(z)$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$ , expresar las raíces de  $p^*(z)$  en términos de las raíces de  $p(z)$ .

2) Sea  $p(z) = 1 + z$ . Determinar la región del plano complejo en el que se transforma el semiplano  $\operatorname{Re}(z) > 0$  mediante la transformación  $w = \frac{p^*(z)}{p(z)}$ .

3) Sea  $p(z)$  un polinomio complejo de grado  $n \geq 1$  que satisface las dos condiciones siguientes:

a) La imagen del semiplano  $\operatorname{Re}(z) > 0$  bajo la transformación  $w = \frac{p^*(z)}{p(z)}$  está contenida en el círculo unidad  $|w| < 1$ .

b)  $p(z)$  y  $p^*(z)$  no tienen raíces comunes.

Determinar la parte real de las raíces de  $p(z)$ .

4) Sea  $p(z)$  un polinomio complejo de grado  $n \geq 1$  cuyas raíces  $z_1, z_2, \dots, z_n$  satisfacen  $\operatorname{Re}(z_k) < 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Decidir razonadamente si la siguiente implicación es verdadera o falsa:

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow |p(z)| > |p^*(z)|.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1) Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $w_0 = -\bar{z}_0$ . Aplicando conocidas propiedades de la conjugación queda  $z_0 = -\bar{w}_0$ . Entonces,

$$p(z_0) = 0 \Leftrightarrow \overline{p(z_0)} = 0 \Leftrightarrow \overline{p(-\bar{w}_0)} = 0 \Leftrightarrow p^*(w_0) = 0.$$

Es decir,  $z_0$  es raíz de  $p$  si y sólo si  $-\bar{z}_0$  es raíz de  $p^*$ .

2) Hallemos la expresión de  $w$  :

$$w = \frac{p^*(z)}{p(z)} = \frac{\overline{1 + (-\bar{z})}}{1 + z} = \frac{1 + \overline{-\bar{z}}}{1 + z} = \frac{1 - z}{1 + z}. \quad (1)$$

El módulo de  $w$  es:

$$|w| = w\bar{w} = \frac{1 - z}{1 + z} \frac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}} = \frac{1 - z - \bar{z} + z\bar{z}}{1 + z + \bar{z} + z\bar{z}} = \frac{1 - 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2}{1 + 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2} < 1.$$

Es decir,  $w$  pertenece al disco abierto unidad  $D$ . Veamos ahora que todo  $w \in D$  es el transformado de algún  $z$  con parte real mayor que 0. Efectivamente, sea  $w$  tal que  $|w| < 1$ . Despejando en (1) obtenemos  $z = (1 - w)/(1 + w)$ . Entonces:

$$2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z} = \frac{1 - w}{1 + w} + \frac{1 - \bar{w}}{1 + \bar{w}} = \frac{2(1 - |w|^2)}{1 + 2\operatorname{Re}(w) + |w|^2}.$$

Dado que  $|w| < 1$ , el numerador es positivo. Veamos que también lo es el denominador. Efectivamente, si  $w = u + iv$ :

$$1 + 2\operatorname{Re}(w) + |w|^2 = 1 + 2u + u^2 + v^2 = (u + 1)^2 + v^2 > 0 \quad (\text{si } w \neq -1).$$

Por tanto, si  $|w| < 1$  entonces  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Concluimos que la región transformada de  $\operatorname{Re}(z) > 0$  es  $|w| < 1$ .

3) Si  $z_0$  es raíz de  $p(z)$ , entonces por b) ocurre  $p(z_0) = 0$  y  $p^*(z_0) \neq 0$ . Veamos que no puede ocurrir  $\operatorname{Re}(z_0) > 0$ . En efecto, si fuera así entonces la función  $|w| = |p^*(z)/p(z)|$  no estaría acotada (en contradicción con la hipótesis  $|w| < 1$ ). Ha de ser por tanto  $\operatorname{Re}(z_0) \leq 0$ . Ahora bien, si  $z_0$  es raíz de  $p(z)$ , entonces  $z_0 \neq -\bar{z}_0$  (apartado 1)). Esto equivale a  $2\operatorname{Re}(z_0) = z_0 + \bar{z}_0 \neq 0$ . Ha de ser pues  $\operatorname{Re}(z_0) < 0$ .

4) Si  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ , por el apartado 1) las raíces de  $p^*(x)$  son  $-\bar{z}_k$  con  $k = 1, \dots, n$ . Podemos por tanto expresar:

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{k=n} (z - z_k), \quad p^*(z) = (-1)^n \bar{a}_n \prod_{k=1}^{k=n} (z + \bar{z}_k). \quad (2)$$

Si  $z = x + iy$  y  $z_k = x_k + iy_k$ , se verifica:

$$|z - z_k|^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2, \quad |z + \bar{z}_k|^2 = (x + x_k)^2 + (y - y_k)^2.$$

Entonces,

$$|z + \bar{z}_k|^2 < |z - z_k|^2 \Leftrightarrow (x + x_k)^2 < (x - x_k)^2 \Leftrightarrow 2xx_k < -2xx_k \Leftrightarrow 4xx_k < 0.$$

Por hipótesis  $x < 0$  y  $x_k < 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$  lo cual implica que la última desigualdad es cierta. Se verifica por tanto  $|z + \bar{z}_k| < |z - z_k|$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Tomando módulos en (2) deducimos  $|p(z)| > |p^*(z)|$ , es decir la implicación propuesta es verdadera.

### 14.45. Área de una imagen del círculo unidad

1. Se considera en el plano complejo una curva de Jordan  $\Gamma$  con orientación positiva. Expresar el área de la región interior a dicha curva en términos de la integral compleja curvilínea  $\int_{\Gamma} \bar{w} dw$ .

2. Calcular el área de la imagen del círculo unidad  $|z| \leq 1$  bajo la transformación  $w = z(z - \frac{1}{2}z)$ .

3. Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  una función holomorfa e inyectiva del plano complejo que contiene al círculo unidad. Expresar el área de la imagen bajo  $f$  del círculo unidad en términos de los coeficientes  $c_n$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** 1. Sea  $A$  el área pedida y  $w = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ . Usando el teorema de Green en el plano y la conocida fórmula del área en términos de una integral curvilínea:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{w} dw &= \int_{\Gamma} (x - iy)(dx + i dy) = \int_{\Gamma} x dx + y dy + i \int_{\Gamma} x dy - y dx \\ &= 0 + 2Ai = 2Ai \Rightarrow A = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \bar{w} dw \Rightarrow A = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \bar{w} dw. \end{aligned}$$

2. Llamando  $A_1$  al área pedida y usando el apartado anterior

$$A_1 = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \bar{w} dw = -\frac{i}{2} \int_{|z|=1} \left( \bar{z} - \frac{1}{2} \bar{z}^2 \right) (1 - z) dz$$

Efectuando la substitución  $w = e^{i\theta}$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left( e^{-i\theta} - \frac{1}{2} e^{-2i\theta} \right) (1 - e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-i\theta} - e^{i\theta} + \frac{1}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Llamando  $A_2$  al área pedida y usando el primer apartado

$$A_2 = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \bar{w} dw = -\frac{i}{2} \int_{|z|=1} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{c}_n \bar{z}^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n z^{n-1} \right) dz.$$

Efectuando la substitución  $w = e^{i\theta}$  :

$$A_2 = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{c}_n e^{-in\theta} \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n e^{(n-1)i} \right) i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{c}_n e^{-in\theta} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n e^{in\theta} \right) d\theta.$$

Usando que  $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = 0$  si  $p \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , que  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$  y el conocido teorema sobre la convergencia uniforme de las series de potencias:

$$A_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} n |c_n|^2 d\theta = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n |c_n|^2.$$

## 14.46. Relación entre dos integrales por residuos

Para cada entero positivo  $n$  se considera la función racional

$$f_n(z) = \frac{(1+z^2)^{n-1}}{1+z^{2n}}.$$

- (a) Calcular los residuos de  $f_n$  en sus puntos singulares.  
 (b) Empleando la fórmula de los residuos de Cauchy, deducir el valor de las integrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

- (c) Aplicar el resultado anterior al cálculo de las integrales

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Igualando el denominador a 0, obtenemos los puntos singulares de  $f_n$ :

$$1 + z^{2n} \Leftrightarrow z = \sqrt[2n]{-1} \Leftrightarrow z = \sqrt[2n]{\exp\{\pi i\}} \Leftrightarrow z = \exp\left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}i\right\}$$

$$(k = 0, 1, \dots, 2n - 1).$$

Es decir,  $z_k = \exp\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n}i\right\}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ). Estas singularidades son o bien polos simples o bien singularidades evitables (si  $z_k = \pm i$ ). Para cada polo simple, su residuo es  $\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} f(z)(z - z_k)$  que presenta la indeterminación  $0/0$ . Aplicando a regla de L'Hopital:

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(1+z^2)^{n-1}(z - z_k)}{1+z^{2n}}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{((1+z^2)^{n-1})'(z-z_k) + (1+z^2)^{n-1}}{2nz^{2n-1}} = \frac{(1+z_k^2)^{n-1}}{2nz_k^{2n-1}}. \quad (1)$$

Obsérvese que si  $z_k = \pm i$  los residuos han de ser cero por ser singulares evitables, pero dado que  $2n(\pm i)^{2n-1} \neq 0$ , vale también la expresión (1) en estos casos. Podemos expresar estos residuos de otra manera:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_k) &= \frac{(1 + \exp\{\frac{2k+1}{n}\pi i\})^{n-1}}{2n \exp\{\frac{2k+1}{2n}(2n-1)\pi i\}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{(1 + \exp\{\frac{2k+1}{n}\pi i\})^{n-1}}{\exp\{\frac{2k+1}{2n}(n+n-1)\pi i\}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{(1 + \exp\{\frac{2k+1}{n}\pi i\})^{n-1}}{\exp\{\frac{2k+1}{2}\pi i\}(\exp\{\frac{2k+1}{2n}\pi i\})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{(\exp\{-\frac{2k+1}{2n}\pi i\} + \exp\{\frac{2k+1}{2n}\pi i\})^{n-1}}{\exp\{k\pi i + \frac{\pi}{2}i\}} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{(2 \cos \frac{2k+1}{2n}\pi)^{n-1}}{\exp\{k\pi i\} \exp\{\frac{\pi}{2}i\}} = \frac{1}{2n} \frac{2^{n-1} \cos^{n-1} \frac{2k+1}{2n}\pi}{(-1)^k i}. \end{aligned}$$

En consecuencia, los residuos son:

$$\text{Res}(f, z_k) = (-1)^{k+1} i \frac{2^{n-2}}{n} \cos^{n-1} \frac{2k+1}{2n}\pi.$$

(b) Elegimos la curva cerrada estándar  $C$  para éstos casos, es decir la unión del segmento  $[-R, R]$  y la semicircunferencia superior  $\Gamma$  de centro el origen y radio  $R$ , recorriéndose  $C$  en sentido antihorario. Tenemos:

$$\int_C f_n(z) dz = \int_{-R}^R f_n(x) dx + \int_{\Gamma} f_n(z) dz. \quad (2)$$

La diferencia de grados entre el denominador y el denominador de la función racional par  $f_n(x)$  es  $2n - (2n - 2) = 2$ , lo cual implica que la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$  es convergente y por tanto coincide con el valor principal de Cauchy. Tomando límites en (2) cuando  $R \rightarrow +\infty$ :

$$\int_C f_n(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz. \quad (3)$$

Las singularidades en el interior geométrico de  $C$  corresponden a los valores de  $k$  tales que  $0 < (2k+1)\pi/2n < \pi$  o de forma equivalente, para  $0 <$

$2k+1 < 2n$ . Es decir, para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Claramente no existen puntos singulares en el eje  $OX$ . Por tanto:

$$\int_C f_n(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{2^{n-1}\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^{n-1} \frac{2k+1}{2n} \pi.$$

Por un conocido lema de Jordan, el límite que aparece en (3) es igual a 0, con lo cual:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{2^n \pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^{n-1} \frac{2k+1}{2n} \pi.$$

(c) Efectuando el cambio de variable  $t = 1/x$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_{+\infty}^1 \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{n-1} - 1}{1 + \frac{1}{t^{2n}}} \frac{-1}{t^2} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{(1+t^2)^{n-1}}{1+t^{2n}} dt = \int_1^{+\infty} f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx + \int_1^{+\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^1 f_n(x) dx.$$

De esto deducimos  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ , y ésta última integral ya está calculada.

### 14.47. Una integral trigonométrica en $[0, \pi]$

Se considera la función compleja definida por

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k z^k.$$

(a) Obtener la expresión de la integral  $\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$  en términos de los coeficientes  $c_k$  de la función  $f$ .

(b) Aplicar el resultado anterior al cálculo de las integrales

$$\int_0^\pi \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Desarrollando  $|f(e^{i\theta})|^2$  :

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta})|^2 &= f(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} = \left( \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ik\theta} \right) \left( \sum_{l=-n}^{+n} \bar{c}_l e^{-il\theta} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 + \sum_{k \neq l} c_k \bar{c}_l e^{i(k-l)\theta}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta = \left[ \frac{e^{i(k-l)\theta}}{i(k-l)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(k-l)} (e^{2(k-l)\pi} - e^0) = 0.$$

En consecuencia

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2.$$

(b) Como la función integrando es par y periódica de periodo  $2\pi$ , podemos escribir

$$\int_0^\pi \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta.$$

Vamos a transformar la función integrando:

$$\frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{2ni\theta} - e^{-2in\theta})}{\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \frac{e^{4ni\theta} - 1}{e^{(2n+1)i\theta} - e^{(2n-1)i\theta}} = \frac{e^{4ni\theta} - 1}{e^{(2n-1)i\theta}(e^{2i\theta} - 1)}.$$

Consideremos ahora la función

$$f(z) = \frac{z^{4n} - 1}{z^{2n-1}(z^2 - 1)} = \frac{1}{z^{2n-1}} \frac{(z^2)^{2n} - 1}{z^2 - 1}.$$

Dado que  $y^{2n} - 1 = (y - 1)(y^{2n-1} + y^{2n-2} + \dots + y + 1)$ , llamando  $y = z^2$  :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^{2n-1}} ((z^2)^{2n-1} + (z^2)^{2n-2} + \dots + z^2 + 1) \\ &= \frac{1}{z^{2n-1}} (z^{4n-2} + z^{4n-4} + \dots + z^2 + 1) \\ &= z^{2n-1} + z^{2n-3} + \dots + z^{-2n+3} + z^{-2n+1} = \sum_{n=-(2n-1)}^{2n-1} c_k z^k. \end{aligned}$$

en donde los coeficientes  $c_k$  son o bien 1, o bien 0. Entonces

$$\int_0^\pi \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Usando el apartado (a) obtenemos

$$\int_0^\pi \left( \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} |c_k|^2 = 2\pi n,$$

pues existen  $2n$  coeficientes entre los  $c_k$  que valen 1 y el resto son nulos.

### 14.48. Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{1-2a \cos t+a^2} dt$

Calcular la integral

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{1-2a \cos t+a^2} dt$$

para todos los posibles valores del parámetro real  $a$ .

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Veamos para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$  la integral  $(a)$  es convergente. Dado que el intervalo de integración está acotado, la integral sólo puede ser divergente si la función integrando tiene puntos de discontinuidad infinita. Igualando el denominador a 0 y resolviendo en  $a$  :

$$a = \frac{2 \cos t \pm \sqrt{4 \sin^2 t - 4}}{2} = \frac{2 \cos t \pm i \sin t}{2} = \cos t \pm i \sin t.$$

Dado que  $a$  es real, ha de ser  $\sin t = 0$  en  $[0, 2\pi]$ , es decir  $t = 0, t = \pi$  o  $t = 2\pi$ . Por tanto la integral sólo puede ser divergente para  $a = 1$  o  $a = -1$ . Si  $a = 1$ , el integrando tiene discontinuidades infinitas en 0 y  $2\pi$ . Tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{\cos 3t}{2-2 \cos t} : \frac{1}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \cos 3t}{2-2 \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \cos 3t}{2(t^2/2)} = 1 \neq 0.$$

Por un conocido criterio de convergencia, la integral es divergente. Si  $a = -1$ , el integrando presenta un punto de discontinuidad infinita en  $t = \pi$ . Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \left( \frac{\cos 3t}{2+2 \cos t} : \frac{1}{(t-\pi)^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{(t-\pi)^2 \cos 3t}{2+2 \cos t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \cos 3(u+\pi)}{2+2 \cos(u+\pi)}$$



$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \cos 3(u + \pi)}{2 - 2 \cos u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \cos 3(u + \pi)}{2(u^2/2)} = -1 \neq 0$$

y la integral es también divergente en este caso. Por tanto tenemos que calcular  $I(a)$  cuando  $a \neq \pm 1$ . Para ello consideramos la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{3it}}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = I(a) + i \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt. \quad (1)$$

La integral  $I(a)$  es por tanto la parte real de la integral  $J(a)$  del primer miembro de (1). Con el cambio de variable  $z = e^{it}$  obtenemos:

$$J(a) = \int_{|z|=1} \frac{z^3}{1 - 2a \left( \frac{z^2+1}{2z} \right) + a^2} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^3}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} dz.$$

Igualando el denominador a 0, obtenemos los puntos singulares:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 - 1)^2}}{2a} \\ &= \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2a} = \{a, 1/a\} \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

Éstas singularidades son polos simples. Llamando  $f$  a la función integrando:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^3(z - a)}{a(z - a)(z - 1/a)} = \frac{a^3}{a^2 - 1},$$

$$\text{Res}(f, 1/a) = \lim_{z \rightarrow 1/a} \frac{z^3(z - 1/a)}{a(z - a)(z - 1/a)} = \frac{1}{a^3(1 - a^2)}.$$

Para  $|a| < 1$  el único polo en el interior geométrico de  $|z| = 1$  es  $a$  y para  $|a| > 1$ , el único es  $1/a$ . Por tanto:

$$J(a) = -\frac{1}{i} 2\pi i \frac{a^3}{a^2 - 1} = \frac{2\pi a^3}{1 - a^2} \quad (|a| < 1 \wedge a \neq 0),$$

$$J(a) = -\frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{a^3(1 - a^2)} = \frac{2\pi}{a^3(a^2 - 1)} \quad (|a| > 1).$$

Para  $a = 0$  tenemos:

$$I(0) = \int_0^{2\pi} \cos 3t dt = \left[ \frac{\sin 3t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

En consecuencia podemos concluir que:

$$I(a) = \begin{cases} \frac{2\pi a^3}{1 - a^2} & \text{si } |a| < 1 \wedge a \neq 0 \\ \frac{2\pi}{a^3(a^2 - 1)} & \text{si } |a| > 1 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

### 14.49. Función entera y polinomio

Sea  $p(z)$  un polinomio complejo y  $f(z)$  una función entera de variable compleja. Se considera una curva de Jordan  $\Gamma$  sobre la que no se anula el polinomio  $p(z)$ . Deducir la expresión de la integral

$$\int_{\Gamma} f(z) \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

mediante los valores de la función  $f(z)$  en los ceros del polinomio.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** Sea  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$  con  $a_n \neq 0$  y sean  $z_1, \dots, z_p$  los distintos ceros de este polinomio con multiplicidades  $n_1, \dots, n_p$  respectivamente. Podemos por tanto expresar  $p(z)$  en la forma  $p(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_p)^{n_p}$ . Derivando:

$$p'(z) = a_n [n_1 (z - z_1)^{n_1-1} \dots (z - z_p)^{n_p} + \dots + n_p (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_p)^{n_p-1}].$$

El cociente  $p'(z)/p(z)$  queda en la forma:

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \dots + \frac{n_p}{z - z_p}.$$

Clasifiquemos las singularidades  $z_1, \dots, z_p$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_k} f(z) \frac{p'(z)}{p(z)} (z - z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \left( n_1 \frac{z - z_k}{z - z_1} + \dots + n_p \frac{z - z_k}{z - z_p} \right) \\ &= f(z_k) (0 + \dots + n_k + \dots + 0) = n_k f(z_k). \end{aligned}$$

Si  $f(z_k) \neq 0$  entonces  $n_k f(z_k) \neq 0$  y  $z_k$  es polo simple con  $\text{Res}(f, z_k) = n_k f(z_k)$ . Si  $f(z_k) = 0$  entonces  $f(z) = (z - z_k)\varphi(z)$  con  $\varphi$  holomorfa en  $\mathbb{C}$ . Se verifica

$$\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) \frac{p'(z)}{p(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \varphi(z) \frac{p'(z)}{p(z)} = 0.$$

La singularidad es evitable y el residuo es 0 o lo que es lo mismo,  $n_k f(z_k)$ . Podemos entonces asegurar que

$$\int_{\Gamma} f(z) \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i \sum n_k f(z_k),$$

en donde la suma se extiende sobre los ceros  $z_k$  de  $p(z)$  en el interior geométrico de  $\Gamma$ .

**14.50. Integral**  $\int_0^{+\infty} x^n dx / (x^{2n+1} + 1)$

(a) Determinar y clasificar las singularidades de la función compleja de variable compleja  $f(z)$ , siendo  $n$  un entero positivo. Hallar el valor del residuo en dichas singularidades.

$$f(z) = \frac{z^n}{z^{2n+1} + 1}.$$

(b) Aplicando la técnica de residuos calcular la integral real impropia:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n+1} + 1} dx.$$

Indicación: utilizar como camino de integración el borde de un sector adecuado.

(Propuesto en examen, Amp. Calc., ETS de Ing. Industriales, UPM).

**Solución.** (a) Los puntos singulares de  $f(z)$  son aquellos que anulan al denominador:

$$z^{2n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n+1} = -1 \Leftrightarrow z^{2n+1} = \exp\{\pi i\}.$$

Aplicando la conocida fórmula para el cálculo de las raíces de un número complejo, obtenemos los puntos singulares de  $f(z)$  :

$$z_k = \exp\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} i \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n).$$

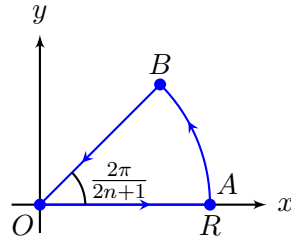
Claramente, estos  $z_k$  son polos simples, por tanto sus residuos son:

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^n(z - z_k)}{z^{2n+1} + 1}.$$

El límite anterior presenta la indeterminación 0/0, aplicando la regla de L'Hopital:

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{nz^{n-1}(z - z_k) + z^n}{(2n+1)z^{2n}} = \frac{z_k^n}{(2n+1)z_k^{2n}} = \frac{z_k^{-n}}{2n+1}.$$

(b) Elijamos el sector circular  $\gamma$  de centro el origen  $O$ , radio  $R > 0$  y puntos extremos del arco, el  $A = R$  y  $B = R \exp\{2\pi i/(2n+1)\}$ . La amplitud del sector es por tanto  $\alpha = 2\pi i/(2n+1)$ .



Integrando en sentido antihorario:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^R \frac{x^n dx}{x^{2n+1} + 1} + \int_{AB} \frac{z^n dz}{z^{2n+1} + 1} + \int_{BO} \frac{z^n dz}{z^{2n+1} + 1}. \quad (1)$$

Hallemos la integral del primer miembro de (1). Los polos en el interior del sector corresponden a los  $k$  que verifican  $0 < (2k + 1)\pi / (2n + 1) < 2\pi / (2n + 1)$ , es decir sólo  $z_0 = \exp\{\frac{\pi i}{2n+1}\}$  está en el interior. Por tanto:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{2\pi i}{2n+1} \exp\left\{-\frac{\pi n}{2n+1}i\right\}.$$

Transformemos ahora la tercera integral del segundo miembro de (1). Efectuando el cambio de variable  $z = \rho \exp\{\frac{2\pi}{2n+1}i\}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{BO} \frac{z^n dz}{z^{2n+1} + 1} &= \int_R^0 \frac{\rho^n \exp\{\frac{2\pi n}{2n+1}i\}}{\rho^{2n+1} \exp\{2\pi i\} + 1} \cdot \exp\left\{\frac{2\pi}{2n+1}i\right\} d\rho \\ &= -\exp\left\{\frac{2\pi(n+1)}{2n+1}i\right\} \int_0^R \frac{\rho^n}{\rho^{2n+1} + 1} d\rho \\ &= -\exp\left\{\frac{2\pi(n+1)}{2n+1}i\right\} \int_0^R \frac{x^n}{x^{2n+1} + 1} dx. \end{aligned}$$

Tomando límites en (1) cuando  $R \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi i}{2n+1} \exp\left\{-\frac{\pi n}{2n+1}i\right\} = \\ &\left(1 - \exp\left\{\frac{2\pi(n+1)}{2n+1}i\right\}\right) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n+1} + 1} dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} \frac{z^n}{z^{2n+1} + 1} dz. \quad (2) \end{aligned}$$

Veamos que el límite que aparece en (2) es igual a 0, para ello acotemos el integrando. Tenemos para  $R > 1$ :

$$\left| \frac{z^n}{z^{2n+1} + 1} \right| = \frac{|z|^n}{|z^{2n+1} - (-1)|} \leq \frac{|z|^n}{||z|^{2n+1} - | -1 ||} = \frac{R^n}{R^{2n+1} - 1}.$$

La longitud del arco  $AB$  es  $2\pi R/(2n+1)$ , por tanto:

$$0 \leq \left| \int_{AB} \frac{z^n}{z^{2n+1} + 1} dz \right| \leq \frac{R^n}{R^{2n+1} - 1} \cdot \frac{2\pi R}{2n+1}.$$

Dado que  $n \geq 1$ ,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^n}{R^{2n+1} - 1} \cdot \frac{2\pi R}{2n+1} = 0$  lo cual implica

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} \frac{z^n}{z^{2n+1} + 1} dz = 0.$$

De (2), deducimos que el valor de la integral pedida  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n+1} + 1} dx$  es:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{2n+1} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{\pi n}{2n+1}i\right\} \left(1 - \exp\left\{\frac{2\pi(n+1)}{2n+1}i\right\}\right)} \\ &= \frac{2\pi i}{2n+1} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{\pi n}{2n+1}i\right\} - \exp\left\{-\frac{\pi n}{2n+1}i\right\}}. \end{aligned}$$

Podemos por tanto concluir que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n+1} + 1} dx = \frac{\pi}{2n+1} \operatorname{csc} \frac{\pi n}{2n+1}.$$



## Capítulo 15

# Ecuaciones diferenciales de primer orden y grado

### 15.1. Concepto de ecuación diferencial ordinaria

1. Averiguar si las funciones que se dan son soluciones de la ecuación diferencial correspondiente a)  $xy' = 2y$ , función  $y = 5x^2$ . b)  $y'' = x^2 + y^2$ , función  $y = \frac{1}{x}$ .

2. Comprobar que  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$  es solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0,$$

y encontrar dos soluciones particulares.

3. Demostrar que  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$  es solución general de la ecuación diferencial  $y'' + 4y = 0$ . Encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 6$ .

4. Demostrar que  $y = \log(xy)$  es solución de la ecuación diferencial

$$(xy - x)y'' + x(y')^2 + yy' - 2y' = 0.$$

5. Demostrar que  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log x$  es solución de la ecuación diferencial  $xy'' + y' = 0$ .

6. Demostrar que  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  es una solución de  $y' + 2xy^2 = 0$  en el intervalo  $I = (-1, 1)$ , pero no en ningún intervalo que contenga a  $I$ .

7. Demostrar que  $y = Cx + 2C^2$  es solución general de la ecuación de la ecuación diferencial  $xy' + 2(y')^2 - y = 0$ . ¿Es  $y = -x^2/8$  solución singular?

8. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

**Solución.** 1. a) Tenemos  $xy' = x(10x) = 2(5x^2) = 2y$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , por tanto  $y = 5x^2$  es solución de la ecuación dada.

b) Derivando la función dada:

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Por otra parte,

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2},$$

y  $\frac{x^4 + 1}{x^2}$  no es idénticamente igual a  $\frac{2}{x^3}$ , por tanto  $y = \frac{1}{x}$  no es solución de la ecuación dada.

2. Derivando la función dada:

$$y' = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$y'' = \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}) \\ & \quad + \lambda_1 \lambda_2 (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}), \end{aligned}$$

y simplificando la expresión anterior, fácilmente verificamos que es igual a 0. Dando los valores  $C_1 = C_2 = 0$ , obtenemos la solución particular  $y = 0$ . Dando los valores  $C_1 = 1, C_2 = 0$  obtenemos la solución particular  $y = e^{\lambda_1 x}$ .

3. Derivando la función dada:

$$y' = -2C_1 \operatorname{sen} 2x + 2C_2 \operatorname{cos} 2x,$$

$$y'' = -4C_1 \operatorname{cos} 2x - 4C_2 \operatorname{sen} 2x.$$



Por otra parte,

$$y'' + 4y = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sen 2x + 4(C_1 \cos 2x + C_2 \sen 2x) = 0,$$

por tanto, la familia de funciones dadas es solución general de la ecuación  $y'' + 4y = 0$ . Hallemos la solución particular pedida:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ 2C_2 = 6, \end{cases}$$

es decir  $y = \cos x + 3 \sen 2x$ .

4. Derivando  $y = \log(xy)$  respecto de  $x$ :

$$y' = \frac{y + xy'}{xy}.$$

Despejando  $y'$  :

$$y' = \frac{y}{x(y-1)}.$$

La derivada segunda de  $y$  es:

$$y'' = \frac{y'x(y-1) - (y-1 + xy')y}{x^2(y-1)^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} & (xy-x) \frac{y'x(y-1) - (y-1 + xy')y}{x^2(y-1)^2} \\ & + x \left( \frac{y}{x(y-1)} \right)^2 + y \frac{y}{x(y-1)} - 2 \frac{y}{x(y-1)}. \end{aligned}$$

Operando y simplificando, fácilmente obtenemos que la expresión anterior es igual a 0.

5. Para todo  $x \in (0, +\infty)$  se verifica:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

y sustituyendo en la ecuación,

$$xf''(x) + f'(x) = x \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0.$$

6. Para todo  $x \in (-1, 1)$  :

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Sustituyendo:

$$y' + 2xy^2 = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} + 2x \frac{1}{(x^2 - 1)^2} = 0,$$

por tanto  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  es solución en  $I$ . Dado que esta función no está definida en  $x = \pm 1$ , ningún intervalo que contenga a  $I$  puede ser solución.

7. La derivada de  $y = Cx + 2C^2$  es  $y' = C$ . Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$xy' + 2(y')^2 - y = Cx + 2C^2 - Cx - 2C^2 = 0,$$

por tanto  $y = Cx + 2C^2$  es solución general. La derivada de  $y = -x^2/8$  es  $y' = -x/4$ . Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$xy' + 2(y')^2 - y = x \cdot \frac{-x}{4} + 2 \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 0,$$

por tanto  $y = -x^2/8$  es solución. Dado que  $y = Cx + 2C^2$  representa una familia de rectas e  $y = -x^2/8$ , una parábola, esta última función no está incluida en la solución general, luego es una solución singular.

8. La curva cumple  $y' = \lambda x$  es decir,  $y = \lambda x^2/2 + C$ , luego es una parábola si  $\lambda \neq 0$ .

## 15.2. Construcción de ecuaciones diferenciales

1. Formar la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas

a)  $y = Cx$ .   b)  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .

2. Encontrar la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas

a)  $x^2 + y^2 = C$ .   b)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ .

3. Formar la ecuación diferencial de todas las rectas no verticales del plano.

4. Formar la ecuación diferencial de todas las parábolas del plano  $XOY$  con eje vertical.

5. Hallar la ecuación diferencial de las parábolas del plano de la forma  $y = Cx^2$ .

**Solución.** Recordemos que para una familia de curvas que dependen de  $n$  constantes

$$\phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

se puede formar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dada derivando  $n$  veces y eliminando  $C_1, C_2, \dots, C_n$  entre las relaciones

$$\phi = 0, \quad \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n\phi}{dx^n} = 0. \quad \square$$

1. a) Derivando obtenemos  $y' = C$ . Sustituyendo en la ecuación dada obtenemos la ecuación diferencial  $y = y'x$ .

b) Derivando dos veces obtenemos las relaciones:

$$\begin{cases} y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x, & (1) \\ y' = -2C_1 \operatorname{sen} 2x + 2C_2 \cos 2x, & (2) \\ y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \operatorname{sen} 2x. & (3) \end{cases}$$

Despejando  $C_1$  y  $C_2$  entre (1) y (2) obtenemos  $C_1 = (1/2)(2y \cos 2x - y' \operatorname{sen} 2x)$  y  $C_2 = (1/2)(y' \cos 2x + 2y \operatorname{sen} 2x)$ . Sustituyendo estos valores en (3) obtenemos la ecuación diferencial  $y'' + 4y = 0$ .

2. a) Derivando obtenemos  $2x + 2yy' = 0$ , o equivalentemente  $x + yy' = 0$ , ecuación que también la podemos escribir en la forma  $x dx + y dy = 0$ .

b) Derivando dos veces obtenemos las relaciones:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, & (1) \\ y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}, & (2) \\ y'' = 4C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-2x}. & (3) \end{cases}$$

Despejando  $C_1$  y  $C_2$  entre (1) y (2) y sustituyendo en (3), obtenemos la ecuación diferencial  $y'' - 4y = 0$ .

3. Las rectas no verticales del plano son de la forma  $y = mx + b$ . Derivando dos veces, obtenemos  $y' = m$ ,  $y'' = 0$ . La ecuación diferencial pedida es por tanto  $y'' = 0$ .

4. Las parábolas del plano con eje vertical son de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ . Derivando tres veces, obtenemos  $y' = 2ax + b$ ,  $y'' = 2a$ ,  $y''' = 0$ . La ecuación diferencial pedida es por tanto  $y''' = 0$ .

5. Derivando obtenemos  $y' = 2Cx$ , con lo cual  $C = y'/2x$ . Sustituyendo en  $y = Cx^2$ :

$$y = \frac{y'}{2x}x^2, \text{ o bien } xy' - 2y = 0.$$

### 15.3. Ecuación diferencial de variables separadas

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0.$$

2. Hallar la solución de la ecuación diferencial  $(1 + e^x)yy' = e^x$  que satisface la condición inicial  $y(0) = 1$ .

3. Resolver la ecuación  $(x^2 - x)y' = y^2 + y$ .

4. Determinar la ecuación de una curva que pasa por el punto  $(0, 4)$  y que la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos es igual a la ordenada del punto aumentada en 5 unidades.

5. Resolver la ecuación diferencial  $x' = x + \frac{1}{x}$  con la condición inicial  $x(0) = a$  ( $a > 0$ ). Escribir la solución en forma explícita y hallar su intervalo de continuidad (Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Recordamos que se dice que la ecuación  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  es de variables separadas, si es de la forma

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Si la ecuación es de variables separadas, dividiendo entre  $P_2(y)Q_1(x)$ :

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = C,$$

lo cual proporciona una solución general de la ecuación diferencial.  $\square$

1. Podemos escribir la ecuación en la forma

$$\frac{x}{x^2 - 1}dx - \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0.$$

Integrando:

$$\frac{1}{2} \log |x^2 - 1| - \frac{1}{2} \log |y^2 - 1| = K$$

o bien  $4 \log \left| \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} \right| = K_1$ . Tomando exponenciales queda

$$(x^2 - 1) = C(y^2 - 1).$$

2. Podemos escribir la ecuación en la forma

$$ydy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Integrando, obtenemos la solución general

$$\frac{y^2}{2} = \log(1 + e^x) + C.$$

Sustituyendo  $x = 0$ ,  $y = 1$  en la igualdad anterior obtenemos  $C = 1/2 - \log 2$ , de donde

$$y^2 = \log \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)^2 + 1.$$

La solución particular pedida es por tanto

$$y = \sqrt{\log \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)^2 + 1}.$$

3. Podemos expresar la ecuación en la forma:

$$\frac{dy}{y^2 + y} - \frac{dx}{x^2 - x}.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} - \int \frac{dx}{x^2 - x} = K.$$

Descomponiendo en fracciones simples, obtenemos:

$$\frac{1}{y^2 + y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1}, \quad \frac{1}{x^2 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1}.$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1} \right) dy = \log |y| - \log |y + 1| = \log \left| \frac{y}{y + 1} \right|.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \log |x + 1| - \log |x| = \log \left| \frac{x + 1}{x} \right|.$$

Queda

$$\log \left| \frac{y}{y+1} \right| - \log \left| \frac{x-1}{x} \right| = K, \quad \log \left| \frac{xy}{(y+1)(x-1)} \right| = K,$$

$$\frac{xy}{(y+1)(x-1)} = e^K.$$

Llamando  $C = e^K$ , obtenemos la solución general

$$xy = C(x-1)(y+1).$$

4. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a una curva  $y = y(x)$  es la derivada  $y'$ , por tanto la curva pedida ha de cumplir  $y' = y + 5$ , que proporciona la ecuación de variables separadas  $dy - (y+5)dx = 0$ . Tenemos

$$\frac{dy}{y+5} = dx, \quad \log |y+5| = x + K, \quad y+5 = e^K e^x, \quad y+5 = C e^x.$$

Obligando a que la curva pase por  $(0, 4)$  obtenemos  $C = 9$ , por tanto la curva pedida es  $y = 9e^x - 5$ .

5. Es una ecuación de variables separadas. Usamos el método estándar para su resolución:

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \int dt, \quad \frac{1}{2} \log(x^2+1) = t + C, \quad \log(x^2+1) = 2t + 2C,$$

$$x^2+1 = e^{2C} e^{2t}, \quad x^2+1 = C_1 e^{2t}, \quad x = \sqrt{C_1 e^{2t} - 1}.$$

La condición inicial  $x(0) = a$  ( $a > 0$ ) equivale a  $a^2 + 1 = C_1$ . La solución pedida es por tanto

$$x = +\sqrt{(a^2+1)e^{2t} - 1}.$$

Hallemos el intervalo de continuidad de la solución. La función está definida y es derivable si y sólo si  $(a^2+1)e^{2t} - 1 > 0$ . Tenemos

$$(a^2+1)e^{2t} - 1 > 0 \Leftrightarrow (a^2+1)e^{2t} > 1 \Leftrightarrow e^{2t} > \frac{1}{a^2+1} \Leftrightarrow$$

$$2t > \log \frac{1}{a^2+1} \Leftrightarrow 2t > \log 1 - \log(a^2+1) \Leftrightarrow t > -\frac{1}{2} \log(a^2+1)$$

El intervalo de continuidad pedido es por tanto

$$(-\frac{1}{2} \log(a^2+1), +\infty).$$

## 15.4. Ecuación diferencial homogénea

1. Demostrar que si la ecuación  $Pdx + Qdy = 0$  es homogénea, entonces la sustitución  $y = vx$  la transforma en una de variables separadas.

2. Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ .

3. Resolver la ecuación diferencial  $(2ye^{y/x} - x)y' + 2x + y = 0$ .

**Solución.** Recordamos que la ecuación diferencial:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  se dice que es homogénea cuando  $P$  y  $Q$  son funciones homogéneas del mismo grado.  $\square$

1. La sustitución  $y = vx$  transforma  $P$  y  $Q$  en las formas  $P(x, y) = P(x, vx)$  y  $Q(x, y) = Q(x, vx)$ . Si  $P$  y  $Q$  son homogéneas del mismo grado  $d$  entonces

$$P(x, vx) = P(1 \cdot x, vx) = x^d P(1, v) = x^d R(v),$$

$$Q(x, vx) = Q(1 \cdot x, vx) = x^d Q(1, v) = x^d S(v).$$

La ecuación inicial se transforma en  $(R(v) + vS(v))dx + xS(v)dv = 0$  que es de variables separadas.

2. Las funciones  $P$  y  $Q$  son homogéneas de grado 2. Efectuando la sustitución  $y = vx$  obtenemos

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2x^2v(vdx + xdv) = 0.$$

Simplificando y separando variables

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v dv}{1 + v^2} = 0.$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2v dv}{1 + v^2} = K, \quad \log|x| + \log|1 + v^2| = K, \quad \log|x(1 + v^2)| = K.$$

Tomando exponenciales queda  $x(1 + v^2) = C$ . Sustituyendo  $v = y/x$  obtenemos la integral general

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

3. La ecuación es  $(2x + y)dx + (2ye^{y/x} - x)dy = 0$  y las dos funciones son homogéneas de grado 1. Efectuando el cambio  $y = vx$ :

$$(2x + vx)dx + (2vxe^v - x)(vdx + xdv) = 0,$$

$$\begin{aligned}
(2+v)dx + (2ve^v - 1)(vdx + xdv) &= 0, \\
(2 + 2v^2e^v)dx + (2ve^v - 1)xdx &= 0, \\
\frac{dx}{x} + \frac{2ve^v - 1}{2v^2e^v + 2}dv &= 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2ve^v - 1}{v^2e^v + 1}dv = K.
\end{aligned}$$

Calculemos la segunda integral. Sumando y restando en el numerador  $v^2e^v$  :

$$\begin{aligned}
\int \frac{2ve^v - 1}{v^2e^v + 1}dv &= \int \frac{2ve^v + v^2e^v - v^2e^v - 1}{v^2e^v + 1}dv \\
&= \int \frac{2ve^v + v^2e^v}{v^2e^v + 1}dv - \int dv = \log(v^2e^v + 1) - v.
\end{aligned}$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$\begin{aligned}
\log|x| + \frac{1}{2} \log(v^2e^v + 1) - \frac{1}{2}v &= K, \\
2 \log|x| + \log(v^2e^v + 1) &= 2K + v, \\
\log|x(v^2e^v + 1)| &= 2K + v, \quad x(v^2e^v + 1) = e^{2K}e^v = Ce^v.
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $v = y/x$  y simplificando, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y^2 + x^2e^{-y/x} = C.$$

## 15.5. Ecuación diferencial con coeficientes lineales

1. Sea la ecuación con coeficientes lineales

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0.$$

Demostrar que si los coeficientes de  $dx$  y  $dy$  representan rectas secantes en el punto  $(h, k)$ , entonces la sustitución  $x = h + X$ ,  $y = k + Y$  transforma la ecuación en una homogénea, y que si representan rectas paralelas, la sustitución  $z = ax + by$  la transforma en una de variables separadas.

2. Resolver la ecuación diferencial  $y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$ .

3. Resolver la ecuación diferencial

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

4. Proporcionar un método para resolver ecuaciones de la forma:

$$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$



**Solución.** 1. Si las rectas secantes en el punto  $(h, k)$ , sustituyendo  $x = h + X$ ,  $y = k + Y$  en la ecuación dada:

$$(ah + aX + bk + bY + c)dX + (a'h + a'X + b'k + b'Y + c')dY = 0.$$

Dado que  $(h, k)$  pertenece a ambas rectas,  $ah + bk + c = a'h + b'k + c' = 0$ .  
Queda:

$$(aX + bY)dX + (a'X + b'Y)dY = 0,$$

que una ecuación homogénea.

Si las rectas son paralelas entonces los vectores  $(a, b)$  y  $(a', b')$  son proporcionales y podemos escribir  $(a', b') = k(a, b)$  con  $k \neq 0$ . Sustituyendo en la ecuación dada:

$$(ax + by + c)dx + (k(ax + by) + c')dy = 0.$$

Efectuando el cambio  $z = ax + by$  y usando  $dz = adx + bdy$  :

$$(b(z + c) - a(kz + c'))dx + (kz + c')dz = 0.$$

que es una ecuación de variables separadas.

2. La ecuación dada se puede expresar en la forma:

$$(4x - y + 7)dx - (2x + y - 1)dy = 0.$$

Las rectas  $4x - y + 7 = 0$  y  $2x + y - 1 = 0$  se cortan en el punto  $(h, k) = (-1, 3)$ .  
Con el cambio  $x = -1 + X$ ,  $y = 3 + Y$  obtenemos

$$(4X - Y)dX - (2X + Y)dY = 0,$$

y con  $Y = vX$  :

$$(4X - vX)dX - (2X + vX)(vdX + Xdv) = 0.$$

Simplificando y separando variables

$$\frac{dX}{X} + \frac{(v+2)dv}{v+3v-4} = 0.$$

Descomponiendo el segundo miembro en fracciones simples e integrando:

$$\log |X| + \int \left( \frac{2/5}{v-1} + \frac{3/5}{v+4} \right) dv = K, \quad \log |X^5(v-1)^2(v+4)^3| = K,$$

$$X^5(v-1)^2(v+4)^3 = C, \quad X^5(Y/X-1)^2(Y/X+4)^3 = C.$$

Sustituyendo  $X = x + 1$ ,  $Y = y - 3$  obtenemos la solución general

$$(x - y + 4)^2(4x + y + 1)^3 = C.$$

3. Las rectas son paralelas. Efectuando el cambio  $z = x - 2y$  y operando obtenemos

$$\frac{2z + 5}{4z + 11} dz = dx \text{ o bien } \left(1 - \frac{1}{4z + 11}\right) dz = 2x.$$

Integrando obtenemos  $4z - \log|4z + 11| = 8x + C$ . La solución general es

$$4x + 8y + \log|4x - 8y + 11| = C.$$

4. Consideremos las rectas  $ax + by + c = 0$ ,  $a'x + b'y + c' = 0$ . Si son secantes, en el punto  $(h, k)$  el cambio  $x = h + X$ ,  $y = k + Y$  transforma la ecuación en:

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) \text{ o bien } F\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) dX - dY = 0.$$

Los coeficientes de  $dX$  y  $dY$  en la última ecuación son funciones homogéneas (ambas de grado 0), por tanto es homogénea.

Si las rectas son paralelas, el cambio  $z = ax + by$  transforma la ecuación en:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{z + c}{kz + c'}\right) \text{ o bien } \frac{dz - adx}{dx} = bF\left(\frac{z + c}{kz + c'}\right).$$

La última ecuación es de la forma  $dz - adx = bg(z)dx$  o bien

$$(bg(z) + a)dx - dz = 0,$$

que es de variables separadas.

## 15.6. Ecuación diferencial exacta

1. Resolver la ecuación diferencial  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ .

2. Resolver la ecuación diferencial

$$\log(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x - 1)}{y^2 + 1} dy = 0.$$

3. Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0$ .

**Solución.** Recordamos que la ecuación  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  se llama *diferencial exacta* si se verifica la relación  $P_y = Q_x$ . Además, supongamos que  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  son continuas, así como sus derivadas parciales  $P_y$  y  $Q_x$  en un recinto  $D$  simplemente conexo del plano y se verifica  $P_y = Q_x$  en  $D$ . En estas hipótesis, se sabe que existe una función  $u = u(x, y)$  (única salvo constante aditiva) tal que se verifica en  $D$  :

$$du = u_x dx + u_y dy = P dx + Q dy.$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial exacta  $P dx + Q dy = 0$  es  $u(x, y) = C$ .  $\square$

1. Tenemos  $P_y = 12xy$ ,  $Q_x = 12xy$ , por tanto la ecuación es diferencial exacta. Hallemos  $u$  tal que

$$\begin{cases} u_x = P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \\ u_y = Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

Integrando la primera igualdad:

$$u = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Usando ahora la segunda igualdad:

$$u_y = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4.$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

2. Tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{y^2 + 1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{y^2 + 1},$$

por tanto la ecuación es diferencial exacta. Hallemos  $u$  tal que

$$\begin{cases} u_x = P(x, y) = \log(y^2 + 1) \\ u_y = Q(x, y) = \frac{2y(x-1)}{y^2+1}. \end{cases}$$

Integrando la segunda igualdad:

$$u = \int \frac{2y(x-1)}{y^2+1} dy = (x-1) \log(y^2+1) + \varphi(x).$$

Usando ahora la primera igualdad:

$$u_x = \log(y^2+1) + \varphi'(x) = \log(y^2+1) \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = K.$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$(x - 1) \log(y^2 + 1) = C.$$

3. Tenemos:  $P_y = 2y = Q_x$ , por tanto la ecuación es diferencial exacta. Hallemos  $u$  tal que

$$\begin{cases} u_x = P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x \\ u_y = Q(x, y) = 2xy. \end{cases}$$

Integrando la primera igualdad:

$$u = \int (x^2 + y^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 + \varphi(y).$$

Usando ahora la segunda igualdad:

$$u_y = 2xy + \varphi'(y) = 2xy \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = K.$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$\frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 = C.$$

## 15.7. Factores integrantes

1. Se considera la ecuación diferencial  $Pdx + Qdy = 0$ .

(a) Determinar la relación que se ha de cumplir para que la ecuación tenga un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  que dependa exclusivamente de  $x$ .

(b) Aplicación: resolver la ecuación diferencial  $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$ .

2. Se considera la ecuación diferencial  $Pdx + Qdy = 0$ .

(a) Determinar la relación que se ha de cumplir para que la ecuación tenga un factor integrante  $\mu = \mu(y)$  que dependa exclusivamente de  $y$ .

(b) Aplicación: resolver la ecuación diferencial  $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \log x)dy = 0$ .

3. Se considera la ecuación diferencial  $Pdx + Qdy = 0$ .

(a) Determinar la relación que se ha de cumplir para que la ecuación tenga un factor integrante  $\mu = \mu(y^2 - x^2)$  que dependa de  $y^2 - x^2$ .

(b) Aplicación: hallar un factor integrante de la ecuación

$$(x + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

4. Se considera la ecuación diferencial  $Pdx + Qdy = 0$ . Determinar la relación que se ha de cumplir para que la ecuación tenga un factor integrante

$\mu = \mu(x + y^2)$  que dependa exclusivamente de  $x + y^2$ .

5. Se considera la ecuación diferencial  $Pdx + Qdy = 0$ .

(a) Determinar la relación que se ha de cumplir para que la ecuación tenga un factor integrante  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  que dependa exclusivamente de  $x^2 + y^2$ .

(b) Aplicación: resolver la ecuación diferencial  $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$ .

**Solución.** Supongamos que la ecuación  $Pdx + Qdy = 0$  no es diferencial exacta. Si  $\mu = \mu(x, y)$  es una función tal que  $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$  es diferencial exacta, decimos que  $\mu$  es un factor integrante de la ecuación dada. La condición para que  $\mu = \mu(x, y)$  sea factor integrante de la ecuación  $Pdx + Qdy = 0$  es

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

o de manera equivalente

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Esta última ecuación diferencial en derivadas parciales será en principio más difícil de resolver que la ecuación inicial dada, sin embargo es posible hallar factores integrantes cuando conocemos a priori una forma particular de la función  $\mu$ .  $\square$

1. (a) La ecuación  $\mu Pdx + \mu Q = 0$  es diferencial exacta si y sólo si  $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ . Entonces, si  $\mu$  depende exclusivamente de  $x$ :

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \Leftrightarrow \mu P_y = \mu' Q + \mu Q_x \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{Q}(P_y - Q_x).$$

Esto implica que  $(P_y - Q_x)/Q = F(x)$ , es decir ha de ser función de  $x$ .

(b) Para la ecuación dada tenemos

$$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{-x - y + 2x}{xy - x^2} = \frac{x - y}{x(y - x)} = -\frac{1}{x} = F(x).$$

Halemos un factor integrante

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{x}, \log |\mu| = -\log |x|, \mu = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando por  $\mu = 1/x$  obtenemos la ecuación diferencial exacta:

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x) dy = 0.$$

Hallemos la correspondiente función potencial  $u = u(x, y)$  :

$$u = \int (y - x) dy = \frac{y^2}{2} - xy + \varphi(x) \Rightarrow$$

$$u_x = -y + \varphi'(x) = \frac{1}{x} - y \Rightarrow \varphi(x) = \log|x| + K.$$

La solución general de la ecuación dada es

$$\log|x| - xy + \frac{y^2}{2} = C.$$

2. (a) La ecuación  $\mu P dx + \mu Q = 0$  es diferencial exacta si y sólo si  $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ . Entonces, si  $\mu$  depende exclusivamente de  $y$  :

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \Leftrightarrow \mu' P + \mu P_y = \mu Q_x \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{P}(Q_x - P_y).$$

Esto implica que  $(Q_x - P_y)/P = F(y)$ , es decir ha de ser función de  $y$ .

(b) Para la ecuación dada tenemos

$$\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = \frac{x}{y} \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{2}{y} = F(y).$$

Halemos un factor integrante

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}, \log|\mu| = -2 \log|y| = \log|y|^{-2}, \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Multiplicando por  $\mu = 1/y^2$  obtenemos la ecuación diferencial exacta:

$$\frac{1}{xy} dx + \left( y - \frac{\log x}{y^2} \right) dy = 0.$$

Hallemos la correspondiente función potencial  $u = u(x, y)$  :

$$u = \int \frac{dx}{xy} = \frac{\log x}{y} + \varphi(y) \Rightarrow u_y = -\frac{\log x}{y^2} + \varphi'(y) =$$

$$y - \frac{\log x}{y^2} \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + K$$

La solución general de la ecuación dada es

$$\frac{\log x}{y} + \frac{y^2}{2} = C.$$

3. (a) La ecuación  $\mu P dx + \mu Q = 0$  es diferencial exacta si y sólo si  $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ . Entonces, si  $\mu = \mu(z)$  depende exclusivamente de  $z = y^2 - x^2$ :

$$\begin{aligned}(\mu P)_y = (\mu Q)_x &\Leftrightarrow \mu'(z)2yP + \mu(z)P_y = -2x\mu'(z)Q + \mu(z)Q_x \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{Q_x - P_y}{2xQ + 2yP}\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{Q_x - P_y}{2xQ + 2yP} = F(y^2 - x^2),$$

es decir ha de ser función de  $y^2 - x^2$ .

(b) Para la ecuación dada tenemos

$$\frac{Q_x - P_y}{2xQ + 2yP} = \frac{-2y - 2y}{-4x^2y + 2x^2y + 2y^3 + 2y} = \frac{-2}{1 + y^2 - x^2} = F(y^2 - x^2).$$

Halemos un factor integrante

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = -\frac{2}{1+z}, \quad \log |\mu(z)| = -2 \log |1+z| = \log |1+z|^{-2}, \quad \mu(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Por tanto, un factor integrante que depende de  $y^2 - x^2$  es:

$$\mu = \frac{1}{(1 + y^2 - x^2)^2}.$$

4. La ecuación  $\mu P dx + \mu Q = 0$  es diferencial exacta si y sólo si  $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ . Entonces, si  $\mu = \mu(z)$  depende exclusivamente de  $z = x + y^2$ :

$$\begin{aligned}(\mu P)_y = (\mu Q)_x &\Leftrightarrow \mu'(z)2yP + \mu(z)P_y = \mu'(z)Q + \mu(z)Q_x \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - Q}\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - Q} = F(x + y^2),$$

es decir ha de ser función de  $x + y^2$ .

5. (a) La ecuación  $\mu P dx + \mu Q = 0$  es diferencial exacta si y sólo si  $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ . Entonces, si  $\mu = \mu(z)$  depende exclusivamente de  $z = x^2 + y^2$ :

$$\begin{aligned}(\mu P)_y = (\mu Q)_x &\Leftrightarrow \mu'(z)2yP + \mu(z)P_y = 2x\mu'(z)Q + \mu(z)Q_x \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = F(x^2 + y^2),$$

es decir ha de ser función de  $x^2 + y^2$ .

(b) La ecuación diferencial es

$$(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} &= \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{2x + x}{2y(x - xy) - 2x(y + x^2)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{3}{2z}, \quad \log |\mu(z)| = -\frac{3}{2} \log |z| = \log |z|^{-3/2}, \quad \mu(z) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\mu(z)$  a la ecuación dada obtenemos la ecuación diferencial exacta:

$$\frac{x - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = 0.$$

Hallemos la función potencial  $u$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad u = (1 - y) \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= (y - 1)(x^2 + y^2)^{-1/2} + \varphi(y). \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (x^2 + y^2)^{-1/2} + (y - 1) \cdot \frac{-1}{2} (x^2 + y^2)^{-3/2} 2y + \varphi'(y) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2 - y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \varphi'(y) = \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Igualando a  $\frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ , queda  $\varphi'(y) = 0$ , por tanto  $\varphi(y) = K$ . La solución general es por tanto

$$\frac{y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$



## 15.8. Ecuación diferencial lineal

1. Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial lineal  $y' + py = q$  es

$$ye^{\int p dx} - \int qe^{\int p dx} dx = C.$$

2. Resolver la ecuación  $y' = y \tan x + \cos x$ .

3. Resolver la ecuación lineal  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ .

4. Usando el método de variación de las constantes, resolver la ecuación lineal  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ .

5. Resolver la ecuación  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ .

6. Demostrar que la solución general de la ecuación lineal completa  $y' + py = q$  se obtiene sumando a una solución particular todas las de la homogénea.

7. Resolver la ecuación  $2xy' - y = 3x^2$ .

8. Usando el método de variación de las constantes, resolver la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}.$$

9. Demostrar que si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones particulares de la ecuación lineal  $y' + py = q$ , entonces su solución general es

$$\frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = C.$$

10. Resolver la ecuación diferencial

$$x' + \frac{2tx}{3+t^2} = e^t$$

con la condición inicial  $x(0) = 0$ . Escribir la solución en forma explícita e indicar su intervalo máximo de continuidad (Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1. Podemos escribir la ecuación  $y' + py = q$  en la forma

$$\frac{dy}{dx} = -py + q, \text{ o bien } (py - q)dx + dy = 0.$$

Veamos que tiene un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  que depende exclusivamente de  $x$ . Multiplicando por  $\mu$ :

$$\mu(py - q)dx + \mu dy = 0.$$

Obligando a que sea diferencial exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(py - q)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu), \quad \mu p = \mu', \quad \frac{\mu'}{\mu} = p,$$

$$\log |\mu| = \int p dx, \quad \mu = e^{\int p dx}.$$

Es decir, obtenemos la ecuación diferencial exacta:

$$P dx + Q dy = 0, \quad \text{con } P = (py - q)e^{\int p dx}, \quad Q = e^{\int p dx}.$$

Hallemos  $u$  tal que

$$\begin{cases} u_x = (py - q)e^{\int p dx} \\ u_y = e^{\int p dx}. \end{cases}$$

Integrando la segunda igualdad:

$$u = \int e^{\int p dx} dy = ye^{\int p dx} + \varphi(x).$$

Usando ahora la primera igualdad:

$$\begin{aligned} u_x &= ype^{\int p dx} + \varphi'(x) = (py - q)e^{\int p dx} \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= -qe^{\int p dx} \Rightarrow \varphi(x) = -\int qe^{\int p dx} dx. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación lineal es por tanto

$$ye^{\int p dx} - \int qe^{\int p dx} dx = C.$$

2. Podemos escribir la ecuación en la forma

$$y' - (\tan x)y = \cos x,$$

es decir es lineal. Usando la fórmula de la solución general:

$$ye^{\int -\tan x dx} - \int (\cos x)e^{\int -\tan x dx} dx = C,$$

$$ye^{\log|\cos x|} - \int (\cos x)e^{\log|\cos x|} dx = C,$$

$$y \cos x - \int \cos^2 x dx = C, \quad y \cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C.$$

La solución general de la ecuación es por tanto  $y \cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$ .

3. Usando la fórmula de la solución general de la ecuación lineal:

$$ye^{\int 2x dx} - \int 2xe^{-x^2} e^{\int 2x dx} dx = C,$$

$$ye^{x^2} - \int 2xe^{-x^2} e^{x^2} dx = C,$$

$$ye^{x^2} - \int 2x dx = C, \quad ye^{x^2} - x^2 = C.$$

La solución general de la ecuación es por tanto  $y = (C + x^2)e^{-x^2}$ .

4. Recordamos que método de variación de las constantes consiste en resolver primeramente la ecuación homogénea correspondiente  $y' + py = 0$ , que es de variables separadas, siendo su solución general  $y = Ce^{-\int p dx}$ . Después, suponemos que  $C$  es función de  $x$ , es decir  $C = C(x)$ . Obligando a que  $y = C(x)e^{-\int p dx}$  sea solución de la ecuación completa, obtenemos la solución general de esta.  $\square$

La ecuación homogénea es  $y' + 2xy = 0$ , y su solución general  $y = Ce^{-\int 2x dx} = Ce^{-x^2}$ . Sustituyendo  $y = C(x)e^{-x^2}$  en la ecuación completa:

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

$$C'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}, \quad C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C.$$

La solución general de la ecuación completa es por tanto

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

5. Invertiendo obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = x \cos y + \operatorname{sen} 2y, \quad \text{o bien } x' - (\cos y)x = \operatorname{sen} 2y$$

es decir, la ecuación dada es lineal en  $x$  como función de  $y$ . Usando la fórmula de la solución general:

$$xe^{\int -\cos y dy} - \int (\operatorname{sen} 2y)e^{\int -\cos y dy} dy = C,$$

$$xe^{-\operatorname{sen} y} - \int (\operatorname{sen} 2y)e^{-\operatorname{sen} y} dy = C.$$

La última integral la podemos expresar en la forma

$$\int (\operatorname{sen} 2y)e^{-\operatorname{sen} y} dy = 2 \int \operatorname{sen} y \cos y e^{-\operatorname{sen} y} dy.$$

Usando la fórmula de integración por partes con  $u = \operatorname{sen} y$ ,  $dv = \cos y e^{-\operatorname{sen} y}$  fácilmente obtenemos

$$\int (\operatorname{sen} 2y)e^{-\operatorname{sen} y} dy = -2e^{-\operatorname{sen} y}(1 + \operatorname{sen} y).$$

La solución general de la ecuación dada es por tanto

$$xe^{-\operatorname{sen} y} + 2e^{-\operatorname{sen} y}(1 + \operatorname{sen} y) = C,$$

que la podemos expresar en la forma

$$x = Ce^{\operatorname{sen} y} - 2 \operatorname{sen} y - 2.$$

6. Si  $y_1$  es una solución particular de la ecuación completa e  $y_h$  es solución de la homogénea, entonces

$$\begin{aligned} (y_1 + y_h)' + p(y_1 + y_h) &= y_1' + y_h' + py_1 + py_h \\ &= (y_1' + py_1) + (y_h' + py_h) = q + 0 = q, \end{aligned}$$

es decir  $y_1 + y_h$  es solución de la completa.

Recíprocamente, sea  $y_1$  solución particular de la completa e  $y_c$  una solución cualquiera de la misma. Entonces,

$$\begin{aligned} (y_c - y_1)' + p(y_c - y_1) &= y_c' - y_1' + py_c - py_1 \\ (y_c' + py_c) - (y_1' + py_1) &= q - q = 0, \end{aligned}$$

es decir  $y_c - y_1$  es solución de la homogénea. Llamando  $y_h = y_c - y_1$ , queda  $y_c = y_1 + y_h$  siendo  $y_h$  solución de la homogénea.

7. Podemos escribir la ecuación en la forma

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{3x}{2},$$

es decir es lineal. Usando la fórmula de la solución general:

$$ye^{\int (-1/2x)dx} - \int \frac{3x}{2}e^{\int (-1/2x)dx} dx = C,$$

$$ye^{(-1/2)\log|x|} - \frac{3}{2} \int xe^{(-1/2)\log|x|} dx = C,$$

$$\frac{y}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = C, \quad \frac{y}{\sqrt{x}} - x^{3/2} = C$$

La solución general de la ecuación es por tanto  $y = C\sqrt{x} + x^2$ .

8. La ecuación homogénea es

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x}y, \text{ o bien } \frac{dy}{y} + \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = 0.$$

Integrando,

$$\log|y| + 2x + \log|y| = K, \quad \log|yx| = K - 2x,$$

$$yx = e^K e^{-2x} = C e^{-2x}, \quad y = C \frac{e^{-2x}}{x}.$$

Obligüemos a que  $y = C(x)e^{-2x}/x$  sea solución de la completa:

$$C'(x) \frac{e^{-2x}}{x} + C(x) \frac{-2e^{-2x}x - e^{-2x}}{x^2} + \frac{2x+1}{x} C(x) \frac{e^{-2x}}{x} = e^{-2x}.$$

Multiplicando por  $e^{2x}$  :

$$\frac{C'(x)}{x} + C(x) \frac{-2x-1}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2} C(x) = 1,$$

$$C'(x) = x, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

La solución general de la completa es por tanto

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-2x}.$$

9. La solución general de la homogénea sabemos que es  $y_h = Ke^{-\int p dx}$ , por tanto la solución general de la completa es  $y = y_1 + y_h$ , o bien  $y - y_1 = Ke^{-\int p dx}$ . La solución  $y_2$  se obtendrá dando a  $K$  un valor  $K_1$ , es decir  $y_2 - y_1 = K_1 e^{-\int p dx}$ , lo cual implica

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Ke^{-\int p dx}}{K_1 e^{-\int p dx}} = \frac{K}{K_1} = C.$$

10. Se trata de una ecuación lineal, por tanto su solución general es

$$xe^{\int 2tdt/(3+t^2)} - \int e^t e^{\int 2tdt/(3+t^2)} dt = C,$$

$$xe^{\log(t^2+3)} - \int e^t e^{\log(t^2+3)} dt, \quad x(t^2+3) - \int (t^2+3)e^t dt.$$

Aplicando dos veces el método de integración por partes, fácilmente obtenemos

$$\int (t^2+3)e^t dt = (t^2 - 2t + 5)e^t,$$

y por tanto la solución general es

$$x(t^2+3) - (t^2 - 2t + 5)e^t = C.$$

Particularizando para  $t = 0$ ,  $x = 0$  obtenemos  $C = -5$ , luego la solución particular pedida es

$$x = \frac{(t^2 - 2t + 5)e^t - 5}{t^2 + 3},$$

y su intervalo máximo de continuidad es claramente  $(-\infty, +\infty)$ .

## 15.9. Ecuación diferencial de Bernoulli

1. Resolver la ecuación diferencial  $xy' = y + 2xy^2$ .
2. Demostrar que la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal mediante la sustitución  $v = y^{1-n}$ .
3. Resolver la ecuación diferencial  $x^3y' = 2x^2y + y^3$ .

**Solución.** Recordamos que se llama *ecuación de Bernoulli* a toda ecuación de la forma  $y' + py = qy^n$  con  $p$  y  $q$  funciones de  $x$  y  $n$  número real distinto de 0 y de 1. Si  $n = 1$  la ecuación es de variables separadas y si  $n = 0$ , es lineal. La ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal mediante la sustitución  $v = y^{1-n}$ .  $\square$

1. Dividiendo entre  $x$  obtenemos

$$y' - \frac{1}{x}y = 2y^2, \quad \text{o bien } y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = 2,$$

que es una ecuación de Bernoulli. Efectuando el cambio  $v = y^{-1}$  queda  $v' = -y^{-2}y'$ , por tanto la ecuación se transforma en

$$-v' - \frac{1}{x}v = 2, \quad \text{o bien } v' + \frac{1}{x}v = -2.$$

Usando la fórmula de la solución general de la ecuación lineal:

$$ve^{\int (1/x) dx} + 2 \int e^{\int (1/x) dx} dx = C,$$

$$ve^{\log|x|} + 2 \int e^{\log|x|} dx = C,$$

$$vx + 2 \int x dx = C, \quad vx + x^2 = C.$$

Sustituyendo  $v = 1/y$  obtenemos

$$\frac{x}{y} + x^2 = C, \quad \text{o bien } y = \frac{x}{C - x^2},$$

que es la solución general de la ecuación dada.

2. Dividiendo la ecuación de Bernoulli  $y' + py = qy^n$  entre  $y^n$  :

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q. \quad (1)$$

Derivando respecto de  $x$  la igualdad  $v = y^{1-n}$  :

$$v' = (1 - n)y^{-n}y'. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) queda:

$$\frac{v'}{1 - n} + pv = q, \quad \text{o bien } v' + (1 - n)pv = (1 - n)q,$$

que es una ecuación lineal en  $v$ .

3. Dividiendo entre  $x^3$  :

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}y^3, \quad \text{o bien } , y^{-3}y' - \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}$$

es decir, es una ecuación de Bernoulli. Efectuando el cambio  $v = y^{-2}$  queda  $v' = -2y^{-3}y'$ , por tanto la ecuación se transforma en

$$\frac{v'}{-2} - \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^3}, \quad \text{o bien } v' + \frac{4}{x}v = -\frac{2}{x^3}.$$

Usando la fórmula de la solución general de la ecuación lineal:

$$ve^{\int(4/x) dx} - \int -\frac{2}{x^3}e^{\int(4/x) dx} dx = C,$$

$$ve^{4\log|x|} + 2 \int \frac{e^{4\log|x|}}{x^3} dx = C,$$

$$vx^4 + 2 \int x dx = C, \quad vx^4 + x^2 = C.$$

Sustituyendo  $v = 1/y^2$  obtenemos

$$\frac{x^4}{y^2} + x^2 = C, \quad \text{o bien } x^4 = y^2(C - x^2),$$

que es la solución general de la ecuación dada.

### 15.10. Ecuación diferencial de Riccati

1. Resolver la ecuación  $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$ , sabiendo que tiene la solución particular  $y_1 = x$ .

2. Se considera la ecuación de Riccati:

$$y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}.$$

(a) Encontrar una solución de la forma  $y = x^m$  con  $m$  real.

(b) Encontrar la solución particular  $y = y(x)$  que verifica  $y(1) = 2$ .

3. Demostrar que si  $y_1$  es una solución particular de la ecuación de Riccati  $y' = py^2 + qy + r$ , entonces la sustitución  $y = y_1 + \frac{1}{v}$  la transforma en lineal.

4. Hallar una solución de la ecuación diferencial  $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$ , de la forma  $y = a/x$ .

**Solución.** Recordamos que se llama *ecuación de Riccati* a toda ecuación de la forma  $y' = py^2 + qy + r$  con  $p, q$  y  $r$  funciones de  $x$  y  $p$  no idénticamente nula. Si  $y_1$  es una solución particular de la ecuación de Riccati, la sustitución  $y = y_1 + 1/v$  la transforma en lineal.  $\square$

1. Es una ecuación de Riccati. Veamos que efectivamente  $y_1 = x$  es solución de la ecuación,

$$\begin{aligned} y_1' + xy_1^2 - (2x^2 + 1)y_1 + x^3 + x - 1 \\ = 1 + x^3 - (2x^2 + 1)x + x^3 + x - 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Efectuando la sustitución  $y = x + \frac{1}{v}$ :

$$1 - \frac{v'}{v^2} + x \left(x + \frac{1}{v}\right)^2 - (2x^2 + 1) \left(x + \frac{1}{v}\right) + x^3 + x - 1 = 0.$$

Simplificando, queda la ecuación lineal  $v' + v = x$ , cuya solución general es

$$ve^{\int dx} - \int xe^{\int dx} dx = C, \quad ve^x - \int xe^x dx = C,$$

$$ve^x - e^x(x - 1) = C, \quad v = Ce^{-x} + x - 1,$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{Ce^{-x} + x - 1}.$$



Usando  $\frac{1}{v} = y - x$ , obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = \frac{1}{Ce^{-x} - x + 1} + x.$$

2. (a) Obliguemos a que  $y = x^m$  sea solución de la ecuación:

$$mx^{m-1} = x^{2m} - x^{m-1} - x^{-2}.$$

Si  $m = -1$ , el primer miembro es  $-x^{-2}$  y el segundo, también  $x^{-2}$ . Por tanto  $y = 1/x$  es solución.

(b) Efectuando el cambio  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$  :

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xv} - \frac{1}{x^2}.$$

Simplificando obtenemos la ecuación lineal

$$v' + \frac{1}{x}v = -1.$$

Hallemos su solución general:

$$ve^{\int(1/x)dx} - \int -e^{\int(1/x)dx} dx = C, \quad ve^{\log|x|} + \int e^{\log|x|} dx = C,$$

$$vx + \int x dx, \quad vx + \frac{x^2}{2} = C. \quad (*)$$

La condición inicial  $y(1) = 2$  equivale a  $y(1) = 1/1 + 1/v(1)$  es decir, a  $v(1) = 1$ . Sustituyendo  $x = 1, v = 1$  en (\*), obtenemos  $C = 3/2$ . La solución particular pedida es por tanto

$$v = \frac{3 - x^2}{2x},$$

y deshaciendo el cambio:

$$y = \frac{x^2 + 3}{x(3 - x^2)}.$$

3. Sustituyendo  $y = y_1 + \frac{1}{v}$  en  $y' = py^2 + qy + r$  :

$$\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)' = p\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + q\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r,$$

$$y_1' - \frac{v'}{v^2} = py_1^2 + 2p\frac{y_1}{v} + \frac{p}{v^2} + qy_1 + \frac{q}{v} + r.$$

Como  $y_1$  es solución de  $y' = py^2 + qy + r$  se verifica  $y_1' = py_1^2 + qy_1 + r$ , por tanto

$$-\frac{v'}{v^2} = 2p\frac{y_1}{v} + \frac{p}{v^2} + \frac{q}{v}.$$

Simplificando, queda

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{2py_1v + p + qv}{v^2},$$

o bien

$$v' + (2py_1 + q)v = -p,$$

que es una ecuación lineal en  $v$ .

4. La ecuación se puede escribir en la forma:

$$y' = -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2x^2},$$

es decir, es una ecuación de Riccati. Ensayando soluciones de la forma  $y = a/x$ :

$$-\frac{a}{x^2} = -\frac{a^2}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}, \quad \frac{a^2 - 2a + 1}{x^2} = 0, \quad \frac{(a-1)^2}{x^2} = 0.$$

Deducimos que  $a = 1$ , es decir una solución particular es  $y = \frac{1}{x}$ .

## 15.11. Cambios de variable en las ecuaciones diferenciales

1. Demostrar que sustitución  $z = ax + by$  transforma la ecuación  $y' = f(ax + by + c)$ , en una de variables separadas.

2. Demostrar que la expresión  $x dx + y dy$ , se transforma mediante la sustitución  $u = x^2 + y^2$  en  $du/2$ .

3. Efectuar una adecuada sustitución que transforme la siguiente ecuación en una de variables separadas

$$(xy + 1)dx + 2x(2xy - 1)dy = 0.$$

4. Efectuar el cambio de variable  $y = v - x$  para transformar la ecuación  $(x + y)dx + dy = 0$  en una de variables separadas, e integrarla.

5. a) Demostrar que toda ecuación del tipo  $xy' - y = f(x)g(y/x)$  se transforma en una de variables separadas mediante la sustitución  $y = vx$ .  
 b) Aplicación: resolver la ecuación diferencial

$$xy' - y = 2x \frac{y^2 - x^2}{x^4 - 1}.$$

6. Demostrar que la expresión  $xdy - ydx$ , se transforma mediante la sustitución  $v = x/y$  en  $-x^2dv/v^2$  y mediante  $v = y/x$  en  $x^2dv$ .

**Solución.** 1. Se verifica  $dz = adx + bdy$ , por tanto

$$\begin{aligned} y' = f(ax + by + c) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(z + c) \Leftrightarrow \frac{dz - adx}{bdx} = f(z + c) \\ &\Leftrightarrow dz - adx = bf(z + c)dx \Leftrightarrow (bf(z + c) + a)dx - dz, \end{aligned}$$

que claramente es una ecuación de variables separadas.

2. Diferenciando  $u = x^2 + y^2$  obtenemos  $du = 2xdx + 2ydy$ , por tanto  $xdx + ydy = du/2$ .

3. La repetición de  $xy$ , sugiere la sustitución  $v = xy$ , con lo cual  $dv = ydx + xdy$ . La ecuación dada se transforma en

$$\begin{aligned} (v + 1)dx + 2x(2v - 1)\frac{dv - ydx}{x} &= 0, \\ x(v + 1)dx + 2x^2(2v - 1)\left(dv - \frac{v}{x}dx\right) &= 0. \end{aligned}$$

Operando queda

$$x(1 + 3v - 4v^2)dx + 2x(2v - 1) = 0,$$

que es una ecuación de variables separadas.

4. El cambio  $y = v - x$  transforma la ecuación en la forma  $vdx + dv - dx = 0$  o equivalentemente  $(v - 1)dx + dv = 0$ , que es de variables separadas. Tenemos

$$dx + \frac{dv}{v - 1} = 0, \quad \int dx + \int \frac{dv}{v - 1} = K, \quad x + \log(v - 1) = K,$$

$$\log e^x(x + y - 1) = K, \quad e^x(x + y - 1) = e^K.$$

La solución general es por tanto  $e^x(x + y - 1) = C$ .

5. a) Derivando  $y = vx$ , obtenemos  $y' = v'x + v$ . Sustituyendo en la ecuación:

$$x \left( x \frac{dv}{dx} + v \right) - vx = f(x)g(v),$$

$$x^2 \frac{dv}{dx} = f(x)g(v), \quad f(x)g(v)dx - x^2 dv = 0,$$

ecuación de variables separadas.

b) Podemos expresar

$$2x \frac{y^2 - x^2}{x^4 - 1} = \frac{2x}{x^4 - 1} \cdot x^2 \left( \frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = \frac{2x^3}{x^4 - 1} (v^2 - 1).$$

Entonces,

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^4 - 1}, \quad g(v) = v^2 - 1,$$

y la ecuación se transforma en

$$\frac{2x^3}{x^4 - 1} (v^2 - 1) dx - x^2 dv = 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{2x dx}{x^4 - 1} - \frac{dv}{v^2 - 1} = 0.$$

Integrando:

$$\int \frac{2x dx}{x^4 - 1} - \int \frac{dv}{v^2 - 1} = k, \quad \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 - 1} - \int \frac{dv}{v^2 - 1} = k.$$

Usando que

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right|, \quad \text{queda:}$$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| - \frac{1}{2} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| = k, \quad \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{v + 1}{v - 1} \right| = 2k,$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{v + 1}{v - 1} = e^{2k}, \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{y/x + 1}{y/x - 1} = c, \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{y + x}{y - x} = c.$$

Despejando  $y$ , y agrupando constantes queda:

$$y = x \frac{x^2 + C}{Cx^2 + 1}.$$

6. Diferenciando  $v = x/y$ :

$$dv = \left( \frac{x}{y} \right)' dx = \frac{y - y'x}{y^2} dx = \frac{y - \frac{dy}{dx} \cdot x}{y^2} dx$$

$$= \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{x^2/v^2} = -\frac{xdy - ydx}{x^2}v^2,$$

es decir  $xdy - ydx = -x^2dv/v^2$ .

Diferenciando  $v = y/x$  :

$$dv = \left(\frac{y}{x}\right)' dx = \frac{y'x - y}{x^2} dx = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot x - y}{x^2} dx = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

es decir  $xdy - ydx = x^2dv$ .

### 15.12. Ecuación diferencial con paso a polares

- (a) Expresar  $xdx + ydy$  y  $xdy - ydx$  en coordenadas polares.
- (b) Como aplicación, resolver la ecuación

$$(x^2 + y^2)(xdx + ydy) + (x^2 + y^2 - 2x + 2y).$$

**Solución.** (a) De las relaciones  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  deducimos

$$xdx + ydy = \rho \cos \theta (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) + \rho \sin \theta (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) =$$

$$\rho(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)d\rho + \rho^2(-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)d\theta = \rho d\rho.$$

$$xdy - ydx = \rho \cos \theta (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) - \rho \sin \theta (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) =$$

$$\rho(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)d\rho + \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)d\theta = \rho^2 d\theta.$$

- (b) Usando el apartado anterior, la ecuación diferencial dada se transforma en

$$\rho^3 d\rho + (\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta)\rho^2 d\theta = 0.$$

Dividiendo entre  $\rho^3$ , podemos expresar la ecuación anterior en la forma

$$\frac{d\rho}{d\theta} - \rho = 2(\sin \theta - \cos \theta).$$

Esta ecuación es del tipo  $\rho' + p(\theta)\rho = q(\theta)$  es decir, lineal. Sabemos que su solución general es

$$\rho e^{\int p(\theta)d\theta} - \int q(\theta)e^{\int p(\theta)d\theta} d\theta = C$$

En nuestro caso queda

$$ye^{-\theta} - 2 \int (\sin \theta - \cos \theta)d\theta = C.$$

Aplicando el método de integración por partes, obtenemos la solución general de la ecuación dada:  $\rho = Ce^\theta - 2 \sin \theta$ .

### 15.13. Máquina quitanieves

Una máquina quitanieves desplaza un volumen de  $V$  ( $\text{m}^3/\text{hora}$ ), barriendo una anchura  $a$  (m) de la carretera. Su velocidad cuando avanza por la carretera varía según la cantidad de nieve precipitada para mantener  $V$  constante en el tiempo. Nieva regularmente, de manera que la altura de nieve crece a razón de  $r$  (m/hora). Después de empezar a nevar, la máquina empieza la limpieza de la carretera en  $t = 0$  (horas). Se pide:

- (a) Plantear la ecuación diferencial que satisface la longitud de carretera  $x(t)$  (Km) limpiada por la máquina. Determinar la solución.  
 (b) En la primera hora de trabajo, la máquina ha limpiado 2 Km de carretera y en la segunda hora ha avanzado 1 Km más. Si la máquina empezó la limpieza a las 12 h del mediodía, determinar en qué momento empezó a nevar.

**Solución.** (a) La máquina empieza a funcionar en el instante  $t = 0$ , en consecuencia empezó a nevar en el instante  $t = t_0$  ( $t_0 < 0$ ). Llamemos  $h(t)$  a la altura de la nieve en la carretera en el instante  $t$ , y sea  $h_0 = h(0)$  la altura inicial, es decir cuando la máquina empieza a funcionar. Teniendo en cuenta que nieva regularmente, se verifica  $h(t) = h_0 + rt$ . Como la máquina mantiene constante el volumen de nieve quitado, se verifica

$$x'(t) = \frac{V}{ah(t)}, \text{ o bien } x'(t) = \frac{V}{a} \frac{1}{h_0 + rt},$$

que es la ecuación diferencial que verifica  $x(t)$ . Integrando obtenemos

$$x(t) = \frac{V}{a} \int \frac{dt}{h_0 + rt} = \frac{V}{ar} \log(h_0 + rt) + C \quad (C \text{ constante}).$$

Usando la condición inicial  $x(0) = 0$ ,

$$0 = \frac{V}{ar} \log h_0 + C,$$

con lo cual

$$x(t) = \frac{V}{ar} (\log(h_0 + rt) - \log h_0) = \frac{V}{ar} \log \left( 1 + \frac{rt}{h_0} \right).$$

(b) Utilizando las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} x(1) = 2 \\ x(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{ar} \log \left( 1 + \frac{r}{h_0} \right) = 2 \\ \frac{V}{ar} \log \left( 1 + \frac{2r}{h_0} \right) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 \log \left( 1 + \frac{r}{h_0} \right) = 2 \log \left( 1 + \frac{2r}{h_0} \right) \Rightarrow 1 + \frac{2r}{h_0} = \left( 1 + \frac{r}{h_0} \right)^{3/2}.$$

Llamando  $A = r/h_0$  y elevando al cuadrado, obtenemos  $(1+2A)^2 = (1+A)^3$  o bien

$$A(A^2 - A - 1) = 0, \quad A = 0, \quad A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como  $A$  es positivo, sólo tiene sentido la solución  $A = (1 + \sqrt{5})/2$ . De la igualdad  $h(t) = h_0 + rt$  obtenemos  $0 = h_0 + rt_0$ , con lo cual  $t_0 = -h_0/r$ . Por tanto

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{r}{h_0} = -\frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = -\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \approx -0,61.$$

Es decir, empezó a llover aproximadamente las 11.39 h de la mañana, que son (aproximadamente) las 11 h 23 m de la mañana.

### 15.14. Lineal, Bernoulli y Riccati

Resolver los siguientes problemas de valores iniciales, escribiendo en cada caso la solución forma explícita, y su intervalo de continuidad.

a)  $x' = \frac{t}{1+t^2} x + t, \quad x(0) = 2.$

b)  $x' = -\frac{tx}{1+t^2} - tx^2, \quad x(0) = 1/2.$

c)  $x' = \frac{t-t^3}{4(1+t^2)} + \frac{t^3}{1+t^2} x - tx^2, \quad x(0) = 1.$

Indicación: la ecuación tiene una solución particular constante.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** a) Es una ecuación lineal. La ecuación homogénea asociada es

$$\frac{dx}{x} - \frac{t dt}{1+t^2} = 0.$$

Integrando:

$$\log |x| - \frac{1}{2} \log(1+t^2) = K, \quad \log \left| \frac{x}{\sqrt{1+t^2}} \right| = K, \quad x = C\sqrt{1+t^2}.$$

Usaremos el método de variación de la constante, es decir obligamos a que la función  $x = C(t)\sqrt{1+t^2}$  sea solución de la lineal completa:

$$C'(t)\sqrt{1+t^2} + C(t) \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{1+t^2} C(t)\sqrt{1+t^2} + t$$

$$\Leftrightarrow C'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Leftrightarrow C(t) = \sqrt{1+t^2} + C_1.$$

La solución general de la completa es por tanto  $x = \sqrt{1+t^2} (\sqrt{1+t^2} + C_1)$ . Imponiendo  $x(0) = 2$  obtenemos  $C_1 = 1$ , en consecuencia la solución pedida es

$$x = \sqrt{1+t^2} + 1 + t^2.$$

Su intervalo de continuidad es  $(-\infty, +\infty)$ .

b) Es una ecuación de Bernoulli. Dividiendo la ecuación entre  $x^2$ :

$$\frac{x'}{x^2} = -\frac{t}{x(1+t^2)} - t.$$

Efectuando el cambio  $v = 1/x$  obtenemos  $v' = -x'/x^2$  y la ecuación se transforma en

$$v' = \frac{t}{1+t^2}v + t.$$

La condición  $x(0) = 1/2$  equivale a  $v(0) = 2$ . Pero esta es exactamente el problema que se resolvió en el apartado anterior. Dado que  $v = 1/x$ , la solución pedida es por tanto

$$x = \frac{1}{1+t^2 + \sqrt{1+t^2}}.$$

El intervalo de continuidad es  $(-\infty, +\infty)$ .

c) Es una ecuación de Riccati. Obligando a que la función constante  $x = a$  sea solución de la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{t-t^3}{4(1+t^2)} + \frac{t^3}{1+t^2}a + ta^2 \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{t-t^3+4t^3a-4(1+t^2)ta^2}{4(1+t^2)} \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{(-4a^2+4a-1)t^3+(1-4a^2)t}{4(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Para que la última igualdad sea una identidad, el polinomio del numerador ha de ser idénticamente nulo es decir, cuando  $-4a^2+4a-1=0$  y  $1-4a^2=0$ . Esta última igualdad se verifica para  $a = \pm 1/2$  pero solamente  $a = 1/2$  verifica la primera. Concluimos que  $x = 1/2$  es solución de la ecuación diferencial dada. Efectuando el cambio  $x = 1/2 + 1/v$  obtenemos



$x' = -v'/v^2$ . Sustituyendo en la ecuación dada, operando y simplificando obtenemos

$$v' = \frac{t}{1+t^2}v + t.$$

La condición  $x(0) = 1$  equivale a  $v(0) = 2$ . Pero de nuevo, este es exactamente el problema que se resolvió en el apartado *a*). Dado que  $x = 1/2 + 1/v$ , la solución pedida es por tanto

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+t^2 + \sqrt{1+t^2}}.$$

El intervalo de continuidad es  $(-\infty, +\infty)$ .



## Capítulo 16

# Transformadas de Laplace

### 16.1. Concepto de transformada de Laplace

1. Calcular la transformada de Laplace de  $f(t) = 1$ .
2. Calcular  $\mathcal{L}\{t\}$ .
3. Calcular la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{at}$ .
4. Calcular  $\mathcal{L}\{\text{sen } bt\}$ .
5. Demostrar que  $\mathcal{L}\{\text{cos } bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$ .

**Solución.** Recordamos que si  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, se llama *transformada de Laplace* de la función  $f$  y se representa por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  o por  $\mathcal{L}\{f\}$  a

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

para todos los valores de  $s$  para los cuales exista y sea finita la integral anterior.  $\square$

1.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} \underset{\substack{= \\ \text{si } s > 0}}{-\frac{1}{s}} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{s}.$$

Si  $s \leq 0$  la integral es divergente, por tanto  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ,  $s > 0$ .

2. Usando la fórmula de integración por partes,

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s^2} (st + 1) \right]_0^{+\infty}.$$

Calculando el correspondiente límite obtenemos fácilmente

$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left[ \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^{+\infty} \\ &\stackrel{\substack{= \\ \text{si } s > a}}{=} \frac{1}{a-s} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \end{aligned}$$

4. Usando la fórmula de integración por partes y que las funciones seno y coseno están acotadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sen } bt\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \text{sen } bt dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} (s \text{sen } bt + b \cos bt) \right]_0^{+\infty} \\ &= - \left[ \frac{e^{-st} s \text{sen } bt}{s^2 + b^2} \right]_0^{+\infty} - \left[ \frac{e^{-st} b \cos bt}{s^2 + b^2} \right]_0^{+\infty} \\ &\stackrel{\substack{= \\ \text{si } s > 0}}{=} - (0 - 0) - \left( 0 - \frac{b}{s^2 + b^2} \right) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

5. Usando la fórmula de integración por partes y que las funciones seno y coseno están acotadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos bt\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos bt dt = \left[ \frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} (-s \cos bt + b \text{sen } bt) \right]_0^{+\infty} \\ &= - \left[ \frac{se^{-st}}{s^2 + b^2} \cos bt \right]_0^{+\infty} + \left[ \frac{be^{-st}}{s^2 + b^2} \text{sen } bt \right]_0^{+\infty} \\ &\stackrel{\substack{= \\ \text{si } s > 0}}{=} - \left( 0 - \frac{s}{s^2 + b^2} \right) + (0 - 0) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

## 16.2. Funciones de orden exponencial

Una función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es de orden exponencial si, y sólo si existen  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$ ,  $M > 0$  tales que

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \text{ si } t > t_0.$$

1. Demostrar que toda función acotada es de orden exponencial.
2. Demostrar que  $\sin bt$  y  $\cos bt$  son de orden exponencial.
3. Demostrar que  $f(t) = e^{at} \sin bt$  es de orden exponencial.
4. Demostrar que  $f(t) = t^n$  con  $n$  entero positivo, es de orden exponencial.
5. Demostrar que  $f(t) = e^{t^2}$  no es de orden exponencial.

**Solución.** 1. Si  $f$  está acotada, existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| < M$  para todo  $t > 0$ , y por tanto

$$|f(t)| < Me^{0t} \text{ si } t > 0,$$

luego  $f$  es de orden exponencial.

2. Ambas funciones son acotadas y como consecuencia del ejercicio anterior, de orden exponencial.

3. Para todo  $t$  real,  $|e^{at} \sin bt| = e^{at} |\sin bt| \leq e^{at}$ . Basta por tanto elegir  $t_0 = 0$ ,  $\alpha = a$ ,  $M = 1$ .

4. Se verifica  $\frac{t^n}{e^t} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Eligiendo  $M = 1$ , y por la definición de límite en el infinito, existe  $t_0 > 0$  tal que  $\left| \frac{t^n}{e^t} \right| < 1$ , es decir  $|t^n| < e^t$  si  $t > t_0$ , luego  $f(t)$  es de orden exponencial.

5. Si existieran  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$ ,  $M > 0$  tales que  $|f(t)| < Me^{\alpha t}$  para todo  $t > t_0$ , entonces  $e^{t^2 - \alpha t} < M$  lo cual es absurdo pues  $t^2 - \alpha t \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

## 16.3. Existencia y linealidad de la transformada de Laplace

1. Demostrar el teorema de existencia de la transformada de Laplace:

Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo  $[0, b]$  con  $b > 0$ , y de orden exponencial, es decir existen  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$ ,  $M > 0$  tales que

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \text{ si } t > t_0.$$

Entonces, existe  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  para  $s > \alpha$ .

2. Demostrar el teorema de linealidad de la transformada de Laplace: Sean  $f$  y  $g$  dos funciones para las que existe la transformada de Laplace y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\} = \lambda \mathcal{L}\{f\} + \mu \mathcal{L}\{g\}.$$

3. Usando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, hallar  $\mathcal{L}\{\sin^3 bt\}$ .

**Solución.** 1. Tenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Por la hipótesis de la continuidad a trozos, existe la primera integral del segundo miembro. Veamos que existe la segunda. Para  $t > t_0$ ,

$$e^{-st} |f(t)| < e^{-st} M e^{\alpha t} = M e^{-(s-\alpha)t}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} M e^{-(s-\alpha)t} dt &= \left[ -\frac{M e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \right]_{t_0}^{+\infty} = \frac{M}{s-\alpha} \left[ -e^{-(s-\alpha)t} \right]_{t_0}^{+\infty} \\ &= \frac{M}{s-\alpha} \left( 0 + e^{-(s-\alpha)t_0} \right) = \frac{M e^{-(s-\alpha)t_0}}{s-\alpha} \text{ si } s > \alpha. \end{aligned}$$

Es decir, existe  $\int_{t_0}^{+\infty} M e^{-(s-\alpha)t} dt$  si  $s > \alpha$ . Como  $0 \leq e^{-st} |f(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t}$ , la integral  $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  es absolutamente convergente, y por tanto convergente.

2. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt + \mu \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt = \lambda \mathcal{L}\{f\} + \mu \mathcal{L}\{g\}. \end{aligned}$$

3. Usando la fórmula de De Moivre y la del binomio de Newton,

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sen^2 x) + (3 \cos^2 x \sen x - \sen^3 x) i \\
 \Rightarrow \sen 3x &= 3 \cos^2 x \sen x - \sen^3 x = 3(1 - \sen^2 x) \sen x - \sen^3 x \\
 \Rightarrow \sen^3 x &= \frac{3}{4} \sen x - \frac{1}{4} \sen 3x \Rightarrow \sen^3 bt = \frac{3}{4} \sen bt - \frac{1}{4} \sen 3bt.
 \end{aligned}$$

Usando la linealidad de la transformada de Laplace y la tabla de transformadas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sen^3 bt\} &= \frac{3}{4} \mathcal{L}\{\sen bt\} - \frac{1}{4} \mathcal{L}\{\sen 3bt\} \\
 &= \frac{3}{4} \frac{b}{s^2 + b^2} - \frac{1}{4} \frac{3b}{s^2 + 9b^2} = \frac{6b^3}{(s^2 + b^2)(s^2 + 9b^2)}.
 \end{aligned}$$

### 16.4. Transformada de Laplace de las derivadas

1. Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y de orden exponencial  $e^{\alpha t}$ . Sea  $f'$  continua a trozos en todo intervalo  $[0, b]$ . Demostrar que existe  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  para todo  $s > \alpha$  y además

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

*Nota.* En general se verifica:

Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivadas continuas hasta orden  $n - 1$  y todas ellas de orden exponencial  $e^{\alpha t}$ . Sea  $f^{(n)}$  continua a trozos en todo intervalo  $[0, b]$ . Entonces, existe  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$  para todo  $s > \alpha$  y además

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

2. Sabiendo que  $\mathcal{L}\{\sen^2 bt\} = \frac{2b^2}{s(s^2 + 4b^2)}$ , hallar  $\mathcal{L}\{\sen bt \cos bt\}$ .

3. Sabiendo que  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ , hallar  $\mathcal{L}\{t^4\}$ .

4. Sabiendo que  $\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{24}{s^5}$ , hallar  $\mathcal{L}\{t^8\}$ .

**Solución.** 1. Por definición de transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st} f'(t) dt,$$

para los valores de  $s$  para los cuales existe el límite anterior. Por la hipótesis de continuidad a trozos de la derivada de  $f$ , en cualquier intervalo cerrado  $[0, R]$ ,  $f'$  tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades  $c_i$  tales que

$$0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq R.$$

Podemos por tanto expresar

$$\int_0^R e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{c_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} e^{-st} f'(t) dt + \cdots + \int_{c_n}^R e^{-st} f'(t) dt.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes a cada uno de los sumandos del segundo miembro:

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^{c_1-} + s \int_0^{c_1} e^{-st} f(t) dt + [e^{-st} f(t)]_{c_1+}^{c_2-} \\ &+ s \int_{c_1}^{c_2} e^{-st} f(t) dt + \cdots + [e^{-st} f(t)]_{c_n+}^{R-} + s \int_{c_n}^R e^{-st} f(t) dt. \quad (1) \end{aligned}$$

Por hipótesis,  $f$  es continua para todo  $t \geq 0$ , en consecuencia

$$f(c_1-) = f(c_1+), f(c_2-) = f(c_2+), \dots, f(c_n-) = f(c_n+).$$

Simplificando la igualdad (1) obtenemos

$$\int_0^R e^{-st} f'(t) dt = -f(0) + e^{-sR} f(R) + s \int_0^R e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

Dado que  $f$  es de orden exponencial  $e^{\alpha t}$ , existen  $t_0 > 0$ ,  $M > 0$  tales que  $e^{-\alpha t} |f(t)| < M$  si  $t > t_0$ , luego  $|e^{-sR} f(R)| < M e^{-(s-\alpha)R}$  si  $R > t_0$ . Entonces, si  $s > \alpha$ ,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-sR} f(R) = 0.$$

Tomando límites en (2) obtenemos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\},$$

lo cual prueba el resultado.

2. Si  $f(t) = \operatorname{sen}^2 bt$ , entonces  $f'(t) = 2b \operatorname{sen} bt \cos bt$  y claramente se verifican las hipótesis para el cumplimiento de

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} 2b\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt \cos bt\} &= \frac{2b^2 s}{s(s^2 + 4b^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt \cos bt\} &= \frac{b}{s^2 + 4b^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$



3. Si  $f(t) = t^4$ , entonces  $f''(t) = 12t^2$  y claramente se verifican las hipótesis para el cumplimiento de

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

Por tanto,

$$12 \cdot \frac{2}{s^3} = s^2\mathcal{L}\{t^4\} - s \cdot 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^4\} = \frac{24}{s^5}.$$

4. Si  $f(t) = t^8$ , entonces  $f'(t) = 8t^7$ ,  $f^{(2)}(t) = 56t^6$ ,  $f^{(3)}(t) = 336t^5$ ,  $f^{(4)}(t) = 1680t^4$  y claramente se verifican las hipótesis para el cumplimiento de

$$\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} = s^4\mathcal{L}\{f(t)\} - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf^{(2)}(0) - f^{(3)}(0).$$

Por tanto,

$$1680 \cdot \frac{24}{s^5} = s^4\mathcal{L}\{t^8\} - s^3 \cdot 0 - s^2 \cdot 0 - s \cdot 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^8\} = \frac{40320}{s^9}.$$

## 16.5. Propiedades de traslación de las transformadas de Laplace

1. Demostrar la primera propiedad de traslación de las transformadas de Laplace:

Supongamos que  $f$  es una función tal que existe  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  para  $s > \alpha$ . Entonces, se verifica

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a) \text{ si } s > \alpha + a.$$

2. Demostrar la segunda propiedad de traslación de las transformadas de Laplace:

Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo  $[0, b]$  y de orden exponencial  $e^{at}$ . Sea  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha$  y definamos para  $a > 0$ :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < a \\ f(t - a) & \text{si } t > a. \end{cases}$$

Entonces,  $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$ .

3. Sabiendo que  $\mathcal{L}\{t^2\} = F(s) = \frac{2}{s^3}$  si  $s > 0$ , hallar  $\mathcal{L}\{e^{at}t^2\}$ .

4. Sabiendo que  $\mathcal{L}\{\sin t\} = F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$  si  $s > 0$ , hallar  $\mathcal{L}\{e^{at} \sin t\}$ .

5. Hallar  $\mathcal{L}\{g(t)\}$ , siendo

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \pi/2 \\ \cos t & \text{si } t > \pi/2. \end{cases}$$

**Solución.** 1. Por hipótesis,  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  si  $s > \alpha$ . Entonces,

$$F(s-a) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\},$$

igualdad válida para  $s-a > \alpha$  o equivalentemente para  $s > \alpha + a$ .

2. Efectuando la sustitución  $t = u + a$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_0^a e^{-st} g(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} F(s). \end{aligned}$$

3. Usando la primera propiedad de traslación,

$$\mathcal{L}\{e^{at} t^2\} = F(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a.$$

4. Usando la primera propiedad de traslación,

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin t\} = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2 + 1}, \quad s > a.$$

5. Tenemos  $\cos t = \cos(t + \pi/2 - \pi/2)$ . Llamando  $f(t) = \cos(t + \pi/2) = -\sin t$  queda:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \pi/2 \\ f(t - \pi/2) & \text{si } t > \pi/2. \end{cases}$$

Usando  $\mathcal{L}\{-\sin t\} = -1/(s^2 + 1)$  y la segunda propiedad de traslación,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = -\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2 + 1}, \quad s > 0.$$

## 16.6. Derivadas de las transformadas de Laplace

1. Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo  $[0, b]$  y de orden exponencial  $e^{\alpha t}$ . Demostrar que si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  para  $s > \alpha$ , se verifica

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \text{ si } s > \alpha.$$

2. Calcular  $\mathcal{L}\{t^2 \sin bt\}$ .

3. Calcular  $\mathcal{L}\{t^4 e^{at}\}$ .

**Solución.** 1. Derivando la igualdad  $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  respecto del parámetro  $s$  :

$$F'(s) = (-1)^1 \int_0^{+\infty} t e^{-st} f(t) dt,$$

$$F''(s) = (-1)^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-st} f(t) dt,$$

...

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} f(t) dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\},$$

de lo cual se deduce el resultado.

2. Sabemos que  $F(s) = \mathcal{L}\{\text{sen } bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$ ,  $s > 0$ . Por tanto,

$$\mathcal{L}\{t^2 \text{sen } bt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s).$$

Entonces,

$$\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2},$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \text{sen } bt\} = \frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{2b(3s^2 - b^2)}{(s^2 + b^2)^2}, \quad s > 0.$$

3. Sabemos que  $F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$ ,  $s > a$ . Por tanto,

$$\mathcal{L}\{t^4 e^{at}\} = (-1)^4 \frac{d^4}{ds^4} F(s).$$

Entonces,

$$\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{1}{(s - a)^2}, \quad \frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{2}{(s - a)^3}, \quad \frac{d^3}{ds^3} F(s) = -\frac{6}{(s - a)^4},$$

$$\mathcal{L}\{t^4 e^{at}\} = \frac{d^4}{ds^4} F(s) = \frac{24}{(s - a)^5}, \quad s > a.$$

## 16.7. Transformada inversa de Laplace

1. Calcular  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 9} \right\}$ .

2. Demostrar la propiedad de linealidad para la transformada inversa de Laplace.

3. Hallar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 9}$ .

4. Calcular  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s-2)(s^2+4)} \right\}$ .

5. Hallar la transformada de Laplace de la función

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 3 & \text{si } t = 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Concluir que la transformada inversa de Laplace de una función, no es única.

6. Calcular  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\}$ .

**Solución.** 1. Dado que  $\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$ , se verifica  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 9} \right\} = \cos 3t$ .

2. Supongamos que  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones para las que existen  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$  para  $s > \alpha$ . Entonces, para todo  $\lambda, \mu$  y por la linealidad de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\} + \mu \mathcal{L}\{g(t)\} = \lambda F(s) + \mu G(s).$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s) + \mu G(s)\} = \lambda f(t) + \mu g(t) = \lambda \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mu \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

3. Podemos expresar

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+2)^2 + (\sqrt{5})^2}.$$

Usando la linealidad de  $\mathcal{L}^{-1}$  y la transformada

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin bt\} = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-2t} \sin \sqrt{5}t.$$

4. Descomponiendo en fracciones simples obtenemos,

$$\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+4}.$$

Usando la linealidad de  $\mathcal{L}^{-1}$  y las transformadas

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}\{\text{sen } bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{\text{cos } bt\} = \frac{s}{s^2+b^2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}\text{sen } 2t - \frac{1}{2}\text{cos } 2t. \end{aligned}$$

5. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}g(t) dt = \int_0^2 e^{-st}dt + \int_2^{+\infty} e^{-st}dt \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_2^{+\infty} \underbrace{=}_{\text{si } s>0} -\frac{1}{s}(e^{-2s} - e^0) \\ &= -\frac{1}{s}(e^{-\infty} - e^{-2s}) = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que si  $f(t) = 1$  para todo  $t > 0$ , entonces  $\mathcal{L}\{f(t)\} = 1/s$  si  $s > 0$ . Dado que  $f \neq g$ , concluimos que la transformada inversa de Laplace no es única.

*Nota.* Si embargo, se demuestra que si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones continuas para todo  $t \geq 0$  que poseen la misma transformada de Laplace, entonces  $f(t) = g(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

6. Descomponiendo en fracciones simples, obtenemos

$$\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{6} \frac{1}{s+1} - \frac{4}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{7}{2} \frac{1}{s-3}.$$

Usando la linealidad de  $\mathcal{L}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} &= -\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= -\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

## 16.8. Convolución de dos funciones

1. Demostrar que la convolución es conmutativa.

2. Usando la convolución, hallar  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\}$ .

**Solución.** Recordamos la siguiente definición y teoremas

*Definición.* Sean  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas (o continuas a trozos en todo intervalo  $[0, b]$ ). Se define la convolución de las funciones  $f$  y  $g$  y se representa por  $f * g$  o bien por  $f(t) * g(t)$  a la función

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

*Teorema.* La convolución de dos funciones es conmutativa, es decir

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$$

*Teorema.* En las hipótesis de la definición, si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Es decir,  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$ .  $\square$

1. Efectuando el cambio  $v = t - u$ ,

$$\begin{aligned} g(t) * f(t) &= \int_0^t g(u)f(t-u) du = \int_t^0 g(t-v)f(v) (-dv) \\ &= \int_0^t f(v)g(t-v) dv = f(t) * g(t). \end{aligned}$$

2. Eligiendo  $f(t) = 1$  y  $g(t) = \text{sen } t$ ,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} = G(s).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) \\ &= g(t) * f(t) = \int_0^t g(u)f(t-u) du = \int_0^t \text{sen } u du \\ &= [-\cos u]_0^t = 1 - \cos t. \end{aligned}$$

### 16.9. Resolución de ecuaciones y sistemas mediante transformadas de Laplace

1. Resolver la ecuación  $x' - 2x = e^{5t}$ ,  $x(0) = 3$ .

2. Resolver la ecuación

$$x'' - 5x' + 4x = 4, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

3. Resolver la ecuación

$$x''' + x' = e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

4. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y + 8e^t \\ y' = 2x + y + 4e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

5. Resolver la ecuación  $x' - 2x = e^{5t}$ .

**Solución.** 1. Aplicando el operador  $\mathcal{L}$  a ambos miembros,

$$(s\mathcal{L}\{x\} - 3) - 2\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s - 5},$$

$$(s - 2)\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s - 5} + 3,$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{3s - 14}{(s - 2)(s - 5)} = F(s).$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$F(s) = \frac{3s - 14}{(s - 2)(s - 5)} = \frac{8}{3} \frac{1}{s - 2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s - 5}.$$

Por tanto,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}.$$

2. Aplicando el operador  $\mathcal{L}$  a ambos miembros,

$$(s^2\mathcal{L}\{x\} - 5s + 4) - 5(s\mathcal{L}\{x\}) + 4\mathcal{L}\{x\} = \frac{4}{s},$$

$$(s^2 - 5s + 4)\mathcal{L}\{x\} = \frac{4}{s} + 2,$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{2s + 4}{s(s^2 - 5s + 4)} = F(s).$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$F(s) = \frac{2s + 4}{s(s^2 - 5s + 4)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s - 4}.$$

Por tanto,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 1 - 2e^t + e^{4t}.$$

4. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y + 8e^t \\ y' = 2x + y + 4e^t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Resolver la ecuación  $x' - 2x = e^{5t}$ .

3. Aplicando el operador  $\mathcal{L}$  a ambos miembros,

$$s^3 \mathcal{L}\{x\} + s \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s - 1},$$

$$(s^3 + s) \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s - 1},$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s(s - 1)(s^2 + 1)} = F(s).$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$F(s) = \frac{1}{s(s - 1)(s^2 + 1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1/2}{s - 1} + \frac{s/2 - 1/2}{s^2 + 1}.$$

Por tanto,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

4. Aplicando el operador  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{cases} s \mathcal{L}\{x\} + 1 = 6 \mathcal{L}\{x\} - 3 \mathcal{L}\{y\} + \frac{8}{s - 1} \\ s \mathcal{L}\{y\} = 2 \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\} + \frac{4}{s - 1}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior en las incógnitas  $\mathcal{L}\{x\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x\} = \frac{-s + 7}{(s - 1)(s - 4)} \\ \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{(s - 1)(s - 4)}. \end{cases}$$



Descomponiendo en fracciones simples,

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-4},$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-2/3}{s-1} + \frac{2/3}{s-4}.$$

Aplicando  $\mathcal{L}^{-1}$  :

$$\begin{cases} x = -2e^t + e^{4t} \\ y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}. \end{cases}$$

5. En este caso, no nos dan condiciones iniciales. Esto implica que  $x(0) = C$  siendo  $C \in \mathbb{R}$ . Aplicando el operador  $\mathcal{L}$  a ambos miembros,

$$(s\mathcal{L}\{x\} - C) - 2\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s-5},$$

$$(s-2)\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s-5} + C,$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{(s-2)(s-5)} + \frac{C}{s-2} = F(s).$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$F(s) = \frac{-1/3 + C}{s-2} + \frac{1/3}{s-5} = \frac{K}{s-2} + \frac{1/3}{s-5}.$$

Por tanto,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = Ke^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

## 16.10. Miscelánea de transformadas de Laplace

1. Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo y de orden exponencial. Supongamos que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ . Demostrar que

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0.$$

A esta propiedad se la llama *propiedad del cambio de escala*.

2. *Transformada de Laplace de la integral*. Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo y de orden exponencial. Demostrar que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

3. *Transformada de Laplace de funciones periódicas.* Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos en todo intervalo y de orden exponencial. Supongamos además que  $f$  es periódica de periodo  $T > 0$ . Demostrar que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

4. Sea  $q > -1$  número real. Demostrar que  $\mathcal{L}\{t^q\} = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$ ,  $s > 0$ .

5. Se llama función *escala unitaria* o *función unitaria de Heaviside*, a la función

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}$$

Calcular  $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}$ .

6. Se define para  $\epsilon > 0$  la función

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } t > \epsilon \end{cases}$$

(a) Calcular  $\mathcal{L}\{f_\epsilon(t)\}$ .

(b) Calcular  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_\epsilon(t)\}$ .

**Solución.** 1. Efectuando la transformación  $t = u/a$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-s(u/a)} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-(s/a)u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

2. Llamemos  $g(t) = \int_0^t f(u) du$ . Entonces,  $g(0) = 0$  y  $g'(t) = f(t)$ . Aplicando  $\mathcal{L}$  a los dos miembros de la última igualdad,

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\mathcal{L}\{g'(t)\}}{s} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

3. Por definición de transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt.\end{aligned}$$

Efectuando la sustitución  $t = u + kT$  y usando la periodicidad de  $f$ ,

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-s(u+kT)} f(u+kT) du = e^{-ksT} \int_0^T e^{-su} f(u) du.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-su} f(u) du \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ksT}.$$

Para  $s > 0$  se verifica  $|e^{-sT}| < 1$ , por tanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ksT} = 1 + e^{-sT} + (e^{-sT})^2 + (e^{-sT})^3 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Queda

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

4. Efectuando la sustitución  $st = u$  con  $s > 0$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^q\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^q dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^q \frac{1}{s} du \\ &= \frac{1}{s^{q+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(q+1)-1} du = \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}.\end{aligned}$$

5. Tenemos para  $s > 0$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathcal{U}(t-a) dt = \int_0^a 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 - \frac{1}{s} [e^{-st}]_a^{+\infty} = -\frac{1}{s} (0 - e^{-as}) = \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

6. (a) Tenemos para  $s > 0$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_\epsilon(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f_\epsilon(t) dt = \int_0^\epsilon \frac{e^{-st}}{\epsilon} dt + \int_\epsilon^{+\infty} 0 dt \\ &= -\frac{1}{\epsilon s} [e^{-st}]_0^\epsilon + 0 = -\frac{1}{\epsilon s} (e^{-\epsilon s} - 1) = \frac{1 - e^{-\epsilon s}}{\epsilon s}.\end{aligned}$$

(b) Usando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_\epsilon(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\epsilon s}}{\epsilon s} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-\epsilon s}}{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon s} = 1.$$

## Capítulo 17

# Miscelánea de ecuaciones diferenciales

### 17.1. Trayectorias ortogonales y oblicuas

1. Determinar las trayectorias ortogonales de:

(a) La familia de parábolas  $y = ax^2$ .

(b) La familia de circunferencias  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ .

2. Hallar la familia de trayectorias oblicuas que corta a la familia de rectas  $y = ax$  formando un ángulo de  $\pi/4$ .

**Solución.** Recordamos los siguientes resultados teóricos:

*Teorema.* Si  $F(x, y, y') = 0$  es la ecuación diferencial de la familia de curvas  $f(x, y, a) = 0$ , entonces la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales (curvas que las cortan ortogonalmente) es

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

*Teorema.* Si  $F(x, y, y') = 0$  es la ecuación diferencial de la familia de curvas  $f(x, y, a) = 0$ , entonces la ecuación diferencial de las trayectorias oblicuas de ángulo  $\alpha \neq \pi/2$  (curvas que las cortan bajo un ángulo  $\alpha$ ) es

$$F\left(x, y, \frac{y' - m}{1 + my'}\right) = 0 \quad (m = \tan \alpha). \quad \square$$

1. (a) Derivando obtenemos  $y' = 2ax$  y eliminando  $a$  queda la ecuación  $y' = 2y/x$ . Sustituyendo en esta ecuación  $y'$  por  $-1/y'$  obtenemos la ecuación de las trayectorias ortogonales:  $-1/y' = 2y/x$ , o bien  $x dx + 2y dy = 0$ . Integrando, obtenemos la familia de elipses:

$$x^2 + y^2/2 = C \quad (C > 0).$$

(b) Derivando obtenemos  $2x + 2yy' - 2a = 0$ . Eliminando  $a$  queda la ecuación  $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$ , que es homogénea. Efectuando el cambio  $y = vx$ , dividiendo entre  $x^2$  y ordenando términos la ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{v^2 + 1} = 0.$$

Integrando,

$$\log|x| + \log|v^2 + 1| = K, \log|x(v^2 + 1)| = K, x(v^2 + 1) = C.$$

Sustituyendo  $v = y/x$  obtenemos la familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 - Cx = 0.$$

2. Tenemos  $m = \tan(\pi/4) = 1$ . Derivando obtenemos  $y' = a$  y eliminando  $a$  queda la ecuación  $y = y'x$ . Sustituyendo en esta ecuación  $y'$  por  $(y' - 1)/(1 + y')$  obtenemos la ecuación de las trayectorias ortogonales:  $y(1 + y') = (y' - 1)x$ .

Esta ecuación se puede escribir en la forma  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$  que es homogénea. Efectuando el cambio  $y = vx$ , dividiendo entre  $x$  y ordenando términos la ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{x} + \frac{(v - 1)dv}{v^2 + 1} = 0.$$

Integrando obtenemos  $\log|x| + (1/2)\log(v^2 + 1) - \arctan v = \log|C|$  o de forma equivalente  $\log C^2 x^2 (v^2 + 1) - 2 \arctan v = 0$ . Sustituyendo  $v = y/x$  obtenemos la familia de las trayectorias oblicuas pedida

$$\log C^2 (x^2 + y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

## 17.2. Ecuación de Clairaut

Se llama *ecuación de Clairaut* a toda ecuación de la forma  $y = y'x + f(y')$ . Denotando  $p = y'$  la ecuación de queda en la forma

$$y = px + f(p). \quad (*)$$

1. Demostrar que una solución general de la ecuación de Clairaut es  $y = Cx + f(C)$ .

2. Demostrar que

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de una solución singular de la ecuación de Clairaut, y que es además la única solución singular.

3. Resolver la ecuación  $y = y'x + \frac{a}{y'}$ .

**Solución.** 1. Efectivamente, derivando  $y = Cx + f(C)$  obtenemos  $p = C$ . Al sustituir en (\*), el primer miembro es  $Cx + f(C)$ , y el segundo  $px + f(p) = Cx + f(C)$ , por tanto obtenemos una identidad.

2. Sustituyendo en el primer miembro de (\*) obtenemos de  $-pf'(p) + f(p)$ , y sustituyendo en el segundo,  $y'x + f(y') = -pf'(p) + f(p)$ , es decir obtenemos una identidad. La solución es singular pues la ecuación de Clairaut la podemos expresar en la forma  $F(x, y, p) = y - px - f(p)$ , y se verifica

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -x - f'(p) = 0.$$

Por otra parte, la condición  $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$  es necesaria para la singularidad de una solución, de ahí la unicidad.

3. La ecuación es de Clairaut con  $f(p) = a/p$ . La solución general es por tanto  $y = Cx + f(C)$ , es decir la familia de rectas  $y = Cx + a/C$ . La solución singular es

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases} \text{ es decir, } \begin{cases} x = \frac{a}{p^2} \\ y = \frac{2a}{p} \end{cases}$$

y eliminando  $p$  obtenemos la parábola  $y^2 = 4ax$ .

### 17.3. Ecuación de Lagrange

Se llama ecuación diferencial de *Lagrange* (o de *D'Alembert*), a toda ecuación de la forma  $y = xg(y') + f(y')$ . Denotando  $p = y'$ , la ecuación se escribe en la forma

$$y = xg(p) + f(p). \quad (*)$$

*Nota.* Para  $g(p) = p$  obtenemos la ecuación de Clairaut.

1. Demostrar que derivando respecto de  $x$  la ecuación de Lagrange, obtenemos una ecuación lineal en  $x$  como función de  $p$ . Concluir que la solución general de la ecuación de Lagrange se puede expresar en la forma

$$\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)g(p) + f(p) \end{cases}$$

con  $p$  parámetro.

2. Hallar la solución general en forma implícita de la ecuación

$$y = x + (y')^2 - \frac{2}{3}(y')^3.$$

3. Hallar la solución general de la ecuación

$$y = 2xy' + \log y'.$$

**Solución.** 1. Derivando respecto de  $x$  la ecuación (\*):

$$\begin{aligned} p &= g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p', \\ p - g(p) &= (xg'(p) + f'(p)) \frac{dp}{dx}, \\ \frac{dx}{dp} &= \frac{g'(p)}{p - g(p)}x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en  $x$  como función de  $p$ . Nótese que para  $g(p) = p$  se anula el denominador, pero en tal caso obtenemos la ecuación de Clairaut.

Sea  $x = x(p, C)$  la solución general de la ecuación lineal anterior. Sustituyendo en (\*) obtenemos la solución general en paramétricas de la ecuación de Lagrange

$$\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)g(p) + f(p) \end{cases} \quad (p \text{ parámetro}).$$

2. La ecuación se puede expresar en la forma  $y = x + p^2 - 2p^3/3$ , por tanto es una ecuación de Lagrange con  $g(p) = 1$  y  $f(p) = p^2 - 2p^3/3$ . Derivando respecto de  $x$ ,

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2pp' - 2p^2p', & p - 1 &= 2p(1 - p) \frac{dp}{dx}, \\ \frac{dx}{dp} &= -2p \text{ (si } p \neq 1), & x &= C - p^2. \end{aligned}$$



Sustituyendo en la ecuación inicial,

$$\begin{cases} x = C - p^2 \\ y = C - \frac{2}{3}p^3. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro  $p$  obtenemos la ecuación en forma implícita de la solución general

$$9(C - y)^2 = 4(C - x)^3.$$

3. La ecuación se puede expresar en la forma  $y = 2xp + \log p$ , por tanto es una ecuación de Lagrange con  $g(p) = 2$  y  $f(p) = \log p$ . Derivando respecto de  $x$ ,

$$\begin{aligned} p &= 2p + 2xp' + \frac{p'}{p}, & p^2 &= 2p^2 + 2xpp' + p', \\ -p^2 &= (2xp + 1)\frac{dp}{dx}, & \frac{dx}{dp} &= x \cdot \frac{-2}{p} - \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación lineal anterior obtenemos

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p},$$

y sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos:

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y = \frac{2C}{p} - 2 + \log p \end{cases} \quad (p \text{ parámetro}).$$

#### 17.4. Ec. dif. lineal homogénea con coef. constantes (orden $n$ )

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $x''' - 2x'' - 3x' = 0$ .

2. Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $x''' + 2x'' + x' = 0$ . Hallar la solución particular que cumple  $x(0) = 4$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x''(0) = -7$ .

3. Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $x''' + 4x'' + 13x' = 0$ .

4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 8x'' + 8x' + 4x = 0.$$

5. Encontrar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga las soluciones:  $\cosh t \sin t$ ,  $\sinh t \cos t$ ,  $t$ .

**Solución.** Recordamos algunas definiciones y resultados teóricos:

*Definición.* Se llama ecuación diferencial lineal real ordinaria con coeficientes constantes y de orden  $n$  a toda ecuación de la forma:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0, \quad (1)$$

en donde  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) son constantes reales y  $x = x(t)$  es función real de la variable real  $t$ .

*Teorema.* (a) El conjunto  $S$  de las funciones  $x; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que son soluciones de la ecuación diferencial (1) tiene estructura de espacio vectorial real con las operaciones usuales. (b)  $\dim S = n$ .

*Nota.* Como consecuencia, encontrando una base  $B = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  de  $S$  tendremos resuelta la ecuación pues todas las soluciones de (1) vendrán expresadas en la forma

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t) \quad (C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}).$$

*Definición.* Se llama ecuación característica de la ecuación diferencial (1) a la ecuación algebraica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

*Método.* Se demuestra que se obtiene una base del espacio de las soluciones de una ecuación diferencial lineal real homogénea de coeficientes constantes, eligiendo funciones de la siguiente manera:

(a) Por cada raíz real simple  $\lambda$  de la ecuación característica elegimos la función  $e^{\lambda t}$ .

(b) Por cada raíz real  $\lambda$  de multiplicidad  $k$  de la ecuación característica elegimos las funciones

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

(c) Por cada raíz compleja  $a+bi$  simple de la ecuación característica elegimos las funciones

$$e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt.$$

(d) Por cada raíz compleja  $a+bi$  de multiplicidad  $k$  de la ecuación característica elegimos las funciones

$$e^{at} \cos bt, te^{at} \cos bt, t^2 \cos bt, \dots, t^{k-1}e^{at} \cos bt,$$

y las funciones

$$e^{at} \sin bt, te^{at} \sin bt, t^2 \sin bt, \dots, t^{k-1}e^{at} \sin bt.$$

*Nota.* Como la ecuación característica tiene coeficientes reales por cada raíz compleja  $a + bi$ , aparece su conjugada  $a - bi$ . Por esta conjugada no elegimos ninguna función.  $\square$

1. La ecuación característica es  $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$  cuyas raíces son 0, -1, 3 (simples). Una base del espacio de las soluciones es  $\{e^{0t}, e^{-t}, e^{3t}\} = \{1, e^{-t}, e^{3t}\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto  $x = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{3t}$ .

2. La ecuación característica es  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$  cuyas raíces son 0 (simple) y -1 (doble). Una base del espacio de las soluciones es  $\{1, e^{-t}, te^{-t}\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto  $x = C_1 + (C_2 + C_3t)e^{-t}$ . Hallemos la solución particular pedida. Tenemos:

$$\begin{cases} x = C_1 + (C_2 + C_3t)e^{-t} \\ x' = (C_3 - C_2 - C_3t)e^{-t} \\ x'' = (C_2 - 2C_3 - C_3t)e^{-t}. \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones  $x(0) = 4, x'(0) = 2, x''(0) = -7$  :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -C_2 + C_3 = 2 \\ C_2 - 2C_3 = -7 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos  $C_1 = 1, C_2 = 3, C_3 = 5$ , por tanto la solución particular pedida es  $x = 1 + (3 + 5t)e^{-t}$ .

3. La ecuación característica es  $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$  cuyas raíces son 0 y  $-2 \pm 3i$  (simples). Una base del espacio de las soluciones es  $\{1, e^{-2t} \cos 3t, e^{-2t} \sin 3t\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto

$$x = C_1 + (C_2 \cos 3t + C_3 \sin 3t)e^{-2t}.$$

4. La ecuación característica es  $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 = 0$ . Observemos que podemos escribirla en la forma  $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$ . La raíces de  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$  son  $-1 \pm i$  (simples) por tanto las de la ecuación característica son  $-1 \pm i$  (dobles). Una base del espacio de las soluciones es

$$\{e^{-t} \cos t, te^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, te^{-t} \sin t\}.$$

La solución general es por tanto

$$x = e^{-t}[(C_1 + C_2t) \cos t + (C_3 + C_4t) \sin t].$$

5. La solución  $t = te^{0t}$  proviene necesariamente de la raíz 0 (doble) de la ecuación característica. Por otra parte

$$\cosh t \sin t = \frac{1}{2}e^t \sin t + \frac{1}{2}e^{-t} \sin t, \quad \sinh t \cos t = \frac{1}{2}e^t \cos t - \frac{1}{2}e^{-t} \cos t.$$

Dado que el conjunto de las soluciones es un espacio vectorial, para que tenga las dos soluciones anteriores basta que tenga las soluciones  $e^t \sin t$ ,  $e^t \cos t$  que proviene de la raíz  $-1 + i$  (simple). La ecuación característica correspondiente es por tanto

$$(\lambda - 0)^2[\lambda - (1 + i)][\lambda - (1 - i)][\lambda - (-1 + i)][\lambda - (-1 - i)] = 0.$$

Operando obtenemos  $\lambda^6 + \lambda^2 = 0$ , que proporciona la ecuación  $x^{(6)} + x'' = 0$ .

### 17.5. Ec. dif. lineal no homogénea con coef. constantes (orden $n$ )

1. Hallar la solución general de la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = t^2 + t.$$

2. Hallar la solución general de la ecuación

$$x''' - x'' = 12t^2 + 6t.$$

3. Hallar la solución general de la ecuación

$$x'' - 6x' + 9x = 25e^t \sin t.$$

4. Resolver la ecuación diferencial  $x'' + x = \sin^2 t$ , con las condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

**Solución.** Recordamos los siguientes resultados teóricos:

*Teorema.* Consideremos la ecuación diferencial ordinaria lineal, no homogénea, con coeficientes reales constantes y de orden  $n$ :

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(t), \quad (1)$$

en donde  $t$  es la variable independiente,  $x$  la dependiente y  $b(t)$  representa una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . La correspondiente ecuación homogénea asociada es por tanto

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0. \quad (2)$$

Entonces, todas las soluciones de la ecuación completa (1) se obtienen sumando a una solución particular de esta todas las de la homogénea (2).

*Teorema* (Método de selección de soluciones particulares). Si  $b(t)$  es una función de la forma

$$b(t) = e^{\alpha t} (P_k(t) \cos \beta t + Q_r(t) \sin \beta t). \quad (3)$$

con  $P_k, Q_r$  polinomios de grados  $k, r$  respectivamente, y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces, una solución particular de la ecuación (1) es de la forma:

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t} \left( \tilde{P}_d(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_d(t) \sin \beta t \right),$$

en donde:

(i)  $\tilde{P}_d, \tilde{Q}_d$  son polinomios con coeficientes indeterminados ambos de grado  $d = \text{máx} \{k, r\}$ .

(ii)  $s$  es el orden de multiplicidad de  $\alpha + \beta i$  como raíz de la ecuación característica  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ .  $\square$

1. Hallemos la solución general de la homogénea. Las soluciones de la ecuación característica  $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$  son  $1, \pm i$  (simples). La solución general de la homogénea es por tanto  $x_h(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$ . Identificando  $t^2 + t$  con  $b(t)$  de (3):

$$t^2 + t = e^{0t} \left( (t^2 + t) \cos 0t + 0 \sin 0t \right),$$

deducimos que una solución particular de la ecuación no homogénea ha de tener la forma  $x_p(t) = at^2 + bt + c$ . Obligamos que sea solución:

$$0 - (2a) + (2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2 + t.$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos  $a = -1, b = -3, c = -1$ . La solución general de la ecuación dada es

$$x(t) = -t^2 - 3t - 1 + C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

2. Hallemos la solución general de la homogénea. Las soluciones de la ecuación característica  $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$  son  $0$  (doble) y  $1$  (simple). La solución general de la homogénea es por tanto  $x_h(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t$ . Identificando  $12t^2 + 6t$  con  $b(t)$  de (3):

$$12t^2 + 6t = e^{0t} \left( (12t^2 + 6t) \cos 0t + 0 \sin 0t \right),$$

deducimos que una solución particular de la ecuación no homogénea ha de tener la forma  $x_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) = at^4 + bt^3 + ct^2$ . Obligamos que sea solución:

$$(24at + 6b) - (12at^2 + 6bt + 2c) = 12t^2 + 6t.$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos  $a = -1, b = -5, c = -15$ . La solución general de la ecuación dada es

$$x(t) = -t^4 - 5t^3 - 15t^2 + C_1 + C_2 t + C_3 e^t.$$

3. Hallemos la solución general de la homogénea. La solución de la ecuación característica  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$  es 3 (doble). La solución general de la homogénea es por tanto  $x_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$ . Identificando  $25e^t \sin t$  con  $b(t)$  de (3):

$$25e^t \sin t = e^t (0 \cos t + 25 \sin t),$$

deducimos que una solución particular de la ecuación no homogénea ha de tener la forma  $x_p(t) = e^t(a \cos t + b \sin t)$ . Derivando:

$$\begin{cases} x_p(t) = e^t(a \cos t + b \sin t) \\ x_p'(t) = e^t((a+b) \cos t + (b-a) \sin t) \\ x_p''(t) = e^t(2b \cos t - 2a \sin t). \end{cases}$$

Obligando a que  $x_p(t)$  sea solución, identificando coeficientes y resolviendo el sistema resultante, obtenemos  $a = 4$ ,  $b = 3$ . La solución general de la ecuación dada es

$$x(t) = e^t(4 \cos t + 3 \sin t) + e^{3t}(C_1 + C_2 t).$$

4. La ecuación característica asociada es  $\lambda^2 + 1 = 0$  cuyas soluciones son  $\pm i$ . Una base del espacio de las soluciones de la ecuación homogénea es por tanto  $B = \{\cos t, \sin t\}$ , en consecuencia su solución general es  $x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Descompongamos  $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$  y apliquemos a la ecuación dada el principio de superposición de las soluciones: si  $x_1(t), x_2(t)$  son respectivamente soluciones particulares de

$$x'' + x = \frac{1}{2}, \quad (1) \quad x'' + x = -\frac{1}{2} \cos 2t. \quad (2)$$

entonces,  $x_1(t) + x_2(t)$  es una solución particular de

$$x'' + x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t. \quad (3)$$

De acuerdo con el método de selección, una solución particular de (1) es de la forma  $x_1(t) = a$  con  $a$  constante, que sustituida en (1) proporciona  $x_1(t) = 1/2$ . Una solución particular de (2) es de la forma  $x_2(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$  con  $a, b$  constantes. Sustituyendo en (2) obtenemos

$$-4a \cos 2t - 4b \sin 2t + a \cos 2t + b \sin 2t = -\frac{1}{2} \cos 2t.$$

Como las funciones  $\cos 2t, \sin 2t$  son linealmente independientes, la igualdad anterior implica  $-3a = -1/2$  y  $-3b = 0$ , es decir  $x_2(t) = \frac{1}{6} \cos 2t$ . La solución general de la ecuación dada (es decir, la (3)) es por tanto

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2t + C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Imponiendo las condiciones  $x(0) = 0, x'(0) = 1$  fácilmente obtenemos  $C_1 = -1/3$  y  $C_2 = 1$ . Concluimos que la función pedida es

$$x(t) = \frac{1}{6}(3 - \cos 2t - 2 \cos t + 6 \sin t).$$

### 17.6. Ecuación diferencial equivalente a un sistema

Se considera la ecuación diferencial lineal real de coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0.$$

- (a) Transformarla en un sistema diferencial de primer orden.
- (b) Usando el apartado anterior, resolver el problema de valor inicial

$$x''' - x'' - 8x' + 12x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = -2.$$

**Solución.** (a) Denotando  $y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)}$  obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = x' = y_2 \\ y_2' = x'' = y_3 \\ \dots \\ y_n' = x^{(n)} = -a_0x - a_1x' - \dots - a_{n-1}x^{(n-1)} = \\ \quad -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n. \end{array} \right.$$

Relaciones que podemos expresar en la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

(b) Según el apartado anterior, el problema dado es equivalente al de valor inicial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Sean  $V_2, V_{-3}$  los subespacios propios asociados a  $\lambda = 2$  y  $\lambda = -3$  respectivamente. Tenemos  $\dim V_{-3} = 1$  por ser  $-3$  simple y  $\dim V_2 = 3 - \text{rg}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$ , lo cual implica que  $A$  no es diagonalizable. Hallemos una base de Jordan. Para el valor propio  $\lambda = 2$  elegimos dos vectores linealmente independientes cumpliendo  $Ae_1 = 2e_1$  y  $Ae_2 = e_1 + 2e_2$ . Resolviendo los

sistemas, obtenemos  $e_1 = (1, 2, 4)^t$  y  $e_2 = (0, 1, 4)^t$ . Para el valor propio  $\lambda = -3$  elegimos un vector propio  $e_3$ , es decir  $Ae_3 = e_3$ . Resolviendo obtenemos  $e_3 = (1, -3, 9)^t$ . De las igualdades

$$\begin{cases} Ae_1 = 2e_1 \\ Ae_2 = e_1 + 2e_2 \\ Ae_3 = -3e_3 \end{cases}$$

deducimos que la forma canónica de Jordan de  $A$  es  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

Una matriz  $P$  tal que  $P^{-1}AP = J$  es  $P = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ .

Entonces,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = P e^{tJ} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Operando, y teniendo en cuenta que sólo necesitamos  $y_1 = x$  obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{25} ((6 - 5t)e^{2t} - 6e^{-3t}).$$

## 17.7. Ecuación de Euler

Se llama *ecuación de Euler* a toda ecuación de la forma

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = 0,$$

en donde  $a_i$  son números reales con  $a_n \neq 0$  y  $x$  es función de  $t$ .

1. Demostrar que el cambio de variable independiente de  $x(t)$  a  $x(u)$  definido por  $t = \exp u$  transforma la ecuación de Euler  $t^2 x'' + a t x' + b x = 0$  en una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

2. Como aplicación resolver la ecuación  $t^2 x'' + 2 t x' - 2 x = 0$  con  $x(1) = 0$ ,  $x'(1) = 1$ .

3. Resolver la ecuación de Euler  $t^2 x'' + 2 t x' - 2 x = 0$  del apartado anterior ensayando soluciones de la forma  $x(t) = t^k$ .



**Solución.** 1. El cambio  $t = e^u$  equivale a  $u = \log t$ . Entonces:

$$x'(t) = x'(u) \cdot \frac{1}{t} = x'(u)e^{-u},$$

$$x''(t) = [x''(u)e^{-u} + x'(u)(-e^{-u})] \cdot \frac{1}{t} = e^{-2u}(x''(u) - x'(u)).$$

Sustituyendo en  $t^2x'' + atx' + bx = 0$  obtenemos

$$x''(u) - x'(u) + ax'(u) + bx(u) = 0,$$

es decir:

$$x''(u) + (a - 1)x'(u) + bx(u) = 0, \quad (1)$$

que es una ecuación lineal de segundo orden de coeficientes constantes.

*Nota.* También se llama ecuación de Euler a toda ecuación de la forma

$$a_n(at + b)^n x^{(n)} + a_{n-1}(at + b)t^{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1(at + b)x' + a_0x = 0.$$

El cambio de variable independiente  $at + b = e^u$  transforma la ecuación anterior en una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes.

2. La ecuación (1) es:

$$x''(u) - x'(u) - 2x(u) = 0. \quad (2)$$

Su ecuación característica es  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  cuyas raíces son  $\lambda = -2$  y  $\lambda = 1$ . Una base del espacio de las soluciones de la ecuación (2) es  $B = \{e^{-2u}, e^u\}$  con lo cual su solución general es  $x(u) = C_1e^{-2u} + C_2e^u$ . Expresándola en términos de la variable independiente  $t$ :

$$x(t) = C_1e^{-2\log t} + C_2e^{\log t} = C_1t^{-2} + C_2t.$$

Derivando obtenemos  $x'(t) = -2C_1t^{-3} + C_2$  y las condiciones  $x(1) = 0$ ,  $x'(1) = 1$  equivalen a  $C_1 + C_2 = 0$  y  $-2C_1 + C_2 = 1$ , sistema cuya solución es  $C_1 = -1/3$ ,  $C_2 = 1/3$ . La solución pedida es por tanto:

$$x(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{3t^2}.$$

3. Si  $x(t) = t^k$ , entonces  $x'(t) = kt^{k-1}$ ,  $x''(t) = k(k-1)t^{k-2}$ . Sustituyendo en la ecuación  $t^2x'' + 2tx' - 2x = 0$  obtenemos:

$$(k(k-1) - 2k - 2)t^{k+2} = 0.$$

Igualando el coeficiente de  $t^{k+2}$  a 0 obtenemos  $k^2 + k - 2 = 0$  cuyas raíces son  $k = -2$  y  $k = 1$ . Dos soluciones particulares de la ecuación de Euler son por tanto  $x_1(t) = t^{-2}$  y  $x_2 = t$ . Al ser linealmente independientes, determinan la solución general:  $x(t) = C_1t^{-2} + C_2t$ .

## 17.8. Independencia funcional

1. Demostrar que si  $v^1, v^2, \dots, v^p$  son funcionalmente independientes, también son linealmente independientes.

2. Demostrar que

$$v^1 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -1 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2 \\ -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en  $[0, 1]$ , pero funcionalmente dependientes.

**Solución.** Recordamos las siguientes definiciones:

*Definición.* Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado de la recta real,  $\mathbb{K}$  el cuerpo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , y

$$V = \{v : I \rightarrow \mathbb{K} : v \in \mathcal{C}^1(I)\},$$

el espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  de las funciones  $v$  con derivada continua en  $I$ . Sea el espacio vectorial producto  $V^m$  con  $m$  entero positivo. Es decir, cada vector de  $V^m$  es una  $n$ -upla de funciones de  $V$ .

*Definición.* Se dice que los vectores  $v^1, v^2, \dots, v^p$  de  $V^m$  son funcionalmente independientes, si

$$\begin{aligned} f_1 v^1 + f_2 v^2 + \dots + f_p v^p = 0 \text{ con } f_1, f_2, \dots, f_p \in V \\ \Rightarrow f_1 = f_2 = \dots = f_p = 0. \end{aligned}$$

En caso contrario, se dice que son funcionalmente dependientes.  $\square$

1. Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \dots + \alpha_p v^p = 0.$$

Consideremos las funciones constantes  $f_i(t) = \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ), que claramente son de clase 1 en  $I$ . Entonces,

$$f_1 v^1 + f_2 v^2 + \dots + f_p v^p = 0.$$

Por hipótesis  $v^1, v^2, \dots, v^p$  son funcionalmente independientes, lo cual implica que  $f_1 = f_2 = \dots = f_p = 0$ , y por tanto  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ , luego  $v^1, v^2, \dots, v^p$  son también linealmente independientes.

2. Supongamos que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ t^2 \\ -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . La igualdad anterior equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 e^{-t} = 0 \\ \alpha_1 e^{-t} - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Para  $t = 0$  y  $t = 1$  obtenemos respectivamente

$$S_1 : \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} \alpha_1 e^{-1} + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 e^{-1} = 0 \\ \alpha_1 e^{-1} - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Las igualdades

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 e^{-1} + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

implican de manera inmediata que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , es decir los vectores  $v^1, v^2, v^3$  son linealmente independientes. Elijamos ahora las funciones  $f_1(t) = e^t$ ,  $f_2(t) = 1$ ,  $f_3(t) = -1$ . Se verifica

$$f_1 v^1 + f_2 v^2 + f_3 v^3 = 0,$$

por tanto,  $v^1, v^2, v^3$  son funcionalmente dependientes.

## 17.9. Cálculo de la matriz exponencial

1. Hallar  $e^{tA}$ , siendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .
2. Hallar  $e^{tA}$ , siendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ .
3. Hallar  $e^{tA}$ , siendo  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$ .

**Solución.** 1. Hallemos los valores propios de  $A$ . Restando a la segunda y tercera filas la primera y posteriormente sumando a la primera columna las demás en  $|A - \lambda I|$  obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ (simple)}, \lambda = 1 \text{ (doble)}.$$

Subespacios propios

$$\ker(A - 4I) \equiv \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad \ker(A - I) \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Entonces,  $\dim \ker(A - 4I) = 1$  ( $\lambda = 4$  simple) y

$$\dim \ker(A - I) = 3 - \text{rg}(A - I) = 2.$$

Al coincidir las dimensiones con las multiplicidades,  $A$  es diagonalizable. Unas bases de los subespacios propios son:

$$B_4 = \{(1, 1, 1)\}, \quad B_1 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Una matriz  $P$  invertible tal que  $P^{-1}AP = \text{diag}(4, 1, 1)$  es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $e^{tA}$  es por tanto:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P e^{tD} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Hallemos los valores propios de  $A$ . Para ello efectuamos la transformación  $F_3 - F_2$  y a continuación  $C_2 + C_3$ :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1+\lambda & -5 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 & -15 \\ 1 & -4+\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(\lambda + 1)(\lambda + 1)^2 = (\lambda + 1)^3.
 \end{aligned}$$

El único valor propio de  $A$  es por tanto  $\lambda = -1$  (triple). La dimensión del subespacio propio  $V_{-1}$  asociado es:

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \text{rg}(A + I) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

La dimensión no coincide con la multiplicidad, y por tanto  $A$  no es diagonalizable. Los posibles polinomios mínimos son  $\mu_1(\lambda) = \lambda + 1$ ,  $\mu_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$  o  $\mu_3(\lambda) = (\lambda + 1)^3$ . Se verifica  $\mu_1(A) = A + I \neq 0$  y  $\mu_2(A) = (A + I)^2 = 0$ , es decir el polinomio mínimo de  $A$  es  $\mu_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ . Como consecuencia la forma canónica de Jordan de  $A$  es:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Una base de Jordan  $B_J = \{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  para la matriz  $A$  será pues una base satisfaciendo las condiciones:

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_1 - e_2 \\ Ae_3 = -e_3 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} (A + I)e_1 = 0 \\ (A + I)e_2 = e_1 \\ (A + I)e_3 = 0. \end{cases}$$

Tenemos que resolver sistemas del tipo  $(A + I)x = h$  con  $x = (x_1, x_2, x_3)^t$  y  $h = (h_1, h_2, h_3)$ , es decir sistemas del tipo

$$(A + I)x = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Aplicando el método de Gauss obtenemos que el sistema (1) es compatible si y sólo si se verifica  $h_1 = 3h_2$  y  $h_2 = h_3$  (condiciones de compatibilidad) y la solución general es

$$\begin{cases} x_1 = h_2 - 2\alpha + 5\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Vector  $e_1$ . En este caso,  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$  y la solución general de (1) es  $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$ . Este vector "x" estará de  $h$  en el siguiente sistema, así que le imponemos las condiciones de compatibilidad, es decir

$-2\alpha + 5\beta = 3\alpha$  y  $\alpha = \beta$ . En consecuencia podemos elegir  $\alpha = \beta = 1$  y obtenemos el vector  $e_1 = (3, 1, 1)^t$ .

Vector  $e_2$ . En este caso,  $h_1 = 3, h_2 = h_3 = 1$  y la solución general de (1) es  $e_2 = (1 - 2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$ . Eligiendo  $\alpha = \beta = 0$  obtenemos el vector  $e_2 = (1, 0, 0)^t$ .

Vector  $e_3$ . Como en el caso de  $e_1$  la solución general de (1) es  $e_1 = (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta)$ . Elegimos  $\alpha$  y  $\beta$  de tal manera que  $e_1$  y  $e_3$  sean linealmente independientes, por ejemplo  $\alpha = 1, \beta = 0$  con lo cual obtenemos el vector  $e_3 = (-2, 1, 0)^t$ . En consecuencia, una matriz  $P$  que satisface  $P^{-1}AP = J$  es

$$P = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz exponencial es:

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = P e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+3t & 6t & -15t \\ t & 2t+1 & -5t \\ t & 2t & 1-5t \end{bmatrix}.$$

3. Valores propios de  $A$  :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 13 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i \text{ (simples).}$$

La matriz  $A$  es por tanto diagonalizable en  $\mathbb{C}$ . El subespacio propio  $V_{2i}$  asociado a  $2i$  y una base de éste son:

$$V_{2i} \equiv \begin{cases} (3-2i)x_1 - x_2 = 0 \\ 13x_1 + (-3-2i)x_2 = 0, \end{cases} \quad B_{V_{2i}} = \{(1, 3-2i)\}.$$

Como  $A$  es real, los vectores de  $V_{-2i}$  se obtienen conjugando los de  $V_{2i}$ , es decir una matriz  $P$  que cumple  $P^{-1}AP = D = \text{diag}(2i, -2i)$  es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-2i & 3+2i \end{bmatrix}.$$

La matriz exponencial es:

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Usando que  $2i \sin 2t = e^{2it} - e^{-2it}$  y  $2 \cos 2t = e^{2it} + e^{-2it}$  obtenemos:

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos 2t + 3 \sin 2t & -\sin 2t \\ 13 \sin 2t & 2 \cos 2t - 3 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

### 17.10. Matriz exponencial e inversa de $I + tA$

Se considera la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcular  $e^{tA}$ .  
 (b) Calcular  $(I + tA)^{-1}$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (a) Para hallar los valores propios de  $A$  desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 2) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \text{ (dobles).}$$

Escalonando, podemos fácilmente deducir que  $\text{rg}(A - \sqrt{2}I) = 2$  (omitimos los cálculos por lo rutinario de los mismos). En consecuencia, la dimensión del subespacio propio  $V_{\sqrt{2}}$  asociado a  $\lambda = \sqrt{2}$  es 2. Un sistema que determina este subespacio propio (obtenido al hallar el rango de  $A - \sqrt{2}I$ ) es

$$V_{\sqrt{2}} \equiv \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x_1 + x_3 = 0 \\ (-1 - \sqrt{2})x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

y una base de este subespacio es  $\{(1, 0, -1 + \sqrt{2}, 0), (0, 1, 0, -1 - \sqrt{2})\}$ . De manera análoga, obtenemos una base de  $V_{-\sqrt{2}}$ :

$$\{(1, 0, -1 - \sqrt{2}, 0), (0, 1, 0, -1 + \sqrt{2})\}.$$

La matriz  $A$  es diagonalizable y una matriz invertible  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  tal que  $P^{-1}AP = D$  siendo  $D = \text{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 + \sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & 0 & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Calculando la inversa obtenemos

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

La matriz exponencial pedida es

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P e^{tD} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \cosh \sqrt{2}t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh \sqrt{2}t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos expresar

$$e^{tA} = (\cosh \sqrt{2}t)I + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh \sqrt{2}t \right) A.$$

(b) La matriz  $I + tA$  la podemos expresar de la siguiente manera

$$I + tA = PIP^{-1} + tPDP^{-1} = P(I + tD)P^{-1}.$$

Entonces,  $(I + tA)^{-1} = P(I + tD)^{-1}P^{-1}$ . Es decir

$$\begin{aligned} &(I + tA)^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{2}t)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{2}t)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \sqrt{2}t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \sqrt{2}t)^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

La matriz  $I + tA$  existe si y sólo si  $t \neq \pm\sqrt{2}/2$ . Operando obtenemos

$$(I + tA)^{-1} = \frac{1}{1 - 2t^2} \begin{bmatrix} 1 - t & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 + t & 0 & t \\ -t & 0 & 1 + t & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 - t \end{bmatrix} \quad (t \neq \pm\sqrt{2}/2).$$

Podemos expresar la inversa de  $I + tA$  en la forma:

$$(I + tA)^{-1} = \frac{1}{1 - 2t^2} (I - tA) \quad (t \neq \pm\sqrt{2}/2).$$



### 17.11. Tres propiedades de la matriz exponencial

- (a) Demostrar que si  $e^{tA} = e^{tB}$  para todo  $t$  entonces es  $A = B$ .
- (b) Demostrar que si  $A$  es simétrica ( $A^T = A$ ) entonces  $e^{tA}$  es simétrica para todo  $t$ . Enunciar el recíproco y estudiar su validez.
- (c) Demostrar que si  $A$  es antisimétrica ( $A^T = -A$ ) entonces  $e^{tA}$  es ortogonal ( $M^T = M^{-1}$ ) para todo  $t$ . Enunciar el recíproco y estudiar su validez.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Aunque no se menciona explícitamente, suponemos que las matrices son reales, cuadradas de orden  $n$  y que  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Usando la conocida propiedad de la derivada de la exponencial:

$$e^{tA} = e^{tB} \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}e^{tB} \Rightarrow Ae^{tA} = Be^{tB}.$$

Particularizando en  $t = 0$  queda  $Ae^0 = Be^0$ , es decir  $AI = BI$  lo cual implica  $A = B$ .

(b) Si  $A$  es simétrica, por el teorema espectral existe una matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que  $A = PDP^T$  con  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Tenemos por una parte:

$$(e^{tD})^T = (\text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}))^T = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) = e^{tD}.$$

Usando éste resultado:

$$(e^{tA})^T = (Pe^{tD}P^T)^T = (P^T)^T(e^{tD})^T P^T = Pe^{tD}P^T = e^{tA}.$$

Es decir,  $e^{tA}$  es simétrica. El enunciado recíproco es: si  $e^{tA}$  es simétrica para todo  $t$ , entonces  $A$  es simétrica. Veamos que es cierto. En efecto, dado que la derivada de la traspuesta es la traspuesta de la derivada:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})^T = \left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)^T = (Ae^{tA})^T = (e^{tA})^T A^T = e^{tA}A^T.$$

Pero al ser  $(e^{tA})^T = e^{tA}$ , también se verifica:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})^T = \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Por tanto, para todo  $t$  tenemos  $e^{tA}A^T = Ae^{tA}$ . Particularizando en  $t = 0$  obtenemos  $IA^T = AI$  o equivalentemente  $A^T = A$ . La matriz  $A$  es en consecuencia simétrica.

(c) Veamos previamente que las matrices  $(tA)^T$  y  $tA$  conmutan

$$(tA)^T(tA) = (tA^T)(tA) = (-tA)(tA) = -t^2A^2,$$

$$(tA)(tA)^T = (tA)(tA^T) = (tA)(-tA) = -t^2A^2.$$

Sabemos que para  $F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se cumple  $e^{(F^T)} = (e^F)^T$  y además  $e^F e^G = e^{F+G}$  si  $FG = GF$ . Entonces

$$(e^{tA})^T (e^{tA}) = e^{(tA)^T} e^{tA} = e^{(tA)^T + tA} = e^{-tA + tA} = e^0 = I.$$

La matriz  $e^{tA}$  es ortogonal para todo  $t$ . El enunciado recíproco es: si  $e^{tA}$  es ortogonal para todo  $t$ , entonces  $A$  es antisimétrica. Veamos que es cierto. En efecto, para todo  $t$ :

$$(e^{tA})^T = (e^{tA})^{-1} \Rightarrow e^{(tA)^T} = e^{-tA} \Rightarrow e^{tA^T} = e^{t(-A)}.$$

Del apartado (a) concluimos que  $A^T = -A$ , es decir  $A$  es antisimétrica.

## 17.12. Forma de Jordan asociada a una ecuación diferencial

1.- Escribir la solución general de la ecuación diferencial

$$x^{(6)} - 6x^{(4)} + 12x'' - 8x = 0.$$

2.- Escribir justificadamente la forma de Jordan  $J$  de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -12 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1.- La ecuación característica asociada es

$$\lambda^6 - 6\lambda^4 + 12\lambda^2 - 8 = 0. \quad (1)$$

Efectuando la sustitución  $\mu = \lambda^2$  obtenemos la ecuación  $\mu^3 - 6\mu^2 + 12\mu - 8 = 0$ , una de cuyas soluciones es  $\mu = 2$ . Usando la regla de Ruffini obtenemos

$$\mu^3 - 6\mu^2 + 12\mu - 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 4\mu + 4) = (\mu - 2)^3.$$

Las soluciones de la ecuación (1) son por tanto  $\lambda_1 = \sqrt{2}$  y  $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ , ambas triples. Usando un conocido teorema, una base del espacio vectorial de las soluciones es

$$B = \{e^{\sqrt{2}t}, te^{\sqrt{2}t}, t^2e^{\sqrt{2}t}, e^{-\sqrt{2}t}, te^{-\sqrt{2}t}, t^2e^{-\sqrt{2}t}\}.$$

La solución general es por tanto

$$x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{\sqrt{2}t} + (C_4 + C_5t + C_6t^2)e^{-\sqrt{2}t}.$$

2.- Transformemos en la forma habitual la ecuación dada en un sistema:

$$y_1 = x, y_2 = x', y_3 = x'', y_4 = x^{(3)}, y_5 = x^{(4)}, y_6 = x^{(5)}.$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1' &= x' = y_2 & y_4' &= x^{(4)} = y_5 \\ y_2' &= x'' = y_3 & y_5' &= x^{(5)} = y_6 \\ y_3' &= x^{(3)} = y_4 & y_6' &= x^{(6)} = 8y_1 - 12y_3 + 6y_5. \end{aligned}$$

Un sistema equivalente a la ecuación dada es

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \\ y_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -12 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}.$$

La base del espacio de las soluciones de para  $x = y_1$  proporciona la forma de Jordan que necesariamente ha de tener  $A$  :

$$J = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & & & \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & & & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & & & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ & & & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ & & & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

### 17.13. Sistemas diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes

Resolver los siguientes sistemas diferenciales:

- $$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \text{con la condición inicial} \quad \begin{cases} x_1(1) = 1 \\ x_2(1) = 0 \\ x_3(1) = 3. \end{cases}$$
- $$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$
- $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{con la condición inicial} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** 1. Recordemos el siguiente teorema: sea el sistema diferencial lineal homogéneo con coeficientes constantes:

$$S \equiv \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

que se puede expresar matricialmente en la forma  $X' = AX$  en donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Entonces, dados  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe solución única de  $S$  que satisface  $X(t_0) = X_0$ . Dicha solución es  $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ .

En el ejercicio 17.9 se calculó  $e^{tA}$  para la matriz de este ejercicio, por tanto:

$$e^{(t-1)A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{4(t-1)} + 2e^{t-1} & e^{4(t-1)} - e^{t-1} & e^{4(t-1)} - e^{t-1} \\ e^{4(t-1)} - e^{t-1} & e^{4(t-1)} + 2e^{t-1} & e^{4(t-1)} - e^{t-1} \\ e^{4(t-1)} - e^{t-1} & e^{4t} - e^t & e^{4(t-1)} + 2e^{t-1} \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, la solución pedida es:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4e^{4(t-1)} - e^{t-1} \\ 4e^{4(t-1)} - 4e^{t-1} \\ 4e^{4(t-1)} + 5e^{t-1} \end{bmatrix}.$$

2. En el ejercicio 17.9 se calculó  $e^{tA}$  para la matriz de este ejercicio:

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 + 3t & 6t & -15t \\ t & 2t + 1 & -5t \\ t & 2t & 1 - 5t \end{bmatrix}.$$

Ahora no se da ninguna condición inicial, es decir se pide hallar todas las soluciones del sistema. Esto equivale a la condición  $X(0) = (C_1, C_2, C_3)^t$  con  $C_1, C_2, C_3$  números reales cualesquiera. La solución general del sistema es por tanto:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + (3C_1 + 6C_2 - 15C_3)t \\ C_2 + (C_1 + 2C_2 - 5C_3)t \\ C_3 + (C_1 + 2C_2 - 5C_3)t \end{bmatrix}.$$

3. En el ejercicio 17.9 se calculó  $e^{tA}$  para la matriz de este apartado:

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos 2t + 3 \sin 2t & -\sin 2t \\ 13 \sin 2t & 2 \cos 2t - 3 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, la solución pedida es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos 2t + 2 \sin 2t \\ 2 \cos 2t + 10 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

### 17.14. Sistemas diferenciales lineales no homogéneos con coeficientes constantes

1. Resolver el sistema diferencial:

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{bmatrix},$$

con la condición  $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2. Resolver el sistema diferencial:

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con la condición  $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

**Solución.** 1. Recordemos el siguiente teorema: sea el sistema diferencial lineal no homogéneo con coeficientes constantes  $X' = AX + b(t)$  en donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua. Entonces, dado  $t_0 \in \mathbb{R}$

y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe una única solución del sistema cumpliendo  $X(t_0) = X_0$ . Dicha solución es

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds. \quad (1)$$

Valores propios de  $A$  :

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \text{ (simples).}$$

Subespacios propios:

$$V_2 \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \quad V_3 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Unas bases respectivas de estos subespacios propios son  $B_2 = \{(1, -2)\}$  y  $B_3 = \{(1, -1)\}$ , por tanto se verifica  $P^{-1}AP = D$  si

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Usando la fórmula (1) :

$$X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds.$$

Efectuando los correspondientes cálculos:

$$\begin{aligned} e^{tA} X_0 &= P e^{tD} P^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}. \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \\ &= P e^{tD} P^{-1} \int_0^t P e^{-sD} P^{-1} b(s) ds \\ &= P e^{tD} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) ds, \\ \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^s \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-s} \\ -2e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Pe^{tD} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} b(s) ds &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} - e^{3t} \\ 3e^t - 4e^{2t} + e^{3t} \end{bmatrix}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (2) y (3) obtenemos la solución pedida:

$$X(t) = \begin{bmatrix} -e^t + e^{2t} + e^{3t} \\ 3e^t - 2e^{2t} - e^{3t} \end{bmatrix}.$$

2. La matriz  $A$  es en éste caso una forma normal de Jordan, en consecuencia:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Efectuando los correspondientes cálculos:

$$e^{tA} X_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{-sA} b(s) ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
 &= \int_0^t \begin{bmatrix} se^s \\ e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t(t-1) + 1 \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (**)
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (\*) y (\*\*) obtenemos la solución pedida:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t-1+e^{-t} \\ (\frac{3}{2}-t)e^{2t} - \frac{1}{2} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

### 17.15. Soluciones acotadas de un sistema diferencial

Dado el sistema diferencial  $X'(t) = AX(t)$  con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

calcula el conjunto de condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0)^t$  que dan lugar a soluciones acotadas.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Hallemos la forma canónica de la matriz  $A$ . Su polinomio característico es

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 & 4 \\ 8 & -2 - \lambda & 4 \\ -4 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 & 4 \\ 8 & -2 - \lambda & 4 \\ 2 - \lambda & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 4 \\ 4 & -2 - \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)\lambda^2. \end{aligned}$$

Los valores propios son por tanto  $\lambda = 0$  (doble) y  $\lambda = 2$  (simple). Las dimensiones de los subespacios propios son  $\dim V_0 = 3 - \text{rg}(A - 0I) = 3 - 2 = 1$  y  $\dim V_2 = 1$  por ser  $\lambda = 2$  simple. En consecuencia la forma de Jordan de  $A$  es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea  $P \in \mathbb{R}^3$  invertible tal que  $P^{-1}AP = J$  y efectuemos el cambio  $X(t) = PY(t)$ . Entonces

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\Leftrightarrow (PY(t))' = A(PY(t)) \Leftrightarrow PY'(t) = APY(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = P^{-1}APY(t) \Leftrightarrow Y'(t) = JY(t). \end{aligned}$$

Es decir,  $X(t)$  es solución del sistema dado si y sólo si  $Y(t)$  lo es de  $Y'(t) = JY(t)$ . Por otra parte, si  $X(0) = (x_0, y_0, z_0)$  e  $Y(0) = (u_0, v_0, w_0)^t$  entonces

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}.$$



Las soluciones del sistema  $Y'(t) = JY(t)$  son

$$Y(t) = e^{tJ} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + tv_0 \\ v_0 \\ w_0 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Es claro que la solución  $Y(t)$  está acotada si y sólo si  $v_0 = w_0 = 0$ . Por otra parte, si  $Y(t)$  está acotada entonces (eligiendo por ejemplo la norma del máximo) existe  $M \geq 0$  tal que  $\|Y(t)\| \leq M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La correspondiente solución  $X(t)$  cumple  $\|X(t)\| = \|PY(t)\| \leq \|P\| \|Y(t)\| \leq \|P\|M$ , es decir  $X(t)$  está acotada.

Recíprocamente, dado que  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  se demuestra de manera análoga que si  $X(t)$  está acotada también lo está  $Y(t)$ . De todo esto concluimos que las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0)^t$  que dan lugar a soluciones acotadas son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto equivale a decir que  $(x_0, y_0, z_0)^t$  es proporcional a la primera columna de  $P$ , y esta es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda = 0$ , es decir un vector no nulo de  $\ker A$ .

$$\ker A \equiv \begin{cases} 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos como base de  $\ker A$  el vector  $(1, 2, -1)$ . Es decir,  $(x_0, y_0, z_0)^t$  da lugar a soluciones acotadas si y sólo si  $(x_0, y_0, z_0)^t \in \mathcal{L}\{(1, 2, -1)^t\}$ .

### 17.16. Polinomio de Taylor de una solución de una ecuación diferencial

Calcular el polinomio de Taylor de cuarto grado (centrado en el origen) de la solución  $x(t)$  del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'(t) &= \log(1 + t + x), \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** La función  $f(t, x) = \log(1 + t + x)$  está definida en el dominio del plano

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t + x + 1 > 0\}.$$

Por otra parte  $(0, 0) \in D$ , y tanto  $f(x, t)$  como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (1 + t + x)^{-1}$  son continuas en  $D$ . Por un conocido teorema, se deduce que existe una única solución  $x = x(t)$  al problema de valor inicial dado. El polinomio de Taylor pedido es

$$p(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \frac{x^{(4)}(0)}{4!}t^4.$$

Las derivadas de órdenes 2, 3 y 4 de  $x$  son

$$\begin{aligned} x''(t) &= (1 + t + x)^{-1}(1 + x'), \\ x'''(t) &= -(1 + t + x)^{-2}(1 + x')^2 + (1 + t + x)^{-1}x'', \\ x^{(4)}(t) &= 2(1 + t + x)^{-3}(1 + x')^3 - (1 + t + x)^{-2}2(1 + x')x'' \\ &\quad - (1 + t + x)^{-2}(1 + x')x'' + (1 + t + x)^{-1}x'''. \end{aligned}$$

Tenemos  $x(0) = 0$  y  $x'(0) = \log 1 = 0$ . Particularizando sucesivamente  $t = 0$  en las restantes derivadas, obtenemos  $x''(0) = 1$ ,  $x'''(0) = 0$  y  $x^{(4)}(0) = -1$ . Por tanto:

$$p(t) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4.$$

## 17.17. Una ecuación en diferencias finitas

Resolver la ecuación en diferencias finitas

$$x(m+2) + 2x(m+1) + x(m) = m^2$$

con la condición inicial  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 0$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** La ecuación característica es  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  cuya solución es  $\lambda = -1$  (doble). La solución general de la ecuación en diferencias homogénea asociada es por tanto:

$$x_h(m) = (-1)^m C_1 + (-1)^m C_2, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Dado que 1 no es solución de la ecuación característica, por un conocido teorema una solución particular de la ecuación completa es de la forma  $x_p(m) = am^2 + bm + c$ . Obligando a que sea solución:

$$a(m+2)^2 + b(m+2) + c + 2[a(m+1)^2 + b(m+1) + c] + am^2 + bm + c = m^2.$$

Operando e identificando coeficientes de  $m$  obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 8a + 4b = 0 \\ 6a + 4b + 4c = 0 \end{cases}$$

cuya solución es  $a = 1/4$ ,  $b = -1/2$ ,  $c = 1/8$ . La solución general de la ecuación completa es

$$x(m) = \frac{1}{8}(2m^2 - 4m + 1) + (-1)^m(C_1 + C_2m).$$

Imponiendo la condición inicial  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + C_1 = 1 \\ \frac{1}{8}(-1) + (-1)(C_1 + C_2) = 0, \end{cases}$$

lo cual implica  $C_1 = 7/8$ ,  $C_2 = -1$ . La solución al problema de valor inicial propuesto es

$$x(m) = \frac{2m^2 - 4m + 1 + (-1)^m(7 - 8m)}{8}.$$

## 17.18. Un sistema en diferencias finitas

Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias finitas

$$\begin{cases} x(m+1) = x(m) - 2y(m) \\ y(m+1) = 2x(m) - y(m) \end{cases}$$

con la condición inicial  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Denotando  $X_m = (x(m), y(m))^t$  podemos expresar

$$X_{m+1} = AX_m \text{ con } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia

$$X_m = AX_{m-1} = A^2X_{m-2} = A^3X_{m-3} = \dots = A^mX_0.$$

El polinomio característico de  $A$  es  $\lambda^2 + 3$ . Hallaremos la potencia  $m$ -ésima de  $A$  usando el teorema de Cayley-Hamilton. Efectuando la división euclídea de  $\lambda^m$  entre  $\lambda^2 + 3$ :

$$\lambda^m = q(\lambda)(\lambda^2 + 3) + \alpha\lambda + \beta, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Sustituyendo  $\lambda$  por  $A$  obtenemos  $A^m = c(A) \cdot 0 + \alpha A + \beta I = \alpha A + \beta I$ . Para hallar  $\alpha$  y  $\beta$  sustituimos una raíz del polinomio característico (por ejemplo  $\sqrt{3}i$ ) en (1) e igualamos partes real e imaginaria. Hallamos previamente  $(\sqrt{3}i)^m$  según que  $m$  sea par o impar:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}i)^{2k} = (\sqrt{3})^{2k}(i)^{2k} = (-1)^k 3^k \\ (\sqrt{3}i)^{2k+1} = (\sqrt{3}i)^{2k} \sqrt{3}i = (-1)^k 3^k \sqrt{3}i. \end{cases}$$

Sustituyendo pues  $\lambda = \sqrt{3}i$  en (1)

$$\begin{cases} m = 2k \Rightarrow (-1)^k 3^k = \sqrt{3}i\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 0, \beta = (-1)^k 3^k \\ m = 2k + 1 \Rightarrow (-1)^k 3^k \sqrt{3}i = \sqrt{3}i\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = (-1)^k 3^k, \beta = 0. \end{cases}$$

Podemos por tanto expresar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(2k) \\ y(2k) \end{bmatrix} &= (-1)^k 3^k I \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k 3^k \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x(2k+1) \\ y(2k+1) \end{bmatrix} &= (-1)^k 3^k A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^k 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k 3^k \\ (-1)^k 2 \cdot 3^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 17.19. Ecuación diferencial por serie de potencias

Se considera la ecuación diferencial  $y''(x) + y(x) = x$ . Sea  $y(x)$  solución de la ecuación que se puede expresar como suma de una serie entera convergente en  $\mathbb{R}$ . Determinar explícitamente todas las funciones  $y(x)$ .

**Solución.** Derivando  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  obtenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Obligando a que sea solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) = x &\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n-1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n-1) a_{n+2} + a_n] x^n = x \end{aligned}$$

Identificando coeficientes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ 6a_3 + a_1 = 1 \\ 12a_4 + a_2 = 0 \\ 20a_5 + a_3 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{a_0}{2} \\ a_3 = \frac{1 - a_1}{6} \\ a_4 = \frac{a_0}{24} \\ a_5 = \frac{-1 + a_1}{120} \\ \dots \end{cases}$$

Nótese que en general, se verifica

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \text{ si } n \geq 2.$$

Los coeficientes  $a_2, a_3, a_4, a_5$  se pueden escribir en la forma

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3!} - \frac{a_1}{3!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{4!}, \quad a_5 = -\frac{1}{5!} + \frac{a_1}{5!},$$

lo cual sugiere las fórmulas

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}. \quad (1)$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}. \quad (2)$$

Demostremos la fórmula (1) por inducción. Es cierta para  $k = 1$ . Supongamos que es cierta para  $k$ , entonces usando la relación (\*)

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} = a_{2k+2} &= -\frac{a_{2k}}{(2k+1)(2k+2)} \\ &= -\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{(2(k+1))!}, \end{aligned}$$

es decir la fórmula es cierta para  $k + 1$ .

De la misma forma, la fórmula (2) es cierta para  $k = 1$ . Supongamos que es cierta para  $k$ , entonces usando la relación (\*)

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)+1} = a_{(2k+1)+2} &= -\frac{a_{2k+1}}{(2k+2)(2k+3)} \\ &= -\left( \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right) \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}a_1}{(2k+3)!} - \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} = \frac{(-1)^{k+1}a_1}{(2(k+1)+1)!} - \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!},$$

es decir la fórmula es cierta para  $k+1$ . Podemos por tanto escribir

$$y(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= (x - \operatorname{sen} x) + a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x = x + a_0 \cos x + (a_1 - 1) \operatorname{sen} x.$$

En consecuencia,

$$y(x) = x + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

## 17.20. Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Se considera el siguientes teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial:

*Teorema.* Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $D$ . Sea  $(x_0, y_0) \in D$ . Entonces, existe una única solución de la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

1. Aplicando el teorema anterior, estudiar en que subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  las siguientes ecuaciones admiten solución única

$$(a) y' = x^2 + y^3. \quad (b) y' = \frac{1}{y^2}. \quad (c) y' = \frac{y+1}{x-y}. \quad (d) y' = \frac{3}{2}y^{2/3}.$$

2. Comprobar que tanto  $\varphi(x) = x^3/8$  como  $\psi(x) = 0$  son soluciones de la ecuación diferencial  $y' = \frac{3}{2}y^{2/3}$  que pasan por  $(0, 0)$ . ¿Supone esto una contradicción?

**Solución.** 1. (a) Las funciones

$$f(x, y) = x^2 + y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2,$$

son continuas en  $D = \mathbb{R}^2$ , por tanto para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  existe una única solución de la ecuación que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

(b) Las funciones

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3},$$

son continuas en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ , por tanto para todo  $(x_0, y_0) \in D$  existe una única solución de la ecuación que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

(c) Las funciones

$$f(x, y) = \frac{y+1}{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2},$$

son continuas en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ , por tanto para todo  $(x_0, y_0) \in D$  existe una única solución de la ecuación que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

(d) Las funciones

$$f(x, y) = \frac{3}{2}y^{2/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}},$$

son continuas en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ , por tanto para todo  $(x_0, y_0) \in D$  existe una única solución de la ecuación que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

2. Efectivamente

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(x) = \frac{3}{8}x^2, \quad \frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{8}\right)^{2/3} = \frac{3}{8}x^2.$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(x) = 0, \quad \frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}0^{2/3} = 0.$$

Este hecho no supone ninguna contradicción pues según el apartado (d) anterior, para la ecuación diferencial  $y' = \frac{3}{2}y^{2/3}$ , no se puede asegurar con el teorema dado ni la existencia ni la unicidad en los puntos del eje  $OX$ .





# Capítulo 18

## Sistemas autónomos

### 18.1. Concepto de sistema autónomo

1. Analizar si el siguiente sistema diferencial es autónomo

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + x_1^2 \\ x'_2 = -2x_1x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

2. Analizar si el siguiente sistema diferencial es autónomo

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos t \\ x'_2 = -x_1x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

**Solución.** Recordamos la definición de sistema autónomo.

*Definición.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase al menos 1 y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Al sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

se le llama sistema autónomo asociado al campo  $v$  con la condición inicial  $x(0) = x_0$ .

Denotando

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix},$$

podemos escribir (1) en la forma

$$\begin{cases} x'_1 = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = v_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_0^1 \\ \dots \\ x_n(0) = x_0^n \end{cases} \quad (2)$$

*Observación.* Lo que caracteriza a un sistema autónomo es que en el segundo miembro  $v(x)$  no aparece explícitamente la variable independiente  $t$ .  $\square$

1. El campo vectorial  $v = (1 + x_1^2, -2x_1x_2)^T$  está definido en el abierto  $M = \mathbb{R}^2$ . Además, las parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= 2x_1, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= -2x_2, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -2x_1, \end{aligned}$$

son continuas en  $M$  por tanto  $v$  es al menos de clase 1. El sistema dado es autónomo.

2. Aparece explícitamente la variable independiente  $t$  en el segundo miembro de  $v(x)$ , en consecuencia el sistema no es autónomo.

## 18.2. Concepto de solución de un sistema autónomo

1. Comprobar que la función

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} \tan t \\ \cos^2 t \end{bmatrix}$$

es solución del sistema diferencial autónomo:

$$\begin{cases} x_1' = 1 + x_1^2 \\ x_2' = -2x_1x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

2. Interpretar físicamente el concepto de solución del sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**Solución.** Recordamos la definición de solución de un sistema autónomo.

*Definición.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase al menos 1, y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Sea  $J$  un intervalo real y  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Se dice que  $\varphi$  es solución del sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

si, y sólo si se verifica:

- 1)  $0 \in J$ .
- 2)  $\varphi(J) \subset M$ .
- 3)  $\varphi$  es derivable en  $J$   $\left( \exists \varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt} \right)$ .
- 4)  $\varphi'(t) = v[\varphi(t)] \quad \forall t \in J$ .
- 5)  $\varphi(0) = x_0$ .  $\square$

1. Veamos que se verifican las condiciones de solución:

- 1) 0 pertenece al intervalo  $J = (-\pi/2, \pi/2)$ .
- 2)  $\varphi(J) \subset M$  pues el campo vectorial  $v(x_1, x_2) = (1 + x_1^2, -2x_1x_2)^T$  está definido en  $M = \mathbb{R}^2$ .
- 3) Para todo  $t \in J$  se verifica:

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} \sec^2 t \\ -2 \operatorname{sen} t \cos t \end{bmatrix},$$

es decir  $\varphi$  es derivable en  $J$ .

- 4) Para todo  $t \in J$  se verifica:

$$v[\varphi(t)] = v \begin{bmatrix} \tan t \\ \cos^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 t \\ -2 \tan t \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec^2 t \\ -2 \operatorname{sen} t \cos t \end{bmatrix} = \varphi'(t).$$

$$5) \varphi(0) = \begin{bmatrix} \tan 0 \\ \cos^2 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si  $t$  representa la variable tiempo, una solución  $\varphi(t)$  del sistema representa el movimiento de una partícula en  $\mathbb{R}^n$  que en el instante de tiempo  $t = 0$  pasa por  $x_0$  y que en todo instante de tiempo  $t \in J$ , la velocidad  $\varphi'(t)$  es justamente el vector campo  $v$  particularizado en  $\varphi(t)$ .

### 18.3. Resolución de sistemas diferenciales autónomos

1. Resolver el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x_1' = \cos^2(x_1 + x_2) \\ x_2' = \operatorname{sen}^2(x_1 + x_2) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

2. Resolver el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x_1' = 1 + x_1^2 \\ x_2' = -2x_1x_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

3. Resolver el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x' = -y - x^2y \\ y' = x - xy^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(0) = 1/2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sugerencia. Efectuar un cambio a coordenadas polares.

4. Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2x_3 \\ x'_2 = x_1x_3 \\ x'_3 = x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$$

Sugerencia. Efectuar un cambio a coordenadas cilíndricas.

5. Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = -xz \\ y' = -yz \\ z' = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Sugerencia. Efectuar un cambio a coordenadas esféricas.

$$6. \text{ Resolver } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(1) = 1 \\ x_2(1) = 0 \\ x_3(1) = 3. \end{cases}$$

**Solución.** 1. Sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} x'_1 + x_2 &= \cos^2(x_1 + x_2) + \sin^2(x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow (x_1 + x_2)' = 1 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 &= t + C \Rightarrow x_1(0) + x_2(0) = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = t. \end{aligned}$$

Queda por tanto  $x'_1 = \cos^2 t$ ,  $x'_2 = \sin^2 t$ . Integrando

$$x_1 = \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C_1,$$

$$x_2 = \int \sin^2 t \, dt = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_2.$$

Dado que  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , ha de ser  $C_1 = C_2 = 0$ . La solución del sistema es por tanto

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2t + \sin 2t, 2t - \sin 2t).$$

2. La primera ecuación es

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 + x_1^2, \text{ o bien } \frac{dx_1}{1 + x_1^2} = dt,$$

que es una ecuación de variables separadas. Integrando,  $\arctan x_1 = t + C$  y de la condición inicial  $x_1(0) = 0$  obtenemos  $C = 0$ . Queda por tanto  $\arctan x_1 = t$ , luego  $x_1 = \tan t$ . Sustituyendo en la segunda ecuación

$$x_2' = -2x_2 \tan t, \text{ o bien } \frac{dx_2}{x_2} = -2 \tan t,$$

que también es una ecuación de variables separadas. Integrando

$$\log |x_2| = 2 \log |\cos t| + C, \quad x_2 = K \cos^2 t.$$

De la condición inicial  $x_2(0) = 1$  obtenemos  $K = 1$ , luego  $x_2 = \cos^2 t$ . La solución del sistema es por tanto

$$(x_1, x_2) = (\tan t, \cos^2 t).$$

3. Derivando la relación  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,

$$2xx' + 2yy' = 2\rho\rho' \text{ o bien } xx' + yy' = \rho\rho'.$$

De  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , deducimos  $\tan \theta = y/x$  o bien  $\theta = \arctan(y/x)$ . Derivando esta última igualdad,

$$\theta' = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2} = \frac{y'x - x'y}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - x'y}{\rho^2}.$$

En consecuencia tenemos las relaciones

$$\begin{cases} xx' + yy' = \rho\rho' \\ \theta' = \frac{y'x - x'y}{\rho^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Sustituyendo en el sistema dado,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x(-y - x^2y) + y(x - xy^2) = \rho\rho' \\ \theta' = \frac{(x - xy^2)x - (-y - x^2y)y}{\rho^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -xy(x^2 + y^2) = \rho\rho' \\ \theta' = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\rho^4 \cos \theta \sin \theta = \rho\rho' \\ \theta' = \frac{\rho^2}{\rho^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \rho' = -\rho^3 \cos \theta \sin \theta \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales en polares son

$$\rho^2(0) = x(0)^2 + y(0)^2 = 1/4, \quad \theta(0) = \arctan y(0)/x(0) = 0.$$

De la primera ecuación de (2),  $\theta = t + C$  y de  $\theta(0) = 0$  queda  $\theta = t$ . Sustituyendo en la segunda ecuación de (2),

$$\theta' = -\rho^3 \cos t \operatorname{sen} t, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho^3 \operatorname{sen} 2t}{2},$$

$$2\frac{d\rho}{\rho^3} + \operatorname{sen} 2t dt = 0, \quad -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2} \cos 2t = K.$$

De  $\rho(0) = 1/4$ , obtenemos  $K = -9/2$ . Sustituyendo y simplificando queda  $\rho = \sqrt{2/(9 - \cos 2t)}$ . La solución del sistema dado expresada en polares es por tanto

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{2}{9 - \cos 2t}} \\ \theta = t. \end{cases}$$

4. Las relaciones entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas son

$$x_1^2 + x_2^2 = \rho^2, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad x_3 = x_3.$$

Derivando y simplificando

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' = \rho \rho', \quad \theta' = \frac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{\rho^2}, \quad x_3' = x_3'.$$

Sustituyendo en el sistema original

$$x_1(-x_2 x_3) + x_2(x_1 x_3) = \rho \rho', \quad \rho \rho' = 0,$$

$$\theta' = \frac{x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3}{\rho^2} = \frac{x_3(x_1^2 + x_2^2)}{\rho^2} = x_3,$$

$$x_3' = x_1^2 + x_2^2 = \rho^2.$$

Queda por tanto el sistema

$$\rho' = 0, \quad \theta' = x_3, \quad x_3' = \rho^2.$$

De la primera ecuación obtenemos  $\rho = C_1$ , de la tercera,  $x_3 = C_1^2 t + C_2$  y de la segunda,  $\theta = C_1^2 t^2/2 + C_2 t + C_3$ . En consecuencia

$$\begin{cases} \rho = C_1 \\ \theta = C_1^2 t^2/2 + C_2 t + C_3 \\ x_3 = C_1^2 t + C_2 \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

5. Las relaciones entre las coordenadas cartesianas y esféricas son

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Derivando y simplificando

$$\begin{aligned}
 xx' + yy' + zz' &= \rho\rho', & \theta' &= \frac{y'x - x'y}{x^2 + y^2}, \\
 \varphi' &= \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{z'\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{2xx' + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}}z}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)z' - (xx' + yy')z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en el sistema original

$$\begin{aligned}
 x(-xz) + y(-yz) + z(x^2 + y^2) &= \rho\rho', & \rho\rho' &= 0, \\
 \theta' &= \frac{(-yz)x - (-xz)y}{x^2 + y^2}, & \theta' &= 0, \\
 \varphi' &= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2 - (x(-xz) + y(-yz))z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{z}{\tan \varphi} = \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi}{\tan \varphi} = \rho \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Queda por tanto el sistema

$$\rho' = 0, \quad \theta' = 0, \quad \varphi' = \rho \cos \varphi.$$

De la primera y segunda ecuaciones obtenemos  $\rho = C_1$  y  $\theta = C_2$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \varphi' &= \rho \cos \varphi, & \frac{d\varphi}{dt} &= C_2 \cos \varphi, & \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= C_2 t, \\
 \log \left| \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| &= C_2 \frac{t^2}{2} + K, & \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= e^{C_2 \frac{t^2}{2} + K}, \\
 \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} &= \arctan C_3 e^{C_2 \frac{t^2}{2}}, & \varphi &= -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan C_3 e^{C_2 \frac{t^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{cases} \rho = C_1 \\ \theta = C_2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan C_3 e^{C_2 \frac{t^2}{2}} \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

6. En este caso, el sistema autónomo es lineal homogéneo con coeficientes constantes, para el cual existe un método definido para su resolución. Ver el primer apartado de 17.13.

## 18.4. Sistema autónomo con paso a polares

Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = -y - x^2y \\ y' = x - xy^2 \end{cases}$$

con la condición inicial  $x(0) = 1/2$ ,  $y(0) = 0$ . (Indicación: Pasar a coordenadas polares).

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** De  $\rho^2 = x^2 + y^2$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$2\rho\rho' = 2xx' + 2yy' \text{ o bien } \rho\rho' = xx' + yy'. \quad (1)$$

De  $\theta = \arctan(y/x)$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$\theta' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x - x'y}{x^2} = \frac{1}{\rho^2} (y'x - x'y). \quad (2)$$

Sustituyendo las igualdades del sistema dado en (1) y (2) obtenemos

$$\rho\rho' = -yx - x^3y + yx - xy^3 = -xy(x^2 + y^2) = -\rho^4 \cos\theta \sin\theta,$$

$$\theta' = \frac{1}{\rho^2} (x^2 - x^2y^2 + y^2 + x^2y^2) = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1.$$

El sistema dado en coordenadas cartesianas es pues equivalente al siguiente en polares:

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \cos\theta \sin\theta \\ \theta' = 1 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} \rho(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De  $\theta' = 1$  y  $\theta(0) = 0$  deducimos  $\theta = t$ . Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho^3 \cos t \sin t \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho^3} + \frac{1}{2} \sin 2t dt = 0.$$

Integrando obtenemos

$$-\frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{4} \cos 2t = C.$$

De la condición inicial  $\rho(0) = 1/2$  deducimos  $C = -9/4$ , con lo cual queda

$$\frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{4} \cos 2t = \frac{9}{4}, \text{ o bien } \rho = \sqrt{\frac{2}{9 - \cos 2t}}.$$

La solución del sistema es por tanto

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{2}{9 - \cos 2t}} \\ \theta = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



### 18.5. Sistema autónomo con paso a cilíndricas

Resolver el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2x_3 \\ x'_2 = x_1x_3 \\ x'_3 = x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$$

Indicación: pasar a coordenadas cilíndricas.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** De las relaciones  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\theta = \arctan(x_2/x_1)$ ,  $x_3 = x_3$  deducimos

$$\begin{cases} 2\rho\rho' = 2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 \\ \theta' = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \frac{x'_2x_1 - x'_1x_2}{x_1^2} \\ x'_3 = x'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho\rho' = x_1x'_1 + x_2x'_2 \\ \theta' = \frac{x'_2x_1 - x'_1x_2}{\rho^2} \\ x'_3 = x'_3. \end{cases}$$

Sustituyendo las igualdades del sistema en estas últimas relaciones:

$$\begin{cases} \rho\rho' = x_1(-x_2x_3) + x_2(x_1x_3) = 0 \\ \theta' = \frac{x_1^2x_3 + x_2^2x_3}{\rho^2} = \frac{x_3\rho^2}{\rho^2} = x_3 \\ x'_3 = \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = x_3 \\ x'_3 = \rho^2. \end{cases}$$

De  $\rho' = 0$  deducimos que  $\rho = C_1$  con  $C_1 \geq 0$ , de  $x'_3 = \rho^2 = C_1^2$  que  $x_3 = C_1^2t + C_2$  y de  $\theta' = x_3 = C_1^2t + C_2$  que  $\theta = C_1^2(t^2/2) + C_2t + C_3$ . La solución general del sistema es por tanto:

$$\begin{cases} \rho = C_1 \\ \theta = \frac{C_1^2t^2}{2} + C_2t + C_3 \\ x_3 = C_1^2t + C_2 \end{cases} \quad (C_1 \in \mathbb{R}^+, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

### 18.6. Sistema autónomo con paso a esféricas

Resolver el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x' = -xz \\ y' = -yz \\ z' = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Indicación: pasar a coordenadas esféricas.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM)

**Solución.** De las relaciones

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad \varphi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2})$$

deducimos

$$2\rho\rho' = 2xx' + 2yy' + 2zz' \Leftrightarrow \rho\rho' = xx' + 2yy' + zz'$$

$$\theta' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x - x'y}{y^2} = \frac{y'x - x'y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \frac{z'\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2xx' + 2yy')z}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{z'(x^2 + y^2) - z(xx' + yy')}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades del sistema en estas últimas relaciones:

$$\rho\rho' = -x^2z - y^2z + zx^2 + zy^2 = 0,$$

$$\theta' = \frac{-xyz + xyz}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{\rho^2} \frac{(x^2 + y^2)^2 - x(-x^2z - y^2z)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho^2} \frac{(x^2 + y^2)^2 + z^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{(x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Queda pues el sistema

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = 0 \\ \varphi' = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

De  $\rho' = 0$  deducimos que  $\rho = C_1$  con  $C_1 \geq 0$ , de  $\theta' = 0$  que  $\theta = C_2$ . Resolvamos ahora la ecuación  $\varphi' = C_1 \cos \varphi$ :

$$\varphi' = C_1 \cos \varphi \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = C_1 \cos \varphi \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = C_1 dt = 0.$$

Usando el cambio estándar  $\tan(\varphi/2) = u$  obtenemos

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2 du}{1+u^2} = \int \frac{2 du}{1-u^2} = \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \log \left| \frac{1+\tan(\varphi/2)}{1-\tan(\varphi/2)} \right|.$$

Por tanto

$$\log \left| \frac{1+\tan(\varphi/2)}{1-\tan(\varphi/2)} \right| = C_1 t + K, \quad \frac{1+\tan(\varphi/2)}{1-\tan(\varphi/2)} = C_3 e^{C_1 t},$$

$$1 + \tan(\varphi/2) = C_3 e^{C_1 t} (1 - \tan(\varphi/2)), \quad \tan(\varphi/2) = \frac{C_3 e^{C_1 t} - 1}{C_3 e^{C_1 t} + 1}.$$

La solución general del sistema es

$$\begin{cases} \rho = C_1 \\ \theta = C_2 \\ \varphi = 2 \arctan \frac{C_3 e^{C_1 t} - 1}{C_3 e^{C_1 t} + 1} \end{cases} \quad (C_1 \in \mathbb{R}^+, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

## 18.7. Cálculo de un difeomorfismo enderezante

Hallar un difeomorfismo enderezante  $f$  para el sistema diferencial

$$\begin{cases} x_1' = 1 + x_1^2 \\ x_2' = -2x_1 x_2 \end{cases}$$

y que cumpla  $f(0, b) = (0, b)$  (para cada  $b$ ). Comprobar.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  se verifica  $1 + x_1^2 \neq 0$ . Esto implica que el sistema no tiene puntos de equilibrio. Por un conocido teorema, existen  $V, W \subset \mathbb{R}^2$  abiertos que contienen a  $(0, b)$  y un difeomorfismo (difeomorfismo enderezante)  $f : V \rightarrow W$  tal que  $f(0, b) = (0, b)$  y el sistema dado se transforma por  $f$  en el sistema equivalente

$$\begin{cases} y_1' = 1 \\ y_2' = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Resolvamos el sistema autónomo dado con la condición inicial  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, b)$ . De la primera ecuación:

$$x_1' = 1 + x_1^2 \Leftrightarrow \frac{dx_1}{1+x_1^2} - dt = 0 \Leftrightarrow \arctan x_1 = t + C.$$

Imponiendo la condición  $x_1(0) = 0$  queda  $\arctan x_1 = t$ . Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x_2' = (-2 \tan t)x_2 \Leftrightarrow \frac{dx_2}{x_2} + 2 \tan t dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log |x_2| - 2 \log |\cos t| = C \Leftrightarrow \log \left| \frac{x_2}{\cos^2 t} \right| = C \Leftrightarrow x_2 = K \cos^2 t.$$

Imponiendo la condición  $x_2(0) = b$  queda  $x_2 = b \cos^2 t$ . La solución del sistema (\*) con la condición inicial  $(y_1(0), y_2(0)) = (0, b)$  es  $y_1 = t$ ,  $y_2 = b$ . Eliminando  $t$  y  $b$ :

$$\begin{cases} \arctan x_1 = t \\ x_2 = b \cos^2 t \end{cases} \wedge \begin{cases} y_1 = t \\ y_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \arctan x_1 \\ y_2 = x_2 \sec^2 t = \\ x_2(1 + \tan^2 t) = x_2(1 + x_1^2). \end{cases}$$

El difeomorfismo pedido es por tanto

$$f(x_1, x_2) = (\arctan x_1, x_2(1 + x_1^2)).$$

Comprobemos el resultado:

(a)  $f(0, b) = (\arctan 0, b(1 + 0^2)) = (0, b)$ .

(b) Las funciones componentes de  $f$  son claramente de clase 1 en  $\mathbb{R}^2$ , por tanto  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

(c)  $f$  es inyectiva. En efecto

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) &\Rightarrow \begin{cases} \arctan x_1 = \arctan x_1^* \\ x_2(1 + x_1^2) = x_2^*(1 + (x_1^*)^2) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1^* \\ x_2(1 + x_1^2) = x_2^*(1 + (x_1^*)^2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^* \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (x_1^*, x_2^*). \end{aligned}$$

(d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$  es sobreyectiva. En efecto, si  $(y_1, y_2) \in (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$  entonces el sistema

$$\begin{cases} \arctan x_1 = y_1 \\ x_2(1 + x_1^2) = y_2 \end{cases}$$

tiene como solución  $x_1 = \tan y_1$ ,  $x_2 = y_2/(1 + \tan^2 y_1)$  lo cual permite además determinar la aplicación inversa de  $f$ :

$$f^{-1} : (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f^{-1}(y_1, y_2) = \left( \tan y_1, \frac{y_2}{1 + \tan^2 y_1} \right)$$

que claramente es de clase 1. Concluimos que  $f$  es difeomorfismo. Falta demostrar que el campo  $v$  del sistema dado se transforma en el  $w = (1, 0)^t$  por medio de  $f$ . En efecto,

$$w(y_1, y_2) = (Df(x) \circ v \circ f^{-1})(y_1, y_2) = (Df(x) \circ v)(x_1, x_2)$$

$$= Df(x)(1 + x_1^2, -2x_1x_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x_1^2} & 0 \\ 2x_1x_2 & 1 + x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 \\ -2x_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 18.8. Estabilidad: método directo de Lyapunov

Analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  para los sistemas

$$(a) \begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -xy^4 \\ y' = yx^4 \end{cases}$$

**Solución.** (a) Hallemos la matriz del sistema linealizado correspondiente:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -3x^2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -3y^2,$$

$$A = v'(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial v_1}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial v_2}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda = \pm i$  y por tanto el máximo  $\mu$  de la parte real de estos es 0. El sistema linealizado no proporciona información sobre la estabilidad. La función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es diferenciable en un entorno del origen (de hecho en todo el plano) y presenta un mínimo estricto en él. Esto implica que  $f$  puede ser función de Lyapunov. Hallemos la derivada de  $f$  respecto de  $v$  :

$$L_v f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), v(x, y) \rangle = \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y^3) \rangle$$

$$= -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) < 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Es decir,  $f$  es función estricta de Lyapunov para el origen, lo cual implica que este punto es asintóticamente estable del sistema dado.

(b) Hallemos la matriz del sistema linealizado correspondiente:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -y^4, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -4xy^3, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 4yx^3, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = x^4,$$

$$A = v'(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial v_1}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial v_2}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El único valor propio de  $A$  es  $\lambda = 0$  (doble) y de nuevo,  $\mu = 0$ . El sistema linealizado no proporciona información sobre la estabilidad. Ensayemos como en el apartado anterior si  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es función de Lyapunov para el origen. La derivada de  $f$  respecto de  $v$  es:

$$L_v f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), v(x, y) \rangle = \langle (2x, 2y), (-xy^4, yx^4) \rangle$$

$$= -2x^2y^4 + 2y^2x^4 = 2x^2y^2(x^2 - y^2).$$

En la recta  $x = 2y$  tenemos

$$L_v f(2y, y) = 2(4y^2)y^2(3y^2) = 24y^6 > 0, \quad \forall y > 0.$$

Como  $L_v f$  toma valores positivos en todo entorno perforado del origen,  $f$  no es función de Lyapunov para este punto. Elijamos ahora  $g(x, y) = x^4 + y^4$  que es diferenciable en un entorno del origen (de hecho en todo el plano) y presenta un mínimo estricto en él. Esto implica que  $g$  puede ser función de Lyapunov. Hallemos la derivada de  $g$  respecto de  $v$ :

$$\begin{aligned} L_v g(x, y) &= \langle \nabla g(x, y), v(x, y) \rangle = \langle (4x^3, 4y^3), (-xy^4, yx^4) \rangle \\ &= -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0 \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Es decir,  $g$  es función no estricta de Lyapunov para el origen y podemos por tanto asegurar que es punto estable para el sistema dado.

## 18.9. Función de Liapunov y teorema de Poincaré

1. Enunciado y demostración de la triple caracterización de las integrales primeras para sistemas diferenciales autónomos de primer orden.

Aplicación: Comprobar que  $f(x, y) = e^{-x^2}(y^2 - 1)$  es integral primera para  $S$ , siendo  $S : x' = y, y' = xy^2 - x$ .

2. Enunciado del método directo de Liapunov para la estabilidad de los puntos de equilibrio en los sistemas diferenciales autónomos de primer orden.

Aplicación: Comprobar que  $f(x, y) = e^{-x^2}(y^2 - 1)$  es una función de Liapunov para  $(0, 0)$  en el sistema  $S$ .

3. Enunciado del Teorema de Poincaré (relación entre las órbitas cerradas y los puntos de equilibrio).

Aplicación: Demostrar que  $S$  no tiene órbitas cerradas contenidas ni parcialmente contenidas en el semiplano  $y \geq 1$  ni en el semiplano  $y \leq -1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** No resolveremos la parte que corresponde a la más estricta teoría.

1. Las derivadas parciales de la función  $f$  son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2}(-2x)(y^2 - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-x^2}.$$

Hallemos la derivada del campo escalar  $f(x, y)$  respecto del campo vectorial  $v(x, y)$  del sistema:

$$\begin{aligned}(L_v f)(x, y) &= \langle (\nabla f)(x, y), v(x, y) \rangle = -2xe^{-x^2}(y^2 - 1)y + 2ye^{-x^2}(xy^2 - x) \\ &= e^{-x^2}(-2xy^3 + 2xy + 2xy^3 - 2xy) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

La función  $f$  es por tanto una integral primera del sistema  $S$  en todo el plano.

2. Veamos que efectivamente  $f$  es función de Liapunov para el punto  $(0, 0)$ . Este punto es de equilibrio del sistema  $S$  pues  $v(0, 0) = (0, 0)$ . La función  $f$  está definida y es continua en un entorno  $U$  de  $(0, 0)$  (de hecho podemos tomar  $U = \mathbb{R}^2$ ). La función  $f$  tiene derivadas parciales continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ , en consecuencia es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  y como consecuencia, en un entorno reducido de  $(0, 0)$ .

Por otra parte, se verifica  $(L_v f)(x, y) \leq 0$  en un entorno reducido de  $(0, 0)$  (de hecho se anula en todo  $\mathbb{R}^2$  como vimos en el apartado anterior). Falta pues comprobar que  $(0, 0)$  es punto de mínimo estricto para  $f$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (4x^2 - 2)(y^2 - 1)e^{-x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xye^{-x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2e^{-x^2}.\end{aligned}$$

El punto  $(0, 0)$  es punto crítico para  $f$  y esta es de clase 2 en un entorno de  $(0, 0)$  (de hecho en todo  $\mathbb{R}^2$ ). La matriz hessiana correspondiente es:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva. El origen es por tanto punto de mínimo estricto para  $f$  y por tanto  $f$  es función de Liapunov para  $(0, 0)$  en el sistema  $S$ .

3. Para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos  $v(x, 1) = (1, 0)$  y  $v(x, -1) = (-1, 0)$ . Esto significa que las rectas  $y = 1$  e  $y = -1$  son órbitas de  $S$ . Por otra parte,  $(0, 0)$  es el único punto de equilibrio del sistema.

Según el teorema de Poincaré, si existe una órbita cerrada  $\theta$  con su interior geométrico totalmente contenido en el dominio de  $v$  (en este caso  $\mathbb{R}^2$ ) debe

existir un punto de equilibrio en tal interior. Cualquier órbita cerrada ha de contener por tanto al origen en su interior geométrico y no puede atravesar las rectas  $y = 1$  e  $y = -1$  con lo cual no puede estar ni total ni parcialmente contenida en los semiplanos dados.

### 18.10. Sistema autónomo: dibujo de una órbita

Dibujar la órbita que pasa por el punto  $(0, 2)$  en el sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ y' = -2xy. \end{cases}$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Hallemos una integral primera del sistema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{1+x^2} \cdot 2xy dx + (1+x^2) dy = 0, \quad \frac{2x dx}{1+x^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Integrando

$$\log |1+x^2| + \log |y| = K, \quad \log |(1+x^2)y| = K, \quad (1+x^2)y = C.$$

Una integral primera del sistema que está definida en todo el plano de fases  $\mathbb{R}^2$  es por tanto  $F(x, y) = (1+x^2)y$ . Comprobemos en efecto que es integral primera

$$\langle \nabla F, v \rangle = \langle (2xy, 1+x^2), (1+x^2, -2xy) \rangle = (2xy)(1+x^2) - (1+x^2)(2xy) = 0.$$

Dado que  $1+x^2 \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , el sistema no tiene puntos de equilibrio. Esto implica que todo conjunto de nivel  $F(x, y) = C$  es una órbita. El conjunto de nivel que pasa por  $(0, 2)$  es  $(1+x^2)y = 2$ . Dibujemos este conjunto de nivel, es decir la gráfica de la función  $f(x) = 2/(1+x^2)$ . El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$  y la función es par. La recta  $y = 0$  es asíntota horizontal. Hallemos sus extremos:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

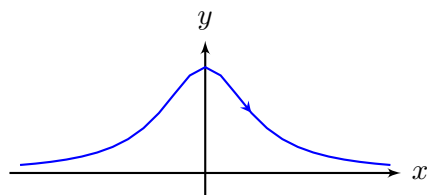
Para  $x > 0$  tenemos  $f'(x) < 0$  y para  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$ . Tenemos por tanto en  $(0, 2)$  un punto de máximo estricto. Hallemos sus puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{-4(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(-4x)}{(1+x^2)^4} = \frac{-4(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3}$$



$$= \frac{4(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1.$$

Para  $0 < x < 1$  tenemos  $f''(x) < 0$  y para  $x > 1$ ,  $f''(x) < 0$ . Por tanto tenemos en  $(1, 1)$  un punto de inflexión. Por la paridad de la función, concluimos que  $(-1, 1)$  también lo es. El vector velocidad en  $(0, 2)$  es  $v(0, 2) = (1, 0)$ , lo cual determina el sentido de recorrido de la órbita.



### 18.11. Órbita con paso a polares

Dibujar la órbita que pasa por el punto  $(1, 0)$  en el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = -y - xy \\ y' = x + x^2. \end{cases}$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM)

**Solución.** De  $\rho^2 = x^2 + y^2$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$2\rho\rho' = 2xx' + 2yy' \text{ o bien } \rho\rho' = xx' + yy'. \quad (1)$$

De  $\theta = \arctan(y/x)$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$\theta' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x - x'y}{x^2} = \frac{1}{\rho^2}(y'x - x'y). \quad (2)$$

Sustituyendo las igualdades del sistema dado en (1) y (2) obtenemos

$$\rho\rho' = -xy - x^2y + yx + yx^2 = 0,$$

$$\theta' = \frac{1}{\rho^2}(x^2 + x^3 + y^2 + xy^2) = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 + x\rho^2) = 1 + \rho \cos \theta.$$

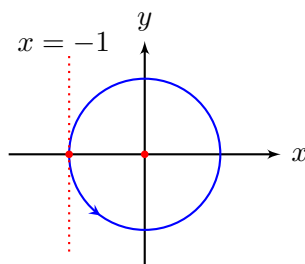
La órbita a dibujar, corresponde a la solución de:

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = 1 + \rho \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} \rho(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Un conjunto de nivel  $C$  que contiene a  $(1, 0)$  está determinado por  $\rho = 1$  o equivalentemente  $x^2 + y^2 = 1$ . Hallemos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} -y - xy = 0 \\ x + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y(1+x) = 0 \\ x(1+x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \vee \\ (x, y) = (-1, \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

El único punto de equilibrio que pasa por  $C$  es  $(-1, 0)$  y el vector campo en  $(1, 0)$  es  $v(1, 0) = (0, 1)$ , lo cual implica que la órbita pedida es la circunferencia unidad excluido el punto  $(-1, 0)$  recorrida en sentido antihorario, cuya gráfica se dibuja inmediatamente.



## 18.12. Soluciones periódicas y órbita

(i) Hallar el valor de  $\alpha$  para que el problema de valor inicial

$$x''(t) + \alpha x(t) = 0 \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$$

tenga soluciones periódicas de periodo  $T = \pi$ .

(ii) Para ese valor de  $\alpha$  determinar una ecuación implícita de la órbita que pasa por el punto  $(1, 0)$  en el sistema diferencial lineal asociado a la ecuación diferencial anterior.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (i) La ecuación característica es  $\lambda^2 + \alpha = 0$ . Analizaremos tres casos:

Caso 1.  $\alpha < 0$ . Las raíces son  $\lambda_1 = \sqrt{-\alpha}$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{-\alpha}$ . Una base del espacio de las soluciones es  $\{e^{\sqrt{-\alpha}t}, e^{-\sqrt{-\alpha}t}\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{-\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha}t}.$$

Es claro por el conocimiento de la función exponencial que no existen en este caso soluciones periódicas.

Caso 2.  $\alpha = 0$ . La raíz es  $\lambda = 0$  (doble). Una base del espacio de las soluciones es  $\{1, t\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto  $x(t) = C_1 + C_2 t$ . Las únicas soluciones periódicas en este caso se obtienen para  $C_2 = 0$  i.e. las soluciones constantes, pero su periodo no es  $\pi$ .

Caso 3.  $\alpha > 0$ . Las raíces son  $\lambda_1 = \sqrt{\alpha} i$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha} i$ . Una base del espacio de las soluciones es  $\{\cos \sqrt{\alpha} t, \sin \sqrt{\alpha} t\}$ . La solución general de la ecuación es por tanto

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\alpha} t + C_2 \sin \sqrt{\alpha} t.$$

De la igualdad  $\sqrt{\alpha}(t + T) = \sqrt{\alpha} t + 2\pi$  deducimos que las soluciones anteriores son periódicas de periodo  $T = 2\pi/\sqrt{\alpha}$ , excepto para la solución nula. Para  $T = \pi$  obtenemos  $\alpha = 4$ . En este caso  $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ , y la única solución que satisface las condiciones iniciales es  $x(t) = \cos 2t$ .

(ii) Denotando  $y = x'$  tenemos  $y' = x'' = -4x$ . Por tanto el sistema lineal asociado es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x \end{cases} \text{ con } \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una integral primera del sistema anterior se obtendrá resolviendo la ecuación diferencial de variables separadas  $dy/dx = -4x/y$  o bien  $4x dx + y dy = 0$ . La solución general es  $4x^2 + y^2 = C$ , y el conjunto de nivel que pasa por  $(1, 0)$  es por tanto la elipse de ecuación implícita  $4x^2 + y^2 = 4$ .

### 18.13. Tres órbitas en un conjunto de nivel

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

determinar una integral primera  $F(x, y)$  no constante del mismo. Comprobar. Dibujar las órbitas que determina el conjunto de nivel que pasa por el origen.

**Solución.** Expresando el sistema en la forma

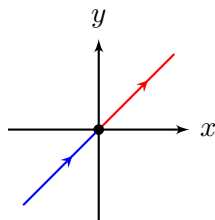
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 \end{cases}$$

y dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos  $dy/dx = x^2/y^2$  o bien  $y^2 dy - x^2 dx = 0$  cuya solución general es  $y^3 - x^3 = C$ . Una integral

primera del sistema es por tanto  $F(x, y) = y^3 - x^3$ . Comprobemos:

$$\langle \nabla F, v \rangle = -3x^2y^2 + 3y^2x^2 = 0.$$

El conjunto de nivel que pasa por el origen es  $y^3 - x^3 = 0$  o equivalentemente  $y = x$ . El único punto de equilibrio del sistema es el origen, que pasa por este conjunto de nivel, por tanto, determina tres órbitas: el origen y las semirectas  $y = x$  ( $x > 0$ ),  $y = x$  ( $x < 0$ ). Podemos determinar el sentido de recorrido de las semirectas hallando el vector velocidad:  $v(a, a) = (a^2, a^2) = (+, +)$ .



## 18.14. Integral primera y órbita circular

Hallar una integral primera no constante definida en un conjunto lo más amplio posible del plano de fases para el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = 3y + x^2y \\ y' = -4x + xy^2. \end{cases}$$

Comprobar el resultado. Hallar las órbitas circulares.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Expresamos el sistema en la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + xy^2. \end{cases}$$

Dividiendo y separando variables obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x + xy^2}{3y + x^2y}, \quad \frac{x}{x^2 + 3} dx + \frac{y}{4 - y^2} dy = 0.$$

Integrando

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + 3) - \frac{1}{2} \log|4 - y^2| = C_1, \quad \log \left| \frac{x^2 + 3}{4 - y^2} \right| = C_2, \quad \frac{x^2 + 3}{4 - y^2} = C.$$

Una integral primera del sistema es por tanto la función  $F(x, y) = (x^2 + 3)/(4 - y^2)$  definida en todo el plano de fases  $\mathbb{R}^2$  excepto en las rectas  $y = \pm 2$ . Comprobemos que efectivamente  $F$  es una integral primera del sistema

$$\begin{aligned} \langle \nabla F, v \rangle &= \frac{\partial F}{\partial x} v_1 + \frac{\partial F}{\partial y} v_2 = \frac{2x}{4 - y^2} (3y + x^2 y) + \frac{2y(x^2 + 3)}{(4 - y^2)^2} (-4x + xy^2) \\ &= \frac{2x(3y + x^2 y)(4 - y^2) + 2y(x^2 + 3)(-4x + xy^2)}{(4 - y^2)^2} = \dots = 0. \end{aligned}$$

Hallemos los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} 3y + x^2 y = 0 \\ -4x + xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3 + x^2) = 0 \\ x(-4 + y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(-4 + y^2) = 0. \end{cases}$$

El único punto de equilibrio del sistema es  $(x, y) = (0, 0)$ , por tanto todo conjunto de nivel  $F(x, y) = C$  que no pase por  $(0, 0)$  es una órbita. Obtenemos una circunferencia si y sólo si  $C = 1$ : la circunferencia unidad  $x^2 + y^2 = 1$ . En el punto  $(1, 0)$  de esta órbita se verifica  $v(1, 0) = (0, -4)$ , es decir la órbita se recorre en sentido horario.

### 18.15. Estabilidad en el interior de una elipse

Especificar y representar el espacio de fases del sistema diferencial

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - y \\ y' &= \log(6 - 2x^2 - 3y^2). \end{aligned}$$

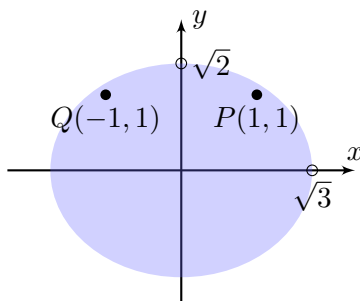
Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** La primera componente del campo es  $v_1(x, y) = x - y$  que está definida en  $\mathbb{R}^2$ . La segunda componente  $v_2(x, y) = \log(6 - 2x^2 - 3y^2)$  está definida si y sólo si  $6 - 2x^2 - 3y^2 > 0$  que equivale a  $x^2/3 + y^2/2 < 1$ . El espacio de fases es por tanto el interior geométrico de la elipse  $x^2/3 + y^2/2 = 1$ . Hallemos los puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ \log(6 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 2x^2 + 3y^2 = 5. \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos los puntos de equilibrio  $P(1, 1)$  y  $Q(-1, 1)$ .



La matriz jacobiana asociada al campo es:

$$J_v(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -4x & -6y \\ \frac{2x}{6-2x^2-3y^2} & \frac{-1}{6-2x^2-3y^2} \end{bmatrix}.$$

Las matrices de los correspondientes sistemas linealizados son:

$$A = J_v(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = J_v(-1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A$  es  $\lambda^2 + 2\lambda - 16$  y su espectro,  $\text{spec}(A) = \{-1 \pm \sqrt{17}\}$ . El máximo de la parte real de estos valores propios es  $\mu_A = -1 + \sqrt{17} > 0$  lo cual implica que  $P(1, 1)$  es inestable.

El polinomio característico de  $B$  es  $\lambda^2 + 8\lambda + 16$  y su espectro,  $\text{spec}(B) = \{-4\}$ . El máximo de la parte real de estos valores propios es  $\mu_B = -4 < 0$  lo cual implica que  $Q(-1, 1)$  es asintóticamente estable.

## 18.16. Teorema de Poincaré-Bendixson

1. Enunciar el Teorema de Bendixson. Aplicarlo al sistema:

$$S : \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

2. Enunciar el Teorema de Poincaré. Hallar los puntos de equilibrio de  $S$  y aplicar dicho teorema a este sistema (puede ser útil dibujar las curvas  $x_1 - x_2 - x_1^3 = 0$  y  $x_1 + x_2 - x_2^3 = 0$ ).

3. Enunciar el Teorema de Poincaré-Bendixson. Demostrar que la corona circular  $1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2$  cumple las hipótesis de este teorema en relación al sistema  $S$ . Concluir.

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1. Enunciado del Teorema de Bendixson:

Sea  $M \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $v = (v_1, v_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $r$  ( $r \geq 1$ ) entonces, si  $\text{Div}(v)$  mantiene signo constante ( $\neq 0$ ) en una región  $R \subset M$  simplemente conexa, el sistema  $x' = v(x)$  no tiene órbitas cerradas completamente contenidas en  $R$ .

Para el sistema  $S$  tenemos:

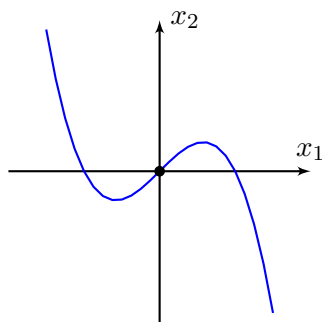
$$\text{Div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 2 - 3x_1^2 - 3x_2^2$$

En la circunferencia  $2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0$  (centro el origen y radio  $\sqrt{2/3}$ ), la divergencia del campo es nula, en su interior geométrico  $R$  (simplemente conexo) es positiva y en su exterior geométrico (no simplemente conexo) negativa. Podemos pues concluir que  $S$  no tiene órbitas cerradas completamente contenidas en  $R$ .

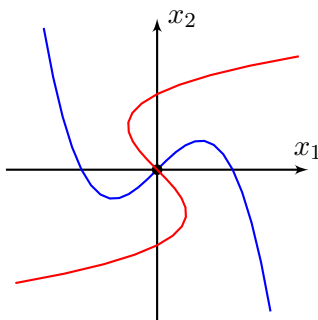
2. Enunciado del Teorema de Poincaré:

Sea  $M \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $v = (v_1, v_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $r$  ( $r \geq 1$ ). Sea  $\theta$  una órbita cerrada del sistema  $x' = v(x)$  cumpliendo que  $\text{Int}(\theta) \subset M$  (interior geométrico). Entonces, existe un punto de equilibrio  $x^*$  del sistema tal que  $x^* \in \text{Int}(\theta)$ .

Es claro que  $x^* = (0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. Para ver que no hay más, dibujaremos las gráficas que menciona el enunciado. Para la función polinómica impar  $x_2 = x_1 - x_1^3$  fácilmente obtenemos su gráfica:



Para  $x_1 + x_2 - x_2^3 = 0$  dibujamos de manera análoga la de  $x_2 + x_1 - x_1^3 = 0$  e intercambiamos los papeles de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ . Obtenemos la dos gráficas:



Se concluye pues que  $x^* = (0, 0)$  es el único punto de equilibrio del sistema. Esto quiere decir que si existe una órbita cerrada del sistema, esta ha de contener en su interior geométrico al origen.

### 3. Enunciado del Teorema de Poincaré-Bendixson:

Sea  $M \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $v = (v_1, v_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $r$  ( $r \geq 1$ ). Sea  $F \subset M$  compacto y  $x_0 \in F$ . Sea además  $F$  positivamente invariante, es decir para todo  $y_0 \in F$  la solución  $\varphi(t)$  de  $x' = v(x)$ ,  $x(0) = y_0$  cumple  $\varphi(t) \in F$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces, ocurre al menos una de las siguientes afirmaciones:

- (i)  $x_0$  es punto de equilibrio.
- (ii) La solución  $\varphi(t)$  de  $x' = v(x)$ ,  $x(0) = x_0$  cumple  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x^* \in F$  siendo  $x^*$  punto de equilibrio.
- (iii) La solución  $\varphi(t)$  de  $x' = v(x)$ ,  $x(0) = x_0$  es periódica y la órbita cerrada correspondiente está contenida en  $F$ .
- (iv) La órbita que pasa por  $x_0$  se aproxima asintóticamente a una órbita cerrada contenida en  $F$ .

En nuestro caso el conjunto  $F \equiv 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2$  es cerrado y acotado, en consecuencia compacto. Veamos que es positivamente invariante. Para ello hallemos el producto escalar  $\langle x, v(x) \rangle$  en la frontera de  $F$  para ver hacia donde está dirigido el vector campo. Usaremos coordenadas polares  $x_1 = \rho \cos \theta$ ,  $x_2 = \rho \sin \theta$ :

$$\begin{aligned} \langle x, v(x) \rangle &= \langle (x_1, x_2), (x_1 - x_2 - x_1^3, x_1 + x_2 - x_2^3) \rangle \\ &= x_1^2 + x_2^2 - (x_1^4 + x_2^4) = \rho^2 [1 - \rho^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)] \end{aligned}$$

En la frontera de  $F$  tenemos:

$$\rho = 1 \Rightarrow \langle x, v(x) \rangle = 1 - (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \geq 0,$$



$$\rho = \sqrt{2} \Rightarrow \langle x, v(x) \rangle = 2[1 - 2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)] \leq 0.$$

Esto implica que en  $\rho = 1$  el campo está dirigido hacia afuera y para  $\rho = \sqrt{2}$  hacia adentro. Esto significa que las órbitas *rebotan* en la frontera de  $F$  hacia su interior:  $F$  es positivamente invariante. Dado que en  $F$  no existen puntos de equilibrio, concluimos del Teorema de Poincaré-Bendixson que el sistema tiene órbitas cerradas totalmente contenidas en  $F$ .

### 18.17. Teorema de Bendixson-Dulac, órbitas cerradas

(a) Aplicar el teorema de Bendixson a los sistemas

$$(i) \begin{cases} x'_1 = e^{x_1} \\ x'_2 = 1 - x_1. \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = 1 - x_1^2. \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x' = -y - x + x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

(b) Usar el teorema de Bendixson para estudiar la existencia de órbitas cerradas en el plano de fases  $M = \mathbb{R}^2$  para el sistema

$$S \equiv \begin{cases} x' = 1 - x^2 - y^2 \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

(c) Aplicar la función de Dulac  $F(x, y) = x$  al sistema  $S$  para las misma cuestión.

**Solución.** (a) Recordamos el enunciado del Teorema de Bendixson. Sea  $M \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase 1 tal que  $\text{div}(v)$  mantiene signo constante y distinto de cero en una región  $R \subset M$  simplemente conexa. Entonces, el sistema  $x' = v(x)$  no tiene órbitas cerradas completamente contenidas en  $R$ .

(i)  $\text{div}(v) = (v_1)_{x_1} + (v_2)_{x_2} = e^{x_1} > 0$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dado que  $\mathbb{R}^2$  es simplemente conexo, concluimos que el sistema no tiene órbitas cerradas.

(ii)  $\text{div}(v) = 0$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , por tanto el teorema de Bendixson no proporciona información.

(iii) La divergencia de  $v$  es

$$\text{div}(v) = (v_1)_x + (v_2)_y = -1 + 3x^2 + y^2 - 1 + x^2 + 3y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 2.$$

Se anula en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1/2$ , es decir en la circunferencia de centro el origen y radio  $\sqrt{2}/2$ . Mantiene el signo constante (negativo) en el círculo  $R \equiv x^2 + y^2 < \sqrt{2}/2$  (simplemente conexo). También mantiene el signo constante (positivo) en la región  $x^2 + y^2 > \sqrt{2}/2$  (no simplemente conexa). Podemos concluir que el sistema no tiene órbitas cerradas totalmente

contenidas en  $R$ .

(b)  $\operatorname{div}(v) = -2x + 2x = 0$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . El teorema de Bendixson no proporciona información.

(c) Recordamos el enunciado del Teorema de Bendixson-Dulac. Sea  $M \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase 1. Sea  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Entonces, si  $\operatorname{div}(Fv)$  mantiene signo constante y distinto de cero en una región  $R \subset M$  simplemente conexa, el sistema  $x' = v(x)$  no tiene órbitas cerradas completamente contenidas en  $R$ .

La función  $F$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  y  $Fv = (x - x^3 - xy^2, 2x^2y)$ . Tenemos

$$\operatorname{div}(Fv) = 1 - 3x^2 - y^2 + 2x^2 = 1 - x^2 - y^2.$$

Se anula en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , es decir en la circunferencia de centro el origen y radio 1. Mantiene el signo constante (positivo) en el círculo  $R \equiv x^2 + y^2 < 1$  (simplemente conexo). También mantiene el signo constante (negativo) en la región  $x^2 + y^2 > 1$  (no simplemente conexa). Podemos concluir que el sistema no tiene órbitas cerradas totalmente contenidas en  $R$ .

## 18.18. Ecuación diferencial compleja

Se considera la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$z'' + cz = h(t), \quad z(0) = \gamma_0, \quad z'(0) = \gamma_1. \quad (*)$$

La incógnita es la función compleja  $z(t)$  ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ),  $c, \gamma_0, \gamma_1$  son números complejos y  $h(t)$  una función compleja conocida ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ).

Por otro lado, se considera el sistema diferencial con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' + ax - by = f(t) \\ y'' + bx + ay = g(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = \alpha_0, y(0) = \beta_0 \\ x'(0) = \alpha_1, y'(0) = \beta_1. \end{cases} \quad (**)$$

Las incógnitas son las funciones reales  $x(t), y(t)$  ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ),  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ , son números reales, y  $f(t), g(t)$  son funciones reales continuas conocidas ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Se supone que los problemas (\*) y (\*\*) están relacionados mediante

$$c = a + ib, \quad \gamma_0 = \alpha_0 + i\beta_0, \quad \gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad h(t) = f(t) + ig(t).$$

Se pide:

1. Enunciar con precisión un Teorema que exprese la equivalencia entre los problemas (\*) y (\*\*).
2. Demostrar el Teorema anterior.
3. Aplicar el Teorema para resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x'' - 2y = 10 \cos t \\ y'' + 2x = 10 \sin t \end{cases}$$

con las condiciones iniciales  $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** 1. Dadas dos funciones  $x(t), y(t)$  reales de variable real, la derivada de la función  $z(t) = x(t) + iy(t)$  se define como  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ . Esto sugiere el siguiente enunciado:  
Sean  $x, y$  funciones reales de variable real y sea  $z = x + iy$ . Entonces,  $z$  es solución de la ecuación (\*)  $\Leftrightarrow (x, y)$  es solución del sistema (\*\*)

2. Veamos que el enunciado anterior es cierto, con lo cual se convertirá en un teorema.

$\Rightarrow$ ) Sea  $z = x + iy$  solución de (\*). Usando  $z' = x' + iy'$ ,  $z'' = x'' + iy''$  y las relaciones dadas, se verifica:

$$\begin{cases} x'' + iy'' + (a + ib)(x + iy) = f(t) + ig(t), \\ x(0) + iy(0) = \alpha_0 + i\beta_0, x'(0) + iy'(0) = \alpha_1 + i\beta_1. \end{cases}$$

Igualando partes real e imaginaria:

$$\begin{cases} x'' + ax - by = f(t) \\ y'' + bx + ay = g(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = \alpha_0, y(0) = \beta_0 \\ x'(0) = \alpha_1, y'(0) = \beta_1. \end{cases}$$

Es decir,  $(x, y)$  es solución del sistema (\*\*).

$\Leftarrow$ ) Sea  $(x, y)$  solución del sistema (\*\*). Usando de nuevo  $z' = x' + iy'$ ,  $z'' = x'' + iy''$  y las relaciones dadas, se verifica:

$$z'' + cz = h(t), \quad z(0) = \gamma_0, z'(0) = \gamma_1$$

Es decir,  $z$  es solución de la ecuación (\*).

3. Para el sistema dado tenemos:

$$c = a + bi = 2i, \quad \gamma_0 = \alpha_0 + i\beta_0 = 0, \quad \gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1 = 1,$$

$$h(t) = f(t) + ig(t) = 10 \cos t + 10i \sin t = 10e^{it}.$$

Según el teorema demostrado en el apartado anterior el sistema dado es equivalente a la ecuación

$$z'' + 2iz = 10e^{it}, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1. \quad (1)$$

La ecuación característica es  $\lambda^2 + 2i = 0$  y sus raíces  $\lambda = \sqrt{-2i} = \pm(1-i)$ . La solución general de la homogénea es  $z_h = C_1 e^{(1-i)t} + C_2 e^{-(1-i)t}$ . Una solución particular de la completa es de la forma  $z_p = C e^{it}$ . Obligando a que sea solución obtenemos

$$-C e^{it} + 2i C e^{it} = 10 e^{it} \Rightarrow (-1 + 2i)C = 10 \Rightarrow C = -(2 + 4i).$$

La solución general de la completa es por tanto

$$z = -(2 + 4i)e^{it} + C_1 e^{(1-i)t} + C_2 e^{-(1-i)t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales  $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = 1$  obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 + 4i \\ (1-i)C_1 + (-1+i)C_2 = -3 + 2i \end{cases}$$

cuya solución es  $C_1 = (-1 + 7i)/4$ ,  $C_2 = 9(1+i)/4$ . Es decir, la solución de (1) es

$$\begin{aligned} z &= -(2 + 4i)e^{it} + \frac{-1 + 7i}{4} e^{(1-i)t} + \frac{9(1+i)}{4} e^{-(1-i)t} \\ &= -(2+4i)(\cos t + i \sin t) + \frac{-1 + 7i}{4} e^t (\cos t - i \sin t) + \frac{9(1+i)}{4} e^{-t} (\cos t + i \sin t). \end{aligned}$$

Separando partes real e imaginaria obtenemos la solución del sistema

$$\begin{cases} x = -2 \cos t + 4 \sin t + \frac{e^t}{4} (-\cos t + 7 \sin t) + \frac{e^{-t}}{4} (\cos t - \sin t) \\ y = -4 \cos t - 2 \sin t + \frac{e^t}{4} (7 \cos t + \sin t) + \frac{e^{-t}}{4} (\cos t + \sin t). \end{cases}$$

## 18.19. Sistema autónomo: prolongación en el tiempo a un conjunto

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x'_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Demostrar que toda solución que pasa por un punto del círculo  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  no se puede prolongar en el tiempo al conjunto  $x_1^2 + x_2^2 > 1$ .

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Expresemos el sistema dado en coordenadas polares. De  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$2\rho\rho' = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' \text{ o bien } \rho\rho' = x_1x_1' + x_2x_2'. \quad (1)$$

De  $\theta = \arctan(x_2/x_1)$  y derivando respecto de la variable independiente  $t$ :

$$\theta' = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \frac{x_2'x_1 - x_1'x_2}{x_1^2} = \frac{1}{\rho^2}(x_2'x_1 - x_1'x_2). \quad (2)$$

Sustituyendo las igualdades del sistema dado en (1) y (2) obtenemos

$$\begin{cases} \rho\rho' = -x_1x_2 - x_1^2(1 - x_1 - x_2^2) + x_2x_1 - x_2^2(1 - x_1 - x_2^2) \\ \theta' = \frac{1}{\rho^2}(x_1^2 - x_1x_2(1 - x_1 - x_2^2) + x_2^2 + x_1x_2(1 - x_1 - x_2^2)). \end{cases}$$

El sistema dado en coordenadas cartesianas es pues equivalente al sistema en polares:

$$\begin{cases} \rho' = -\rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Claramente  $\rho = 1$ ,  $\theta = t$  es solución de (3) siendo su órbita correspondiente la circunferencia unidad  $C$ . Sea  $(a_1, a_2)$  un punto que satisface  $a_1^2 + a_2^2 < 1$ , es decir un punto interior del disco unidad  $D$ . Si la solución  $\varphi$  que pasa por  $(a_1, a_2)$  se pudiera prolongar en el tiempo hacia el exterior de  $D$ , entonces la órbita correspondiente tendría que atravesar  $C$ , en contradicción con el teorema de unicidad de las soluciones (el campo es de clase  $\geq 1$  en  $\mathbb{R}^2$ ).

## 18.20. Sistema gradiente y factor integrante

Dado el sistema diferencial plano

$$\begin{cases} x' = 4(x^2 + xy)\mu(x + y) \\ y' = (3x^2 + 2xy - y^2)\mu(x + y) \end{cases}$$

con  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1(\mathbb{R})$ , se pide

(i) Encontrar una función  $\mu$  no idénticamente nula para que dicho sistema sea un sistema gradiente.

(ii) Determinar una función potencial  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  para el sistema gradiente del apartado (i).

(iii) Resolver la ecuación diferencial

$$4(x^2 + xy) dx + (3x^2 + 2xy - y^2) dy = 0.$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** (i) El campo  $v = (v_1, v_2)$  asociado al sistema es de clase 1 en el conjunto simplemente conexo  $\mathbb{R}^2$  en consecuencia el sistema es gradiente si y sólo si  $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} &\Leftrightarrow 4x\mu(x+y) + 4(x^2 + xy)\mu'(x+y) \\ &= (6x + 2y)\mu(x+y) + (3x^2 + 2xy - y^2)\mu'(x+y) \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2\mu'(x+y) - 2(x+y)\mu(x+y) = 0.\end{aligned}$$

Sea  $z = x+y$ , tenemos que hallar una solución de la ecuación  $z\mu'(z) - 2\mu(z) = 0$  y podemos tomar como tal,  $\mu(z) = z^2$ . Por tanto, una función que satisface las condiciones del enunciado es  $\mu(x+y) = (x+y)^2$ .

(ii) Para la función  $\mu(x+y) = (x+y)^2$  el sistema dado es sistema gradiente en todo el plano de fases  $\mathbb{R}^2$  y por tanto existe una función potencial  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase 2 tal que  $\nabla G = -v$ . Integrando respecto de  $x$  obtenemos

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \int -v_1 dx = \int -4(x^2 + xy)(x+y)^2 dx \\ &= \int -4(x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3) dx \\ &= -\frac{4}{5}x^5 - 3x^4y - 4x^3y^2 - 2x^2y^3 + \varphi(y).\end{aligned}$$

Desarrollando ahora  $v_2$  :

$$v_2 = (3x^2 + 2xy - y^2)(x+y)^2 = 3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 - y^4.$$

Obligando a que  $\frac{\partial G}{\partial y} = -v_2$  :

$$-3x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + \varphi'(y) = -3x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + y^4.$$

Queda  $\varphi'(y) = y^4$  y podemos elegir  $\varphi(y) = y^5/5$ . Una función potencial es por tanto

$$G(x, y) = -\frac{4}{5}x^5 - 3x^4y - 4x^3y^2 - 2x^2y^3 + \frac{1}{5}y^5.$$

(iii) Un factor integrante de la ecuación dada es justamente  $\mu(x, y) = (x+y)^2$  con lo cual la solución general de la ecuación dada es  $G(x, y) = C$  con  $C$  constante y  $G(x, y)$  la función potencial del apartado anterior.

### 18.21. Puntos atraídos por el origen en un sistema diferencial

Determinar los puntos  $M(a, b, c)$  que son atraídos por el origen (cuanto  $t \rightarrow +\infty$ ) en el sistema diferencial  $X' = AX$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. de Montes, UPM).

**Solución.** Hallemos los valores propios de  $A$ . Restando a la tercera fila la primera y posteriormente sumando a la primera columna la tercera:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3+\lambda & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = -3 \text{ (simples)}.$$

La matriz  $A$  es por tanto diagonalizable en  $\mathbb{R}$ . Sea  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz invertible tal que  $P^{-1}AP = D = \text{diag}(5, -1, -3)$ , entonces la solución del sistema  $X' = AX$  con la condición inicial  $X(0) = (a, b, c)^t$  es:

$$X(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = Pe^{tD}P^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Si  $u, v, w$  son la primera, segunda y tercera columna de  $A$  respectivamente y si  $(a^*, b^*, c^*)^t = P^{-1}(a, b, c)^t$ , podemos expresar  $X(t)$  en la forma vectorial:

$$X(t) = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{bmatrix} = a^*e^{5t}u + b^*e^{-t}v + c^*e^{-3t}w.$$

Se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (b^*e^{-t}v + c^*e^{-3t}w) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{5t} = +\infty$ . Pero  $u \neq 0$  al ser  $P$  invertible, lo cual implica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = (0, 0, 0)^t$  si y sólo si  $a^* = 0$ . Hallemos una matriz  $P$  para determinar  $a^*$ . Los subespacios propios asociados a la matriz  $A$  y una base de cada uno de ellos son:

$$V_5 \equiv \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad B_{V_5} = \{(1, 1, 1)\},$$

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad B_{V_{-1}} = \{(1, -2, 1)\},$$

$$V_{-3} \equiv \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad B_{V_{-3}} = \{(1, 0, -1)\}.$$

En consecuencia se verifica:

$$\begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

La condición  $a^* = 0$  es equivalente a  $a + b + c = 0$ . Podemos por tanto concluir que el conjunto de los puntos  $M$  que son atraídos por el origen son los puntos de la forma  $(-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .