Trigonometría

Contenidos

Artículos

Historia de la trigonometría 1
Trigonometría 3
Función trigonométrica 21
Identidades trigonométricas 29
Función hiperbólica 38
Anexo:Integrales de funciones trigonométricas 41

Referencias

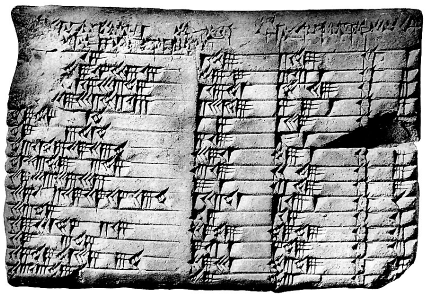
Fuentes y contribuyentes del artículo 46
Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes 47

Licencias de artículos

Licencia 48

Historia de la trigonometría

La **historia de la trigonometría y de las funciones trigonométricas** podría extenderse por más de 4000 años. Los babilonios determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Varias tablas grabadas sobre arcilla seca lo testimonian. Así, por ejemplo, una tablilla babilonia escrita en cuneiforme, denominada Plimpton 322 (en torno al 1900 a. C.) muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas;[1] sin embargo, existen varios debates sobre si, en realidad, se trata de una tabla trigonométrica.



Tablilla babilonia Plimpton 322.

== Historia de la trigonometria La historia de la trigonometría comienza con los Babilonios y los Egipcios. Estos últimos establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, en los tiempos de la Grecia clásica, en el siglo II a.C. el astrónomo Hiparco de Nicea construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos. Comenzó con un ángulo de 71° y yendo hasta 180° con incrementos de 71°, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r. No se sabe el valor que Hiparco utilizó para r.

300 años después, el astrónomo Tolomeo utilizó r = 60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico (base 60) de los babilonios.

Durante muchos siglos, la trigonometría de Tolomeo fue la introducción básica para los astrónomos. El libro de astronomía el Almagesto, escrito por él, también tenía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, y a lo largo del libro dio ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. El teorema de Menelao utilizado para resolver triángulos esféricos fue autoría de Tolomeo.

Al mismo tiempo, los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos hindúes utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos Árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor r = 1 en vez de r = 60, y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas

El occidente latino se familiarizó con la trigonometría Árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano.

A principios del siglo XVII, el matemático John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.

A mediados del siglo XVII Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

Etimología

La palabra "seno" deriva del término en latín, *sinus*, de una mala traducción (vía el árabe de la palabra en sánscrito, *jiva* o *jya*.[2] Aryabhata utilizó el término *ardha-jiva* ("media-cuerda"), que fue acortado a *jiva* y, luego, transliterado por los árabes como *jiba* (جب). Traductores europeos como Roberto de Chester y Gerardo de Cremona en el siglo XII toledano confundieron *jiba* por *jaib* (جب), probablemente debido a que *jiba* (جب) y *jaib* (جب) se escriben igual en la escritura árabe (este sistema de escritura utiliza acentos en lugar de vocales y, en algunos formatos, los acentos no son escritos para facilitar la escritura, por lo que si los lectores no están familiarizados con el idioma pueden confundir palabras con las mismas letras, pero con diferente fonética). Las palabras "minuto" y "segundo" provienen de las frases latinas *partes minutae primae* y *partes minutae secundae*, que pueden ser burdamente traducidas como "primeras pequeñas partes" y "segundas pequeñas partes".[3]

Referencias

[1] Joseph, George G. (200). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Londres: Penguin Books, 2da. edición, págs. 383-384, ISBN 0-691-00659-8.

[2] O'Connor (1996).

[3] Boyer, Carl Benjamin título= (1991). «Greek Trigonometry and Mensuration». pp. 166–167. «Debe recordarse que desde los días de Hiparco hasta los tiempos modernos, no existía tal cosa como los "ratios" trigonométricos. Los griegos y, después de ellos, los hindúes y los árabes utilizaron "líneas" trigonométricas. Al principio, estas tomaron la forma de cuerdas en un círculo y se hizo obligatorio hasta Claudio Ptolomeo asociar valores númericos (o aproximaciones) con las cuerdas. [...] No es improbable que la medida de 260 grados procediera de la astronomía, donde el zodiaco había sido dividido en doce "signos" o 36 "decanos". Un ciclo de las temporadas de 360 días podía fácilmente hacerse coincidir con el sistema de los signos zodiacales y decanos al subdividir cada signo en treinta partes y cada decano en diez partes. Nuestro sistema común de medición de ángulos puede provenir de esta correspondencia. Además, dado que el sistema babilónico de posición para fracciones fue obviamente superior a las fracciones de unidad egipcias y a las fracciones comunes griegas, era natural para Claudio Ptolomeo subdividir sus grados en sesenta *partes minutae primae*, cada una de estas últimas en sesenta *partes minutae secundae* y así sucesivamente. Los traductores han sostenido que las frases latinas usadas en esta conexión han dado origen a nuestras palabras "minuto" y "segundo". Fue sin duda el sistema sexagesimal el que llevó a Ptolomeo a subdividir el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, cada una de ellas a su vez subdividida en sesenta minutos y cada minuto en sesenta segundos.»

Bibliografía

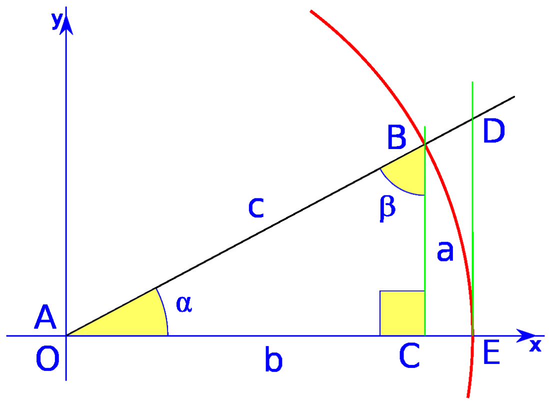
- Boyer, Carl Benjamin (1991). *A "History of Mathematics"* (2da. edición). John Wiley & Sons, Inc.. ISBN 0471543977.
- Gauchet, L. (1917). *Note Sur La Trigonométrie Sphérique de Kouo Cheou-King*.
- Joseph, George G. (2000). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*: Londres: Penguin Books, 2da. edic., ISBN 0-691-00659-8.
- Katz, Victor J. (2007). The *Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. Princeton: Princeton University Press. ISBN 0-691-11485-4.
- Needham, Joseph (1986). *Science and Civilization in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Taipei: Caves Books, Ltd.
- O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (1996), « Trigonometric functions (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html)» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.
- O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (2000), « Biografía de Madhava of Sangamagramma (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Madhava.html)» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.

- Pearce, Ian G. (2002). "Madhava of Sangamagramma" (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Projects/Pearce/Chapters/Ch9_3.html), *MacTutor History of Mathematics Archive*.
- Restivo, Sal. (1992). *Mathematics in Society and History: Sociological Inquiries*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0039-1.

Enlaces externos

- Wikcionario tiene definiciones para **trigonometría**.Wikcionario

Trigonometría



La **trigonometría** es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Deriva de los términos griegos τριγωνο *trigōno* triángulo y μετρον *metron* medida.[1]

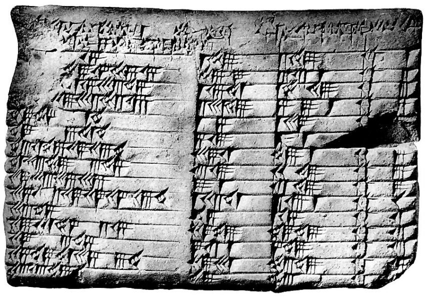
En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

El Canadarm 2, un brazo manipulador robótico gigantesco de la Estación Espacial Internacional. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las funciones trigonómetricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

Historia

Los antiguos egipcios y los babilonios conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Pero las sociedades pre-helénica carecían de la noción de una medida del ángulo y por lo tanto, los lados de los triángulos se estudiaron en su medida, un campo que se podría llamar trilaterometría.



Tablilla babilonia Plimpton 322.

Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Sobre la base de una interpretación de la tablilla cuneiforme Plimpton 322 (c. 1900 aC), algunos incluso han afirmado que los antiguos babilonios tenían una tabla de secantes. Hoy, sin embargo, hay un gran debate acerca de si se trata de una tabla de ternas pitagóricas, una tabla de soluciones de ecuaciones segundo grado, o una tabla trigonométrica.

Papiro de Ahmes

Los egipcios, en el segundo milenio antes de Cristo, utilizaban una forma primitiva de la trigonometría, para la construcción de las pirámides. El Papiro de Ahmes, escrito por el escriba egipcio Ahmes (c. 1680-1620 aC), contiene el siguiente problema relacionado con la trigonometría:

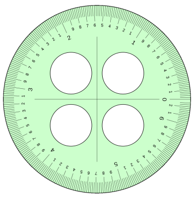
> "Si una pirámide es de 250 codos de alto y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su Seked?"

La solución, al problema, es la relación entre la mitad del lado de la base de la pirámide y su altura. En otras palabras, la medida que se encuentra para la *seked* es la cotangente del ángulo que forman la base de la pirámide y su cara.

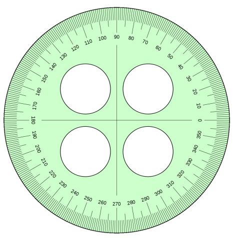
Unidades angulares

En la medición de ángulos, y por tanto en trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado sexagesimal, en matemáticas es el Radián la más utilizada, y se define como la unidad natural para medir ángulos, el Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, se usa en topografía, arquitectura o en construcción.

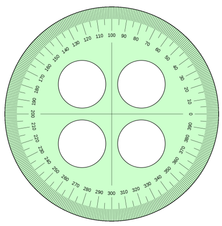
- Radián: unidad angular natural en trigonometría, será la que aquí utilicemos. En una circunferencia completa hay 2π radianes.
- Grado sexagesimal: unidad angular que divide una circunferencia en 360 grados.
- Grado centesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.



Transportador en radianes.



Transportador en grados sexagesimales.

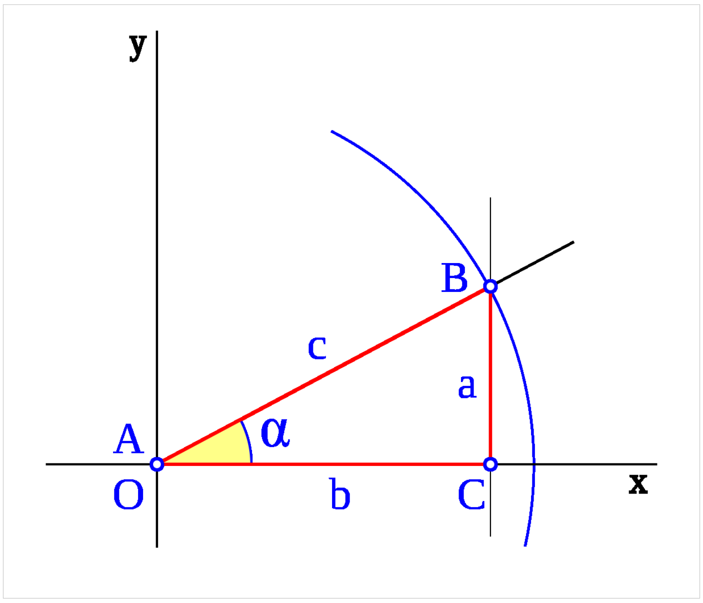


Transportador en grados centesimales

Las funciones trigonométricas

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, con una aplicación inmediata en geometría. Con este propósito se definieron una serie de funciones, las que han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos.

Razones trigonométricas



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de la circunferencia.

- El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

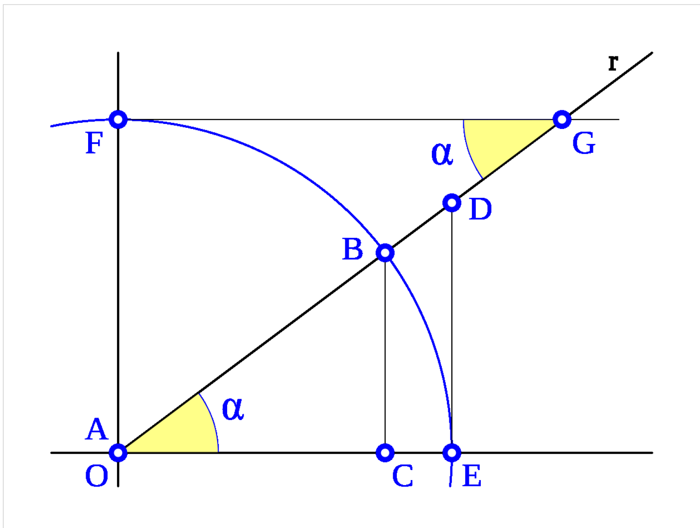
- El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

- La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

Razones trigonométricas inversas



Triángulo ABC proporcional con un ángulo inscrito en una circunferencia de centro A y radio 1

- La Cosecante: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón inversa de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\,\alpha} = \frac{c}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\csc\alpha = \overline{AG}$$

- La Secante: (abreviado como *sec*) es la razón inversa de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\,\alpha} = \frac{c}{b}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\sec\alpha = \overline{AD}$$

- La Cotangente: (abreviado como *cot* o *cta*) es la razón inversa de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\cot \alpha = \overline{GF}$$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno, coseno y tangente**, y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

Equivalencia entre las funciones trigonométricas

	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
$sen\theta$	$sen\theta$	$\sqrt{1-cos^2\theta}$	$\frac{tan\theta}{\sqrt{1+tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{sec^2\theta-1}}{sec\theta}$	$\frac{1}{csc\theta}$
$cos\theta$	$\sqrt{1-sen^2\theta}$	$cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+tan^2\theta}}$	$\frac{cot\theta}{\sqrt{1+cot^2\theta}}$	$\frac{1}{sec\theta}$	$\frac{\sqrt{csc^2\theta-1}}{csc\theta}$
$tan\theta$	$\frac{sen\theta}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{cos\theta}$	$tan\theta$	$\frac{1}{cot\theta}$	$\sqrt{sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{csc^2\theta-1}}$
$cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-sen^2\theta}}{sen\theta}$	$\frac{cos\theta}{\sqrt{1-cos^2\theta}}$	$\frac{1}{tan\theta}$	$cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{csc^2\theta-1}$
$sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-sen^2\theta}}$	$\frac{1}{cos\theta}$	$\sqrt{1+tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+cot^2\theta}}{cot\theta}$	$sec\theta$	$\frac{csc\theta}{\sqrt{csc^2\theta-1}}$
$csc\theta$	$\frac{1}{sen\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+tan^2\theta}}{tan\theta}$	$\sqrt{1+cot^2\theta}$	$\frac{sec\theta}{\sqrt{sec^2\theta-1}}$	$csc\theta$

Otras funciones trigonométricas

Además de las funciones anteriores existen otras funciones trigonométricas, matemáticamente se pueden definir empleando las ya vistas, su uso no es muy corriente, pero si se emplean dado su sentido geométrico, veamos:

El seno cardinal o función **sinc (x)** definida:

$$\text{sinc }(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

El verseno, es la distancia que hay entre la cuerda y el arco en una circunferencia, también se denomina sagita o flecha, se define:

$$\text{versen } \alpha = 1 - \cos \alpha$$

El **semiverseno**, se utiliza en navegación al intervenir en el cálculo esférico:

$$\text{semiversen } \alpha = \frac{\text{versen } \alpha}{2}$$

El **coverseno**,

$$\text{coversen } \alpha = 1 - \text{sen } \alpha$$

El **semicoverseno**

$$\text{semicoversen } \alpha = \frac{\text{coversen } \alpha}{2}$$

El **exsecante**:

$$\text{exsec } \alpha = \sec \alpha - 1$$

Funciones trigonométricas recíprocas

En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones recíproca se denominan con el prefijo arco, cada razón trigonométrica posee su propia función reciproca:

$$y = \operatorname{sen} x$$

y es igual al **seno** de **x**, la función recíproca:

$$x = \operatorname{arcsen} y$$

x es el **arco** cuyo seno vale **y**, o también **x** es el arcoseno de **y**.

si:

$$y = \cos x$$

y es igual al **coseno** de **x**, la función recíproca:

$$x = \arccos y$$

x es el **arco** cuyo coseno vale **y**, que se dice: **x** es el arcocoseno de **y**.

si:

$$y = \tan x$$

y es igual al **tangente** de **x**, la función recíproca:

$$x = \arctan y$$

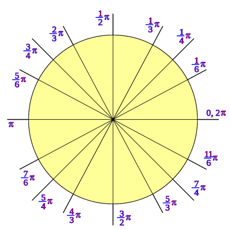
x es el **arco** cuya tangente vale **y**, o **x** es igual al arcotangente de **y**.

NOTA: Es común, que las funciones reciprocas sean escritas de esta manera:

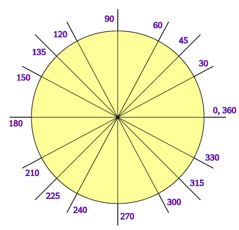
pero se debe tener cuidado de no confundirlas con:

Valor de las funciones trigonométricas

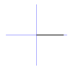
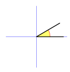
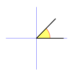
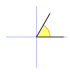
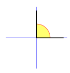
A continuación algunos valores de las funciones que es conveniente recordar:



Circunferencia en radianes.

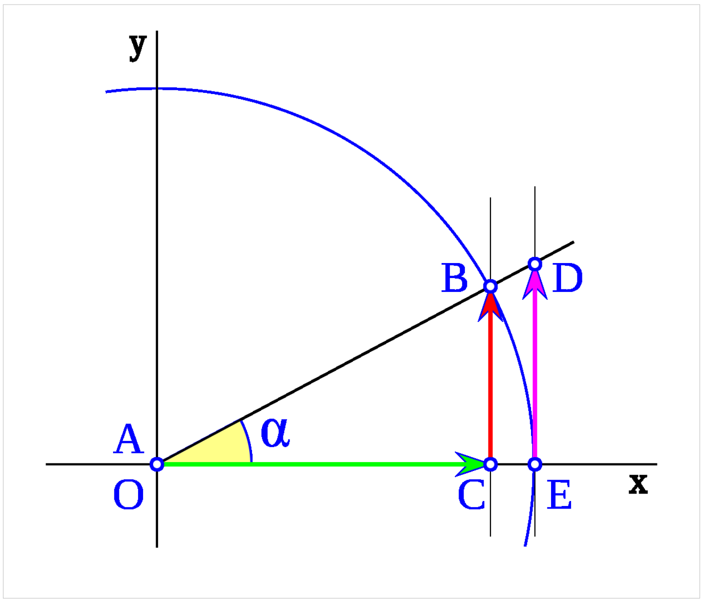


Circunferencia en grados sexagesimales.

	Radianes	Grados sexagesimales	seno	coseno	tangente	cosecante	secante	cotangente
	0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$
	$\frac{1}{6}\pi$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
	$\frac{1}{4}\pi$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1
	$\frac{1}{3}\pi$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	$\frac{1}{2}\pi$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$	0

Para el cálculo del valor de las funciones trigonométricas se confeccionaron tablas trigonométricas. La primera de estas tablas fue desarrollada por Johann Müller Regiomontano en 1467, que nos permiten, conocido un ángulo, calcular los valores de sus funciones trigonométricas. En la actualidad dado el desarrollo de la informática, en prácticamente todos los lenguajes de programación existen bibliotecas de funciones que realizan estos cálculos, incorporadas incluso en calculadoras electrónicas de bolsillo, por lo que el empleo actual de las tablas resulta obsoleto.

Sentido de las funciones trigonométricas



Dados los ejes de coordenadas cartesianas **xy**, de centro **O**, y una circunferencia goniométrica (circunferencia de radio la unidad) con centro en **O**; el punto de corte de la circunferencia con el lado positivo de las **x**, lo señalamos como punto **E**.

Nótese que el punto **A** es el vértice del triángulo, y **O** es el centro de coordenada del sistema de referencia:

$$A \equiv O$$

a todos los efectos.

La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo α sobre el eje de las **x**, corta a la circunferencia en el punto **B**, la vertical que pasa por **B**, corta al eje **x** en **C**, la vertical que pasa por **E** corta a la recta **r** en el punto **D**.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OE}}$$

Los puntos **E** y **B** están en la circunferencia de centro **O**, por eso la distancia $\overline{OE}$ y $\overline{OB}$ son el radio de la circunferencia, en este caso al ser una circunferencia de radio = 1, y dadas las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\text{sen}\alpha = \overline{CB}$$

$$\cos\alpha = \overline{OC}$$
$$\tan\alpha = \overline{ED}$$

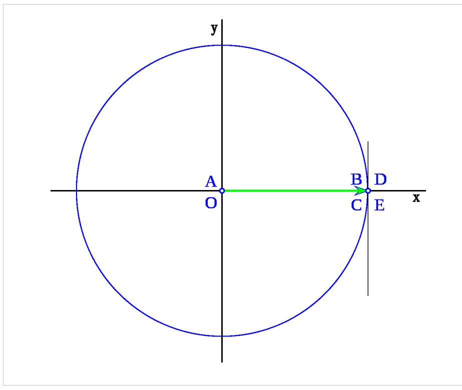
tenemos:

$$\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

La tangente es la relación del seno entre el coseno, según la definición ya expuesta.

Primer cuadrante

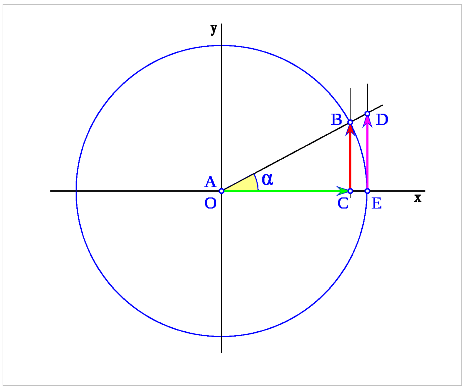
Para ver la evolución de las funciones trigonométricas según aumenta el ángulo, daremos una vuelta completa a la circunferencia, viéndolo por cuadrantes, los segmentos correspondientes a cada función trigonométrica variaran de longitud, siendo esta variación función del ángulo, partiendo en el primer cuadrante de un ángulo cero.



Partiendo de esta representación geométrica de las funciones trigonométricas, podemos ver las variaciones de las funciones a medida que aumenta el ángulo α .

Para $\alpha = 0$, tenemos que **B**, **D**, y **C** coinciden en **E**, por tanto:

$$\mathrm{sen}0 = 0$$
$$\cos 0 = 1$$
$$\tan 0 = 0$$

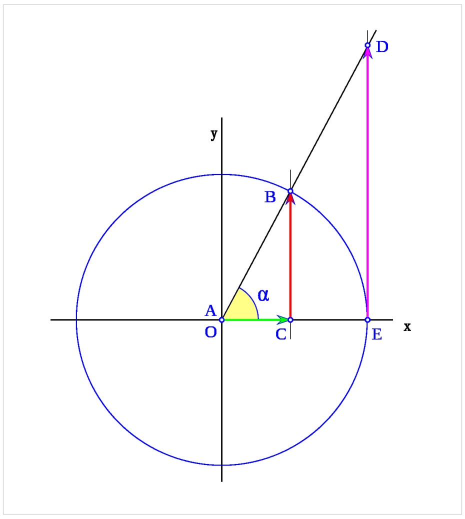


Si aumentamos progresivamente el valor de α , las distancias $\overline{CB}$ y $\overline{ED}$ aumentarán progresivamente, mientras que $\overline{OC}$ disminuirá.

Percatarse que el punto **B** es de la circunferencia y cuando el ángulo aumenta se desplaza sobre ella.

El punto **E** es la intersección de la circunferencia con el **eje x** y no varia de posición.

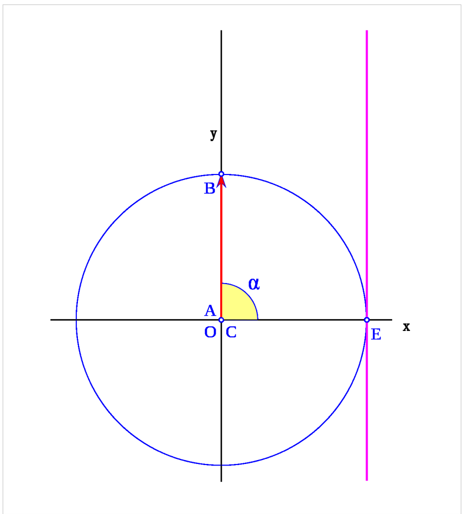
Los segmentos: $\overline{OC}$ y $\overline{CB}$ están limitados por la circunferencia y por tanto su máximo valor absoluto será 1, pero $\overline{ED}$ no está limitado, dado que **D** es el punto de corte de la recta **r** que pasa por **O**, y la vertical que pasa por **E**, en el momento en el que el ángulo $\alpha = 0,5\pi$ rad, la recta **r** será la vertical que pasa por **O**. Dos rectas verticales no se cortan, o lo que es lo mismo la distancia $\overline{ED}$ será infinita.



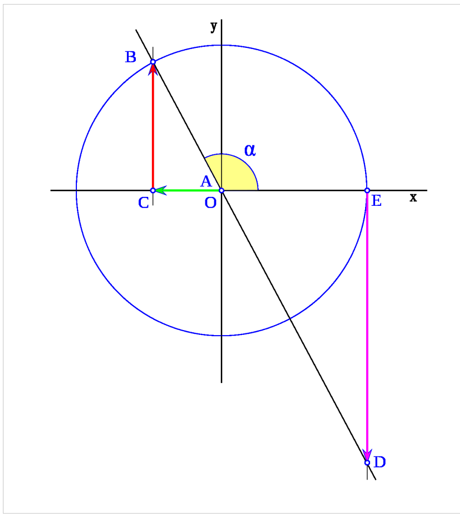
El punto **C** coincide con **A** y el coseno vale cero. El punto **B** esta en el **eje y** en el punto más alto de la circunferencia y el seno toma su mayor valor: uno.

Para un ángulo recto las funciones toman los valores:

$$\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\tan\frac{\pi}{2} = \infty \rightarrow No\ definida$$

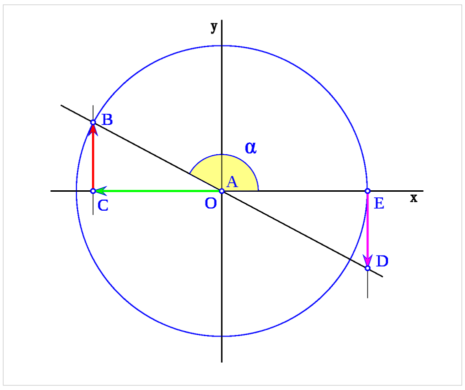


Segundo cuadrante



Cuando el ángulo α supera el ángulo recto, el valor del seno empieza a disminuir según el segmento $\overline{CB}$, el coseno aumenta según el segmento $\overline{OC}$, pero en el sentido negativo de las **x**, el valor del coseno toma sentido negativo, si bien su valor absoluto aumenta cuando el ángulo sigue creciendo.

La tangente para un ángulo α inferior a $0,5\pi$ rad se hace infinita en el sentido positivo de las **y**, para el ángulo recto la recta vertical **r** que pasa por **O** y la vertical que pasa por **E** no se cortan, por lo tanto la tangente no toma ningún valor real, cuando el ángulo supera los $0,5\pi$ rad y pasa al segundo cuadrante la prolongación de **r** corta a la vertical que pasa por **E** en el punto **D** real, en el lado negativo de las **y**, la tangente $\overline{ED}$ por tanto toma valor negativo en el sentido de las **y**, y su valor absoluto disminuye a medida que el ángulo α aumenta progresivamente hasta los π rad.



Resumiendo: en el segundo cuadrante el seno de α, $\overline{CB}$, disminuye progresivamente su valor desde 1, que toma para $\alpha = 0,5\pi$ rad, hasta que valga 0, para $\alpha = \pi$ rad, el coseno, $\overline{OC}$, toma valor negativo y su valor varia desde 0 para $\alpha = 0,5\pi$ rad, hasta –1, para $\alpha = \pi$ rad.
La tangente conserva la relación:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

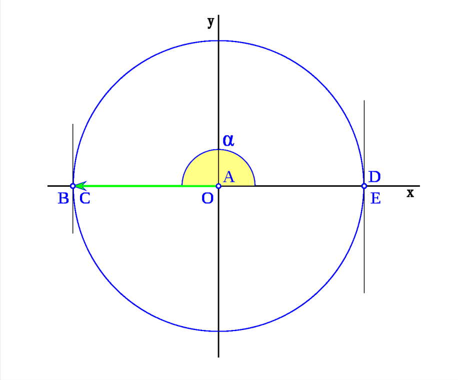
incluyendo el signo de estos valores.

Para un ángulo llano tenemos que el punto **D** esta en **E**, y **B** y **C** coinciden en el eje de las **x** en el lado opuesto de **E**, con lo que tenemos:

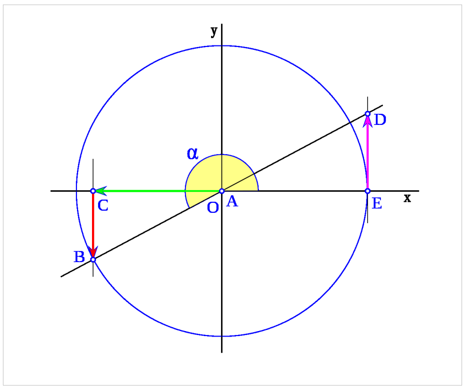
$$\text{sen}\ \pi = 0$$

$$\cos\pi = -1$$

$$\tan\pi = 0$$



Tercer cuadrante



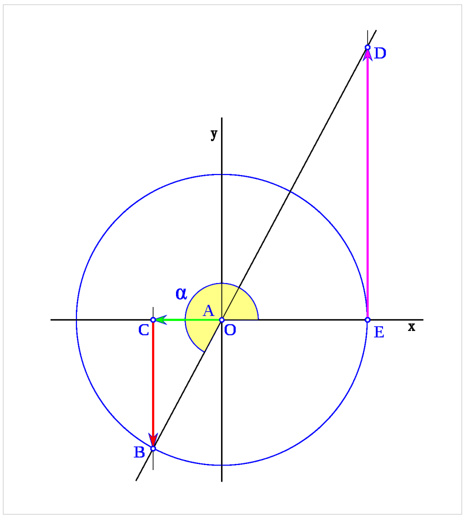
En el tercer cuadrante, comprendido entre los valores del ángulo $\alpha = \pi$ rad a $\alpha = 1,5\pi$ rad, se produce un cambio de los valores del seno, el coseno y la tangente, desde los que toman para π rad:

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \infty \rightarrow No\ definida$$

Cuando el ángulo α aumenta progresivamente, el seno aumenta en valor absoluto en el sentido negativo de las **y**, el coseno disminuye en valor absoluto en el lado negativo de las **x**, y la tangente aumenta del mismo modo que lo hacia en el primer cuadrante.



A medida que el ángulo crece el punto **C** se acerca a **O**, y el segmento $\overline{OC}$, el coseno, se hace más pequeño en el lado negativo de las **x**.

El punto **B**, intersección de la circunferencia y la vertical que pasa por **C**, se aleja del eje de las **x**, en el sentido negativo de las **y**, el seno, $\overline{CB}$.

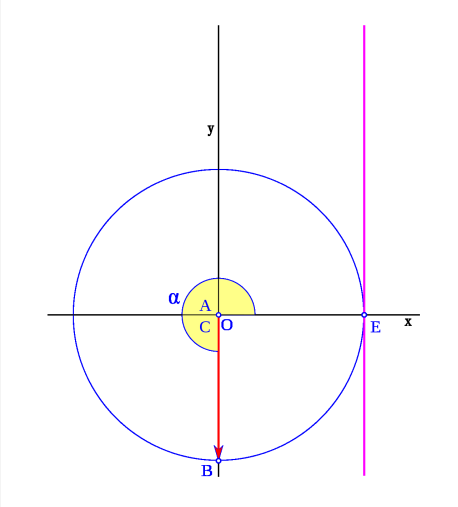
Y el punto **D**, intersección de la prolongación de la recta **r** y la vertical que pasa por **E**, se aleja del eje las **x** en el sentido positivo de las **y**, con lo que la tangente, $\overline{ED}$, aumenta igual que en el primer cuadrante

Cuando el ángulo α alcance $1,5\pi$ rad, el punto **C** coincide con **O** y el coseno valdrá cero, el segmento $\overline{CB}$ será igual al radio de la circunferencia, en el lado negativo de las **y**, y el seno valdrá −1, la recta **r** del ángulo y la vertical que pasa por **E** serán paralelas y la tangente tomara valor infinito por el lado positivo de las **y**.

El seno el coseno y la tangente siguen conservando la misma relación:

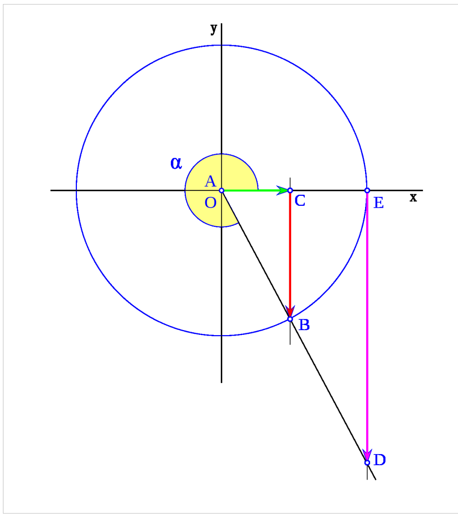
$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

que se cumple tanto en valor como en signo, nótese que a medida que el coseno se acerca a valores cercanos a cero, la tangente tiende a infinito.



Cuarto cuadrante

En el cuarto cuadrante, que comprende los valores del ángulo α entre $1,5\pi$ rad y 2π rad, las variables trigonométricas varían desde los valores que toman para $1,5\pi$ rad:

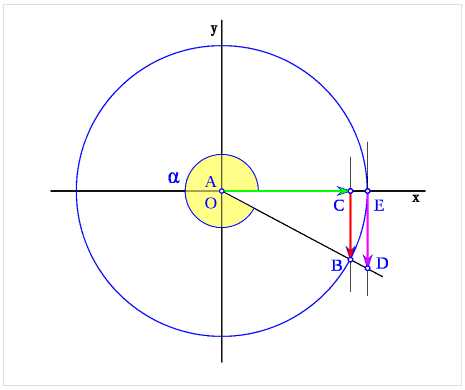


$$\operatorname{sen}(1,5\,\pi) = -1$$
$$\cos(1,5\,\pi) = 0$$
$$\tan(1,5\,\pi) = \infty \rightarrow No\ definida$$

hasta los que toman para 2π rad pasando al primer cuadrante, completando una rotación:

$$\operatorname{sen}(2\,\pi) = \operatorname{sen}\,0 = 0$$
$$\cos(2\,\pi) = \cos 0 = 1$$
$$\tan(2\,\pi) = \tan 0 = 0$$

como puede verse a medida que el ángulo α aumenta, aumenta el coseno $\overline{OC}$ en el lado positivo de las **x**, el seno $\overline{CB}$ disminuye en el lado negativo de las **y**, y la tangente $\overline{ED}$ también disminuye en el lado negativo de las **y**.

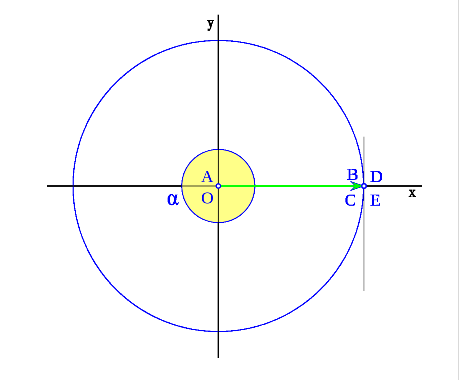


Cuando α, vale 2π ó 0π al completar una rotación completa los puntos **B**, **C** y **D**, coinciden en **E**, haciendo que el seno y la tangente valga cero, y el coseno uno, del mismo modo que al comenzarse el primer cuadrante.

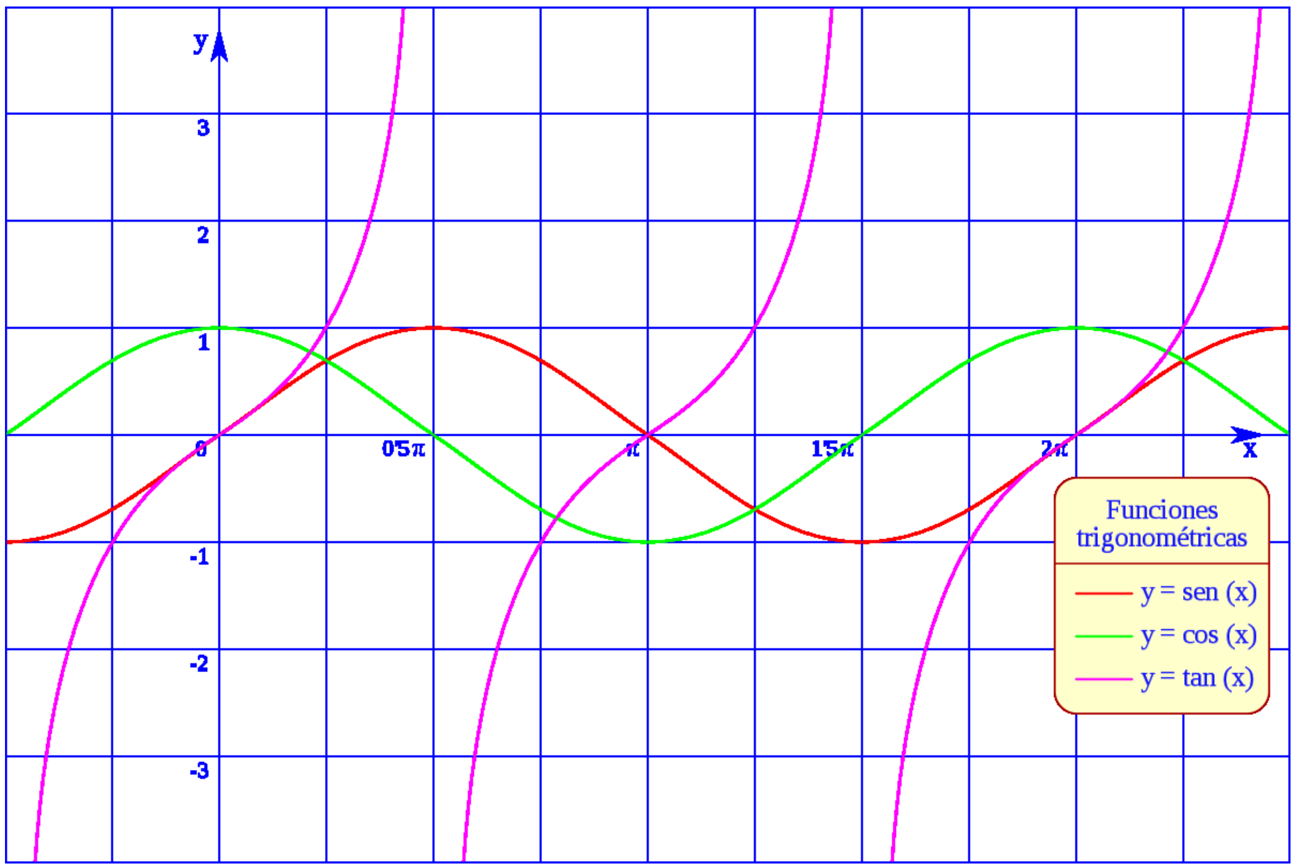
Dado el carácter rotativo de las funciones trigonométricas, se puede afirmar en todos los casos:

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\,\pi\,n)$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\,\pi\,n)$$
$$\tan\alpha = \tan(\alpha + 2\,\pi\,n)$$

Que cualquier función trigonométrica toma el mismo valor si se incrementa el ángulo un número entero de rotaciones completas.

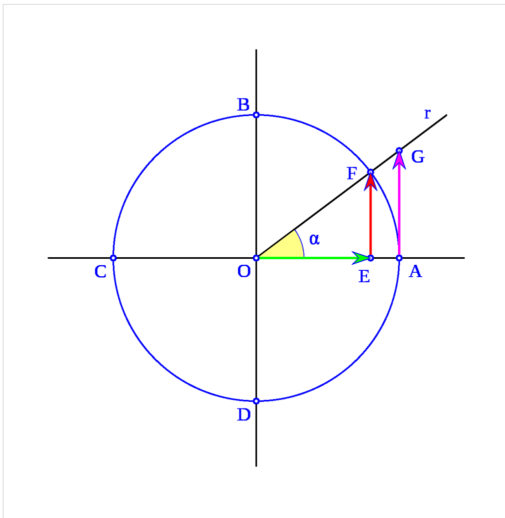


Representación gráfica



Representación de las funciones trigonométricas en el plano (x,y), los valores en el eje x expresados en radianes.

Cálculo de algunos casos



Partiendo de una circunferencia de radio uno, dividida en cuatro cuadrantes, por dos rectas perpendiculares, que se cortan en el centro de la circunferencia **O**, estas rectas cortan a la circunferencia en los puntos **A**, **B**, **C** y **D**, la recta horizonte **AC** también la podemos llamar **eje x** y la recta vertical **BD eje y**. Dada una recta **r**, que pasa por el centro de la circunferencia y forma un ángulo **α** con **OA**, **eje x**, y corta a la circunferencia en **F**, tenemos que la vertical que pasa por **F** corta al **eje x** en **E**, la vertical que pasa por **A** corta a la recta **r** en **G**. Con todo esto definimos, como ya se vio anteriormente, las funciones trigonométricas:

para el seno:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \overline{EF}$$

dado que:

$$\overline{OF} = 1$$

Para el coseno:

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \overline{OE}$$

dado que:

$$\overline{OF} = 1$$

Para la tangente:

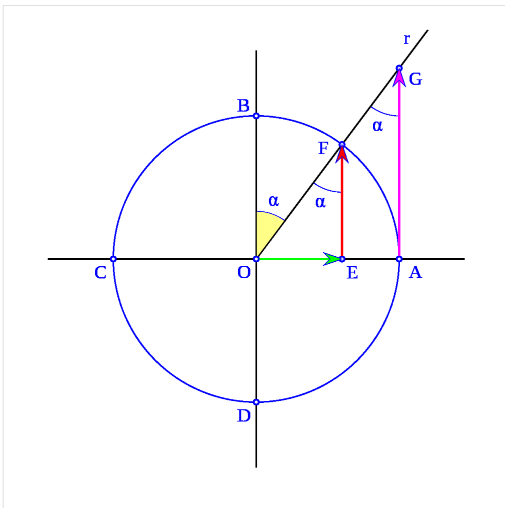
$$tan\ \alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{OA}} = \overline{AG}$$

dado que:

$$\overline{OA} = 1$$

partiendo de estas definiciones, podemos ver algunos caso importantes:

Para 90-α



Si a partir del eje vertical **OB** trazamos la recta **r** a un ángulo **α** en el sentido horario, la recta **r** forma con el **eje x** un ángulo **90-α**, el valor de las funciones trigonométricas de este ángulo conocidas las de **α** serán:

El triángulo **OEF** rectángulo en **E**, siendo el ángulo en **F** **α**, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = sen\ (90-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (90-\alpha) = cos\ \alpha$$

en el mismo triángulo **OEF**, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = cos\ (90-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (90-\alpha) = sen\ \alpha$$

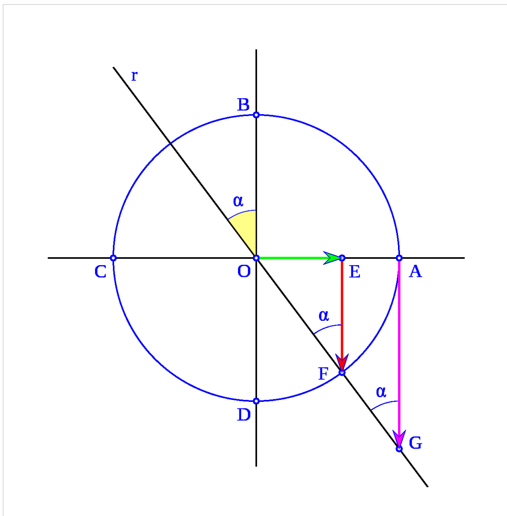
viendo el triángulo **OAG**, rectángulo en **A**, siendo el ángulo en **G** igual a **α**, podemos ver:

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AG}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = tan\ (90-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (90-\alpha) = \frac{1}{tan\ \alpha}$$

Para 90+α

Si a partir de eje vertical **OB** trazamos la recta **r** a un ángulo **α**, medido en sentido trigonométrico, el ángulo formado por el eje horizontal **OA** y la recta **r** será **90+α**. La prolongación de la recta **r** corta a la circunferencia en **F** y a la vertical que pasa por **A** en **G**.

El triángulo **OEF** es rectángulo en **E** y su ángulo en **F** es **α**, por lo tanto tenemos que:



$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = sen\ (90+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (90+\alpha) = cos\ \alpha$$

En el mismo triángulo **OEF** podemos ver:

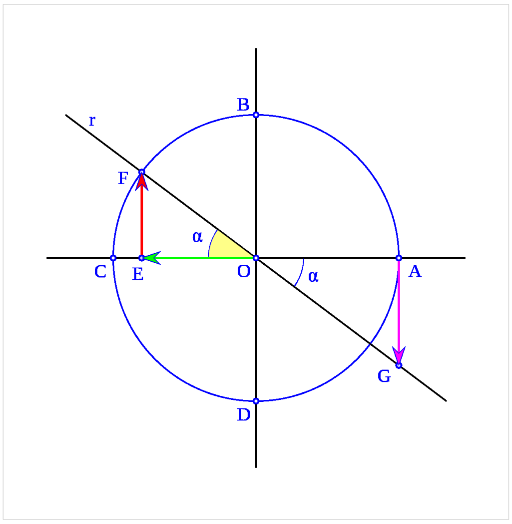
$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = -cos\ (90+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (90+\alpha) = -sen\ \alpha$$

En el triángulos **OAG** rectángulo **A** y siendo **α** el ángulo en **G**, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AG}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = -tan\ (90+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (90+\alpha) = \frac{-1}{tan\ \alpha}$$

Para 180-α

Si sobre el eje horizontal **OC**, trazamos la recta **r** a un ángulo **α**, el ángulo entre el **eje OA** y la recta **r** es de **180-α**, dado el triángulo **OEF** rectángulo en **E** y cuyo ángulo en **O** es **α**, tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = sen\ (180-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (180-\alpha) = sen\ \alpha$$

en el mismo triángulo **OEF**:

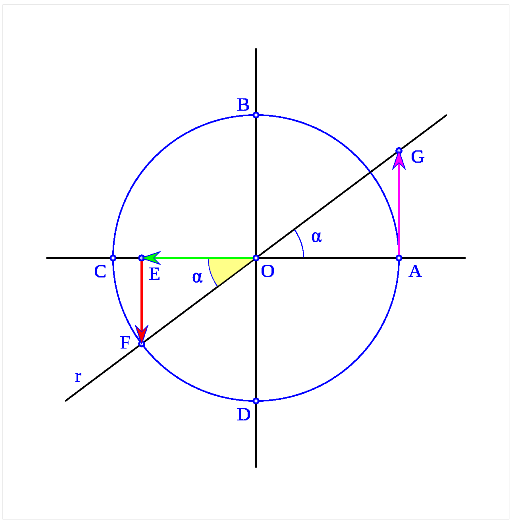
$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = -cos\ (180-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (180-\alpha) = -cos\ \alpha$$

En el triángulo **OAG**, rectángulo en **A** y con ángulo en **O** igual a **α**, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{OA}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = -tan\ (180-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (180-\alpha) = -tan\ \alpha$$

Para 180+α

Sobre la circunferencia de radio uno, a partir del **eje OC** con un ángulo **α** trazados la recta **r**, el ángulo del **eje OA** y la recta **r** es de **180+α**, como se ve en la figura. En el triángulo **OEF** rectángulo en **E** se puede deducir:



$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = -sen\ (180+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (180+\alpha) = -sen\ \alpha$$

en el mismo triángulo **OEF** tenemos:

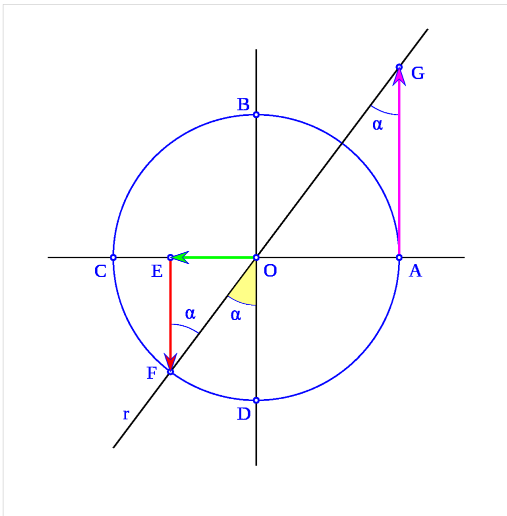
$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = -cos\ (180+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (180+\alpha) = -cos\ \alpha$$

en el triángulo **OAG**, rectángulo en **A**, vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{OA}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = tan\ (180+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (180+\alpha) = tan\ \alpha$$

Para 270-α

Sobre el **eje OD** y con un ángulo **α** medido en sentido horario trazamos la recta **r**. El ángulo entre el **eje OA** y la recta **r** es de **270-α**. En el triángulo **OEF**, rectángulo en **E**, tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = -sen\ (270-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (270-\alpha) = -cos\ \alpha$$

por otra parte en el mismo triángulo **OEF**, tenemos:

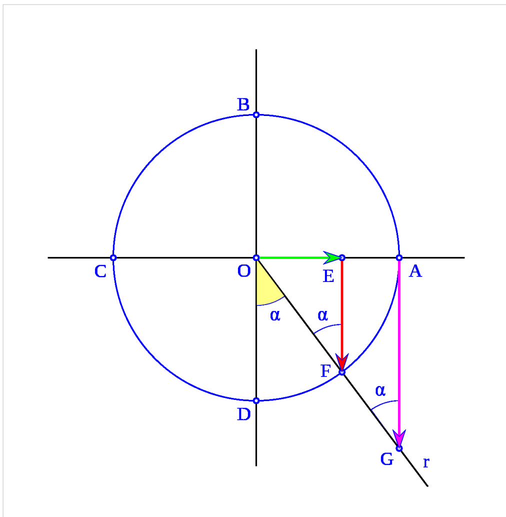
$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = -cos\ (270-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (270-\alpha) = -sen\ \alpha$$

en el triángulo **OAG** rectángulo en **A**, y siendo **α** el ángulo en **G**, tenemos;

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AG}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = tan\ (270-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (270-\alpha) = \dfrac{1}{tan\ \alpha}$$

Para 270+α

Sobre el **eje OD** y con un ángulo **α** medido en sentido trigonométrico, trazamos la recta **r**. El ángulo entre el **eje OA** y la recta **r** es de **270+α**. En el triángulo **OEF**, rectángulo en **E**, tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = -sen\ (270+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (270+\alpha) = -cos\ \alpha$$

por otra parte en el mismo triángulo **OEF**, tenemos:

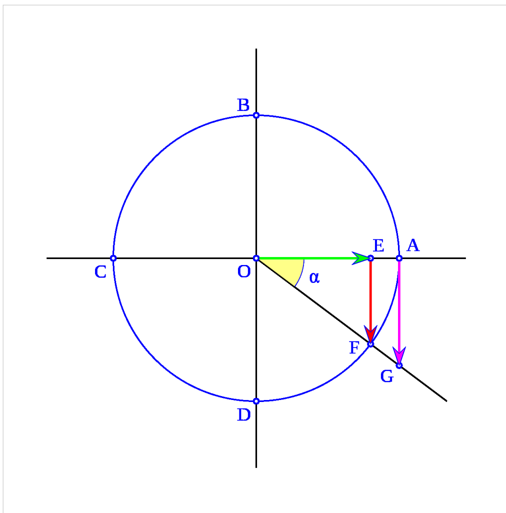
$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = cos\ (270+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (270+\alpha) = sen\ \alpha$$

en el triángulo **OAG** rectángulo en **A**, y siendo **α** el ángulo en **G**, tenemos;

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AG}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = -tan\ (270+\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (270+\alpha) = \frac{-1}{tan\ \alpha}$$

Para -α

Sobre la circunferencia de radio uno, a partir del **eje OA** con un ángulo **α** medido en sentido horario trazados la recta **r**, el ángulo del **eje OA** y la recta **r** es de **-α**, o lo que es lo mismo **360-α** como se ve en la figura. En el triángulo **OEF** rectángulo en **E** se puede deducir:



$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{EF} = -sen\ (-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha$$

en el mismo triángulo **OEF** tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \\ \overline{OF} = 1 \\ \overline{OE} = cos\ (-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha$$

en el triángulo **OAG**, rectángulo en **A**, vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} tan\ \alpha = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{OA}} \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{AG} = -tan\ (-\alpha) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad tan\ (-\alpha) = -tan\ \alpha$$

Identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad en que se cumple para todos los valores permisibles de la variable. En trigonometría existen seis identidades fundamentales:

Recíprocas

$$\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \csc(\alpha) = 1$$
$$\cos(\alpha) \cdot \sec(\alpha) = 1$$
$$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

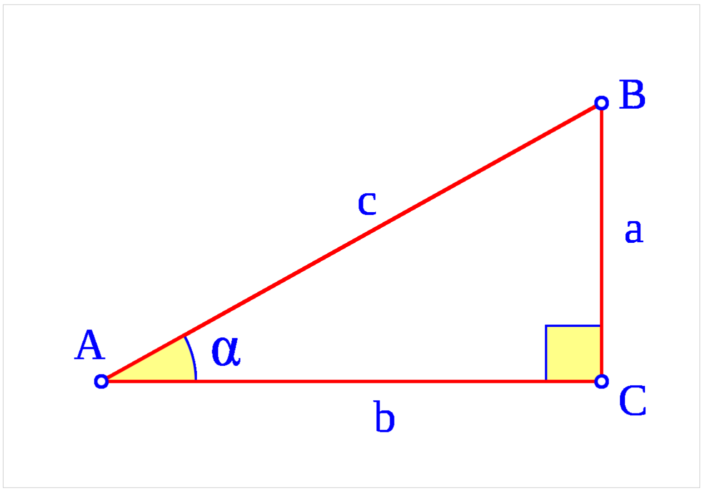
De división

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Por el teorema de Pitágoras

Como en el triángulo rectángulo cumple la función que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



de la figura anterior se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

por tanto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

entonces para todo ángulo α, se cumple la identidad Pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

que también puede expresarse:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Seno y coseno, funciones complejas

El seno y coseno se definen en matemática compleja, gracias a la fórmula de Euler como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$
$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Por lo tanto, la tangente quedará definida como:

$$\tan\alpha = \frac{1}{i}\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}} = -i\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}$$

Siendo $i = \sqrt{-1}$.

Referencias

[1] « Etimología de la palabra "trigonometría" (http://www.etymonline.com/index.php?search=trigonometry)». Diccionario web de etimología (inglés).

Bibliografía

- Cortés Espinosa de los Monteros, Nuria. Ediciones Didácticas y Pedagógicas S. L.. ed. *Actividades para unidad didáctica sobre trigonometría [Recurso electrónico] (2008)*. ISBN 978-84-936336-3-9.
- Domínguez Muro, Mariano. Universidad de Salamanca. Ediciones Universidad Salamanca. ed. *Trigonometría activa: 2 BUP (1985)*. ISBN 978-84-7800-056-2.

Enlaces externos

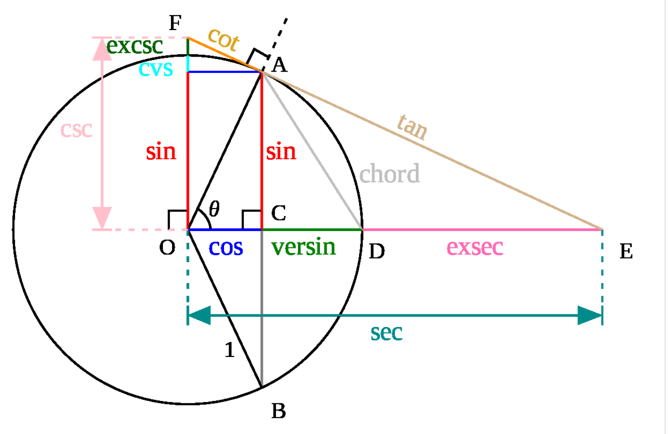
Wikilibros

- Wikilibros alberga un libro o manual sobre **Tabla trigonométrica**.
- Ejercicios de Trigonometría (http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/trigonometria/indice.htm) (Proyecto Descartes para Educación Secundaria del Ministerio de Educación de España).
- Álgebra y Trigonometría. Universidad de Chile (http://mazinger.sisib.uchile.cl/repositorio/lb/ciencias_agronomicas/fernandezc01/index.html)
- Trigonometría (http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/trigono.htm) (Applets con Geogebra de Manuel Sada).
- Orígenes de la trigonometría (http://www.educar.org/enlared/miswq/webquest_2.htm) (Webquest).
- Matemática - Trigonometría (http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m1_trigonometria.php) (Apuntes y ejercicios de Trigonometría en Fisicanet).
- La trigonometría, ¿para qué sirve? (http://www.phy6.org/stargaze/Mtrig1.htm)
- Funciones trigonométricas (http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funciones_trigonometricas/Las_funciones_trigonometricas.htm) (Proyecto Descartes para Educación Secundaria del Ministerio de Educación de España).
- Programa freeware (http://webs.sinectis.com.ar/alejand/mm/pagina_mm.htm) (con el cálculo y la representación gráfica de las funciones trigonométricas)

Función trigonométrica

En matemáticas, las **funciones trigonométricas** son las funciones que se definen a fin de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos.

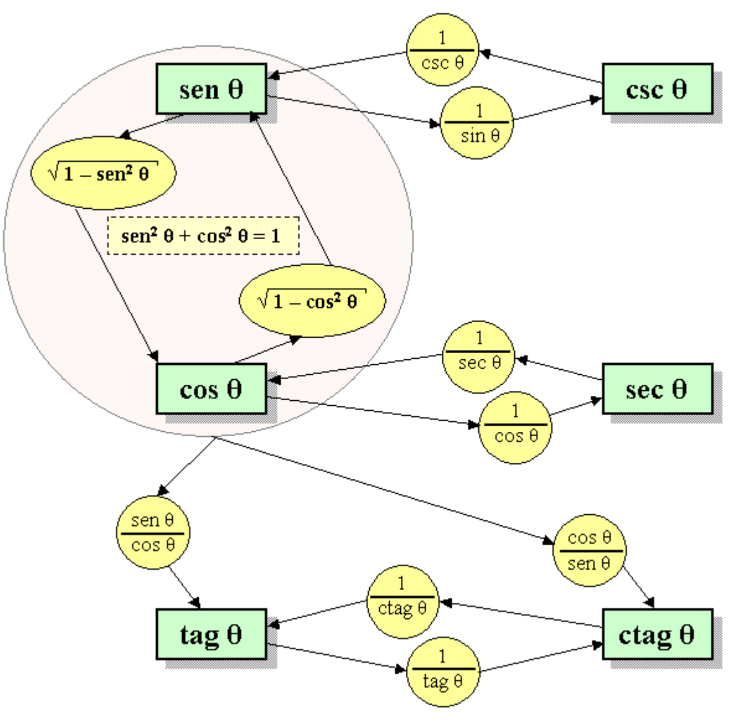
Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.



Todas las funciones trigonométricas de un ángulo θ pueden ser construidas geométricamente en relación a una circunferencia de radio unidad de centro *O*.

Conceptos básicos

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las funciones trigonométricas son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad). Definiciones más modernas las describen como series infinitas o como la solución de ciertas ecuaciones diferenciales, permitiendo su extensión a valores positivos y negativos, e incluso a números complejos.

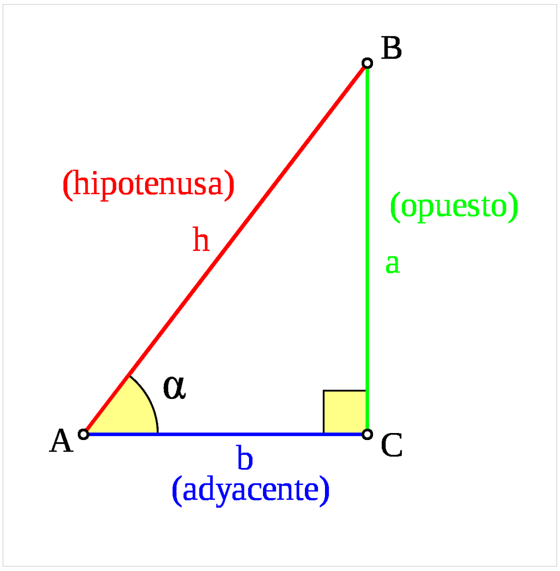


Identidades trigonométricas fundamentales.

Existen seis funciones trigonométricas básicas. Las últimas cuatro, se definen en relación de las dos primeras funciones, aunque se pueden definir geométricamente o por medio de sus relaciones. Algunas funciones fueron comunes antiguamente, y aparecen en las primeras tablas, pero no se utilizan actualmente; por ejemplo el verseno (1 − cos θ) y la exsecante (sec θ − 1).

Función	Abreviatura	Equivalencias (en radianes)
Seno	sin (sen)	$\sin\ \theta \equiv \frac{1}{\csc\theta} \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Coseno	cos	$\cos\theta \equiv \frac{1}{\sec\theta} \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$
Tangente	tan	$\tan\theta \equiv \frac{1}{\cot\theta} \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
Cotangente	ctg (cot)	$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta} \equiv \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
Secante	sec	$\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \equiv \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$
Cosecante	csc (cosec)	$\csc\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta} \equiv \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cot\theta}{\cos\theta}$

Definiciones respecto de un triángulo rectángulo



Para definir las razones trigonométricas del ángulo: α , del vértice A, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en los sucesivo será:

- La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo α .
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo α .

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos dentro de ese rango:

1) El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α , en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

2) El **coseno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

3) La **tangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

4) La **cotangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

5) La **secante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

6) La **cosecante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables

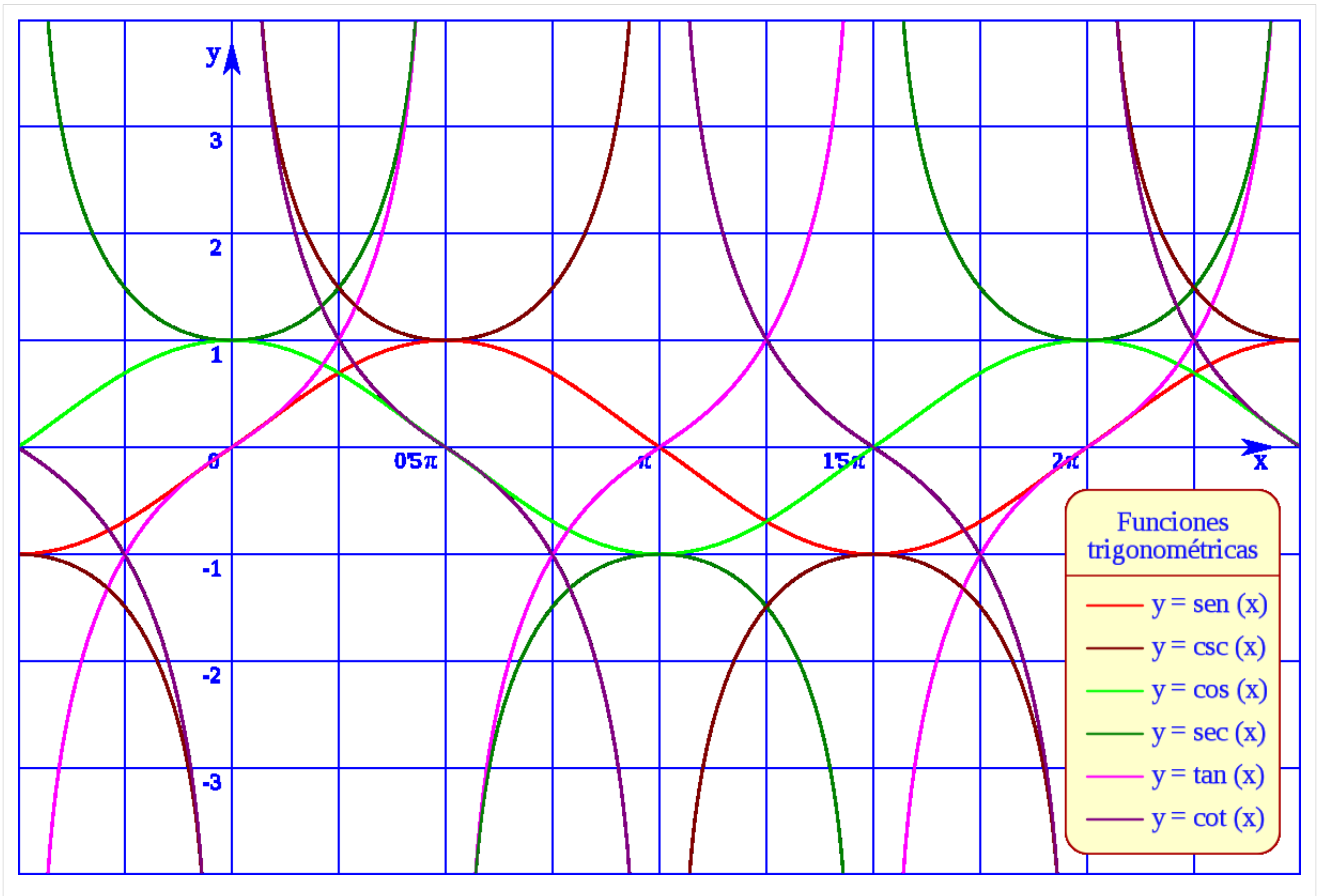
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Definición para un número real cualquiera

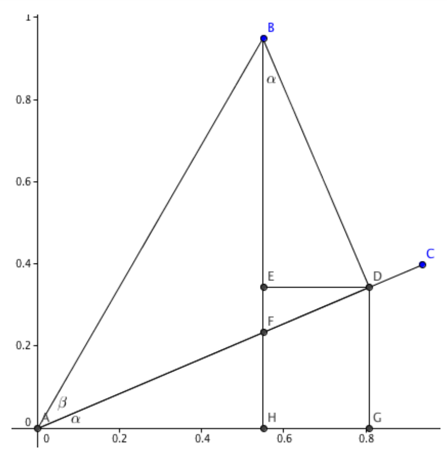
No es posible utilizar la definición dada anteriormente del seno o el coseno de α para valores de α menores o iguales a 0 o valores mayores o iguales a π/2, pues no se podría construir un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos mida α radianes. Para definir los valores de estas funciones para valores comprendidos entre 0 y 2π, se utilizará entonces una circunferencia unitaria, centrada en el origen de coordenadas del plano cartesiano. Se definirán las funciones trigonométricas seno y coseno como la abscisa y la ordenada, respectivamente, de un punto P perteneciente a la misma, siendo α el ángulo, medido en radianes, entre el semieje positivo x y el segmento que une el origen con P.

Puede observarse que estas funciones toman valores entre -1 y 1. Nótese que para valores entre 0 y π/2, los valores obtenidos para el seno y el coseno con esta definición, coinciden con los obtenidos utilizando la noción de razón trigonométrica. Si el valor de x esta fuera del intervalo [0,2π], puede descomponerse como x=2kπ+x' siendo k un número entero y x' un valor entre 0 y 2π. Se asignará a x los mismos valores de seno y coseno que los asignados a x', ya que puede interpretarse a x como un ángulo coterminal con x', y por lo tanto, las coordenadas del punto P serán las mismas en ambos casos.

Representación gráfica



Demostración de funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos



Construcción geométrica de la suma de dos ángulos

Mirando la figura a la derecha se observa:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BH}{AB} = \frac{HE+EB}{AB} = \frac{HE}{AB} + \frac{EB}{AB}$$

Si $HE = DG$ (cateto opuesto del triángulo de ángulo α), entonces $\frac{HE}{AB} = \frac{DG}{AB}$. Se tiene entonces la expresión siguiente:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DG}{AB} + \frac{EB}{AB}$$

En la razón $\frac{DG}{AB}$ se observa fácilmente que DG y AB pertenecen a triángulos diferentes, y si se multiplica tanto el numerador como el denominador por un lado en común a estos dos triángulos, se pueden obtener funciones trigonométricas:

$$\frac{DG}{AB} = \frac{DG}{AB} \cdot \frac{AD}{AD} = \frac{DG}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Lo mismo para $\frac{EB}{AB}$:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{EB}{AB} \cdot \frac{BD}{BD} = \frac{EB}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} = \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Luego:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DG}{AB}+\frac{EB}{AB}=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Como ya conocemos la función seno, es fácil encontrar las funciones restantes:

La función coseno es una traslación de la función seno $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda sobre el eje x :

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+(\beta+\frac{\pi}{2}))$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta+\frac{\pi}{2})+\sin(\beta+\frac{\pi}{2})\cos(\alpha)$$

Si se traslada la función coseno $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, se obtiene la función negativa seno.

$$\cos(\alpha+\beta)=-\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

La función $\tan(\alpha+\beta)$ se obtiene al efectuar:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Funciones trigonométricas de ángulo doble

Sabiendo las funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos, se pueden determinar las funciones trigonométricas de ángulo doble al plantear que $\alpha=\beta$

Para la fórmula del coseno del ángulo doble se pueden presentar otras dos formas alternativas con el uso de las identidades pitagóricas: Convirtiendo $\cos(\alpha)$ a términos de $\sin(\alpha)$, o convirtiendo a términos de $\cos(\alpha)$:

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$$

Para la tangente del ángulo doble se procede de la misma manera:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

Definiciones analíticas

La definición analítica más frecuente dentro del análisis real se hace a partir de ecuaciones diferenciales. Usando la geometría y las propiedades de los límites, se puede demostrar que la derivada del seno es el coseno y la derivada del coseno es el seno con signo negativo. (Aquí, como se hace generalmente en cálculo, todos los ángulos son medidos en radianes.)

$$\begin{cases} S'(x) = C(x) & S(0) = 0 \\ C'(x) = -S(x) & C(0) = 1 \end{cases}$$

El teorema de Picard-Lindelöf de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales lleva a que existen las funciones anteriores que se llaman respectivamente seno y coseno, es decir:

$$\cos x = C(x), \qquad \sin x = S(x)$$

Esta definición analítica de las funciones trigonométricas permite una definición no-geométrica del número π, a saber, dicho número es el mínimo número real positivo que es un cero de la función seno.

Series de potencias

A partir de las definición anterior pueden establecerse que las funciones seno y coseno son funciones analíticas cuya serie de Maclaurin viene dada por:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Estas identidades son a veces usadas como las definiciones de las funciones seno y coseno. Con frecuencia se utilizan como el punto de partida para el tratamiento riguroso de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones (por ejemplo en las Series de Fourier), debido a que la teoría de las series infinitas puede ser desarrollada a partir de la base del sistema de números reales, independientemente de cualquier consideración geométrica. La diferenciabilidad y continuidad de estas funciones es entonces establecida a partir de las definiciones de series por si misma.

Relación con la exponencial compleja

Existe una relación importante entre la exponenciación de números complejos y las funciones trigonométricas:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Esta relación puede probarse usando el desarrollo en serie de Taylor para la función exponencial y el obtenido en la sección anterior para las funciones seno y coseno. Separando ahora en parte real e imaginaria en la expresión anterior se encuentran las definiciones de seno y coseno en términos de exponenciales complejas:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

A partir de ecuaciones diferenciales

Las funciones seno y coseno satisfacen la igualdad:

$$y'' = -y.$$

Es decir, la segunda derivada de cada función es la propia función con signo inverso. Dentro del espacio funcional de dos dimensiones *V*, que consiste en todas las soluciones de esta ecuación,

- la función seno es la única solución que satisface la condición inicial $(y'(0), y(0)) = (1, 0)$ y
- la función coseno es la única solución que satisface la condición inicial $(y'(0), y(0)) = (0, 1)$.

Dado que las funciones seno y coseno son linearmente independientes, juntas pueden formar la base de *V*. Este método para definir las funciones seno y coseno es esencialmente equivalente a utilizar la fórmula de Euler. Además esta ecuación diferencial puede utilizarse no solo para definir al seno y al coseno, con ella también se pueden probar las identidades trigonométricas de las funciones seno y coseno.

Además, la observación de que el seno y el coseno satisfacen $y'' = -y$ implica que son funciones eigen del operador de la segunda derivada.

La función tangente es la única solución de la ecuación diferencial no lineal

$$y' = 1 + y^2$$

satisfaciendo la condición inicial $y(0) = 0$. Existe una interesante prueba visual de que la función tangente satisface esta ecuación diferencial.

Funciones trigonométricas inversas

Las tres funciones trigonométricas inversas comúnmente usadas son:

- Arcoseno es la función inversa del seno de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuyo seno es dicho valor.

La función arcoseno real es una función $[-1, 1] \longrightarrow [0, 2\pi)$, es decir, no está definida para cualquier número real. Esta función puede expresarse mediante la siguiente serie de Taylor:

$$\arcsin(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & x = -1 \\ x + \dfrac{1 x^3}{2\ 3} + \dfrac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4\ 5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6\ 7} + \dots & -1 < x < 1 \\ +\dfrac{\pi}{2} & x = 1 \end{cases}$$

- Arcocoseno es la función inversa del coseno de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuyo coseno es dicho valor.

Es una función similar a la anterior, de hecho puede definirse como:

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

- Arcotangente es la función inversa de la tangente de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuya tangente es dicho valor.

A diferencia de las anteriores la función arcotangente está definida para todos los reales. Su expresión en forma de serie es:

$$\arctan(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots & |x| < 1 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \dots & + \text{ con } x \geq 1, - \text{ con } x \leq -1 \end{cases}$$

Generalizaciones

- Las funciones hiperbólicas son el análogo de las funciones trigonométricas para una hipérbola equilatera. Además el seno y coseno de un número imaginario puro puede expresarse en términos de funciones hiperbólicas.
- Las funciones elípticas son una generalización biperiódica de las funciones trigonométricas que en el plano complejo sólo son periódicas sobre el eje real. En particular las funciones trigonométricas son el límite de las funciones elípticas de Jacobi cuando el parámetro del que dependen tiende a cero.

Historia

El estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonometría fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes.

El primer uso de la función **seno** ($sin(\cdot)$) aparece en el *Sulba Sutras* escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (ca. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas "Fórmulas de Euler".

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas.

Enlaces externos

- http://matematicas.redyc.com/wiki/doku.php?id=editores:jorgitoteleco:exponencial_compleja
- Herramienta didáctica para explicar las funciones trigonométricas [1]

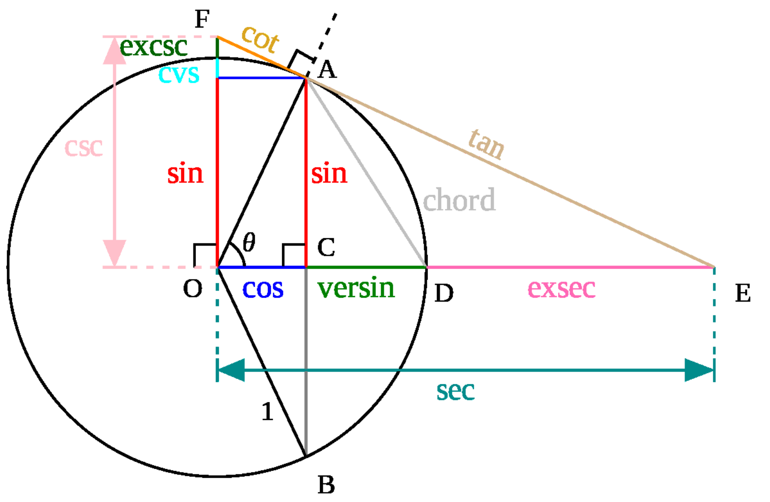
Referencias

[1] http://www.touchmathematics.org/topics/trigonometry

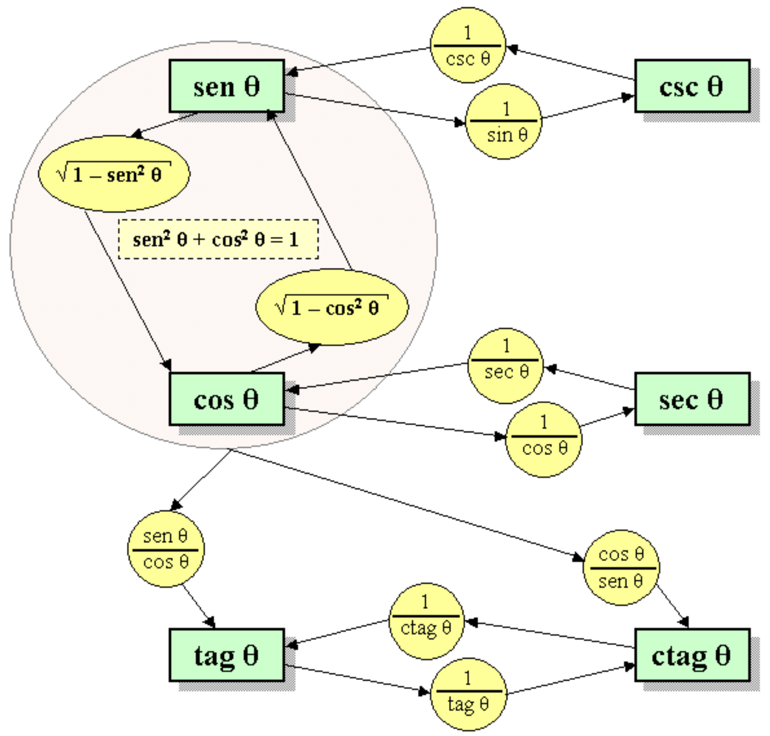
Identidades trigonométricas

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (y las operaciones aritméticas involucradas).

Notación: se define $\cos^2\alpha$, $\text{sen}^2\alpha$, otros; tales que $\text{sen}^2\alpha$ es $(\text{sen}\ \alpha)^2$.



Todas las funciones en O.



Identidades trigonométricas fundamentales, y cómo convertir de una función trigonométrica a otra.

Relaciones básicas

Relación pitagórica	$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
Identidad de la razón	$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

De estas dos identidades, se puede extrapolar la siguiente tabla. Sin embargo, nótese que estas ecuaciones de conversión pueden devolver el signo incorrecto (+ ó −). Por ejemplo, si $\operatorname{sen}\theta = 1/2$la conversión propuesta en la tabla indica que $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{3}/2$, aunque es posible que $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$. Para obtener la única respuesta correcta se necesitará saber en qué cuadrante está θ.

Funciones trigonométricas en función de las otras cinco.

En términos de		cos	tan	cot	sec	csc
	$\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

De las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

Son más sencillas de probar en la circunferencia trigonométrica o goniométrica (que tiene radio igual a 1):

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+2\pi) \qquad \cos(x) = \cos(x+2\pi) \qquad \tan(x) = \tan(x+\pi)$$
$$\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(x+\pi) \qquad \cos(-x) = -\cos(x+\pi)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$
$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad \cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad \tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

A veces es importante saber que cualquier combinación lineal de una serie de ondas senoidales que tienen el mismo período pero están desfasadas, es también una onda senoidal del mismo período pero con un desplazamiento de fase diferente. Dicho de otro modo:

$$a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\operatorname{sen}\left(x+\arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Es llamada **identidad trigonométrica fundamental**, y efectuando sencillas operaciones permite encontrar unas 24 identidades más, muy útiles para problemas introductorios del tipo conocido el valor de la función seno, obtenga el valor de las restantes (sin tabla ni calculadora).

Por ejemplo, si se divide ambos miembros por cos², se tiene:

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

Calculando la recíproca de la expresión anterior:

$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

Entonces puede expresarse la función seno según alguna otra conocida:

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$
$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}} \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{\sec x}\sqrt{\sec^2(x) - 1}$$

Ejemplo 2:

Utilizando la identidad

$$\sec^2(t) - \tan^2(t) = 1$$
$$\sec^2(t) = 1 + \tan^2(t)$$

Entonces:

Pero

$$\sec^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

sustituimos en $(*)$:

Realizamos las operaciones necesarias y queda:

Entonces los cosenos se hacen 1 y queda

Y queda demostrado.

El resto de las funciones se realiza de manera análoga.

Teoremas de la suma y diferencia de ángulos

Pueden demostrarse según la Fórmula de Euler o mediante la proyección de ángulos consecutivos. La identidad de la tangente surge del cociente entre coseno y seno, y las restantes de la recíproca correspondiente.

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

De lo que se sigue para determinados ángulos suplementarios:

$$\operatorname{sen}(\pi \pm x) = \mp\operatorname{sen}(x)$$
$$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$$
$$\tan(\pi \pm x) = \pm\tan(x)$$
$$\csc(\pi \pm x) = \mp\csc(x)$$

Para ángulos complementarios:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x)$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

Para ángulos opuestos:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\csc(-x) = -\csc(x)$$
$$\sec(-x) = \sec(x)$$
$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

Identidades del ángulo múltiple

Si T_n es el n-simo Polinomio de Chebyshev entonces

$$\cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Fórmula de De Moivre:

$$\cos(nx) + i\operatorname{sen}(nx) = (\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^n$$

Identidades del ángulo doble, triple y medio

Pueden obtenerse remplazándolo y por x (o sea $\operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}(2x)$) en las identidades anteriores, y usando el teorema de Pitágoras para los dos últimos (a veces es útil expresar la identidad en términos de seno, o de coseno solamente), o bien aplicando la Fórmula de De Moivre cuando $n = 2$.

Fórmula del ángulo doble			
$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cot 2\theta = \frac{\cot\theta - \tan\theta}{2}$
Fórmula del ángulo triple			
$\operatorname{sen}3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$	$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$	$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$	
Fórmula del ángulo medio			
$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$	$\cot\frac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta$

Producto infinito de Euler

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}.$$

Identidades para la reducción de exponentes

Resuelve las identidades tercera y cuarta del ángulo doble para $\cos^2(x)$ y $\sin^2(x)$.

Seno	$\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$	$\operatorname{sen}^3\theta=\frac{3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta}{4}$	
Coseno	$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$	$\cos^3\theta=\frac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{4}$	$\cos^5\theta=\frac{10\cos\theta+5\cos 3\theta+\cos 5\theta}{16}$
Otros	$\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta=\frac{1-\cos 4\theta}{8}$	$\operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta=\frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{8}$	

Paso de producto a suma

Puede probarse usando el teorema de la suma para expandir los segundos miembros.

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x)\cos(y)=\frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$
$$\cos(x)\operatorname{sen}(y)=\frac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

Deducción de la identidad

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

Sabemos por el teorema de la suma y la resta que:

$$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

Si separamos la suma de la resta quedan entonces los dos posibles casos:

1): $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

2): $\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

Si tomamos la ecuación 1) y despejamos cos(x)cos(y) nos queda que:

3): $\cos(x)\cos(y)=\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

Y si sumamos el miembro de la derecha de la ecuación 2) al miembro izquierdo de la ecuación 3), y para mantener la igualdad se suma el lado izquierdo de la ecuación 2) en el lado derecho de la ecuación 3). (Recuerda que si se suma un elemento a ambos lados de la ecuación se mantiene la misma), quedaría:

$$\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)+\cos(x)\cos(y)=\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)+\cos(x-y)$$

Simplificando el elemento sin(x)sin(y) y sumando cos(x)cos(y) quedaría:

$$2\cos(x)\cos(y)=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

Y por último multiplicando ambos lados de la ecuación por ½ queda:

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

Nota 1: este procedimiento también se puede aplicar para demostrar el origen de las otras dos ecuaciones simplemente cambiando los valores.

Nota 2: Usando 3) y el resultado anterior se obtiene también:

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

Notar el cambio de signo.

Paso de suma a producto

Reemplazando *x* por (*a* + *b*) / 2 *e "y* por (*a* – *b*) / 2 en las identidades de producto a suma, se tiene:

$$\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Paso de diferencia de cuadrados a producto

Deducción

1) recordando:que cateto opuesto sobre cateto adyacente

multiplicando

Sabemos que:

el la primera ecuación transponemos $\cos^2(x)$ y en la segunda $\sin^2(y)$

De tal manera que obtendremos:

aplicando esto en la ecuación inicial

multiplicando

De una manera análoga se halla el segundo teorema.

Eliminar seno y coseno

A veces es necesario transformar funciones de seno y coseno para poderlas sumar libremente, en estos casos es posible eliminar senos y cosenos en tangentes.

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$
$$\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$
$$\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Composición de funciones trigonométricas

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Fórmula de productos infinitos

Seno	**Coseno**
$\operatorname{sen} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$	$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2(n-\frac{1}{2})^2}\right)$
$\operatorname{sen} hx = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$	$\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2(n-\frac{1}{2})^2}\right)$
$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$	

Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos(\mathrm{x}) + i\operatorname{sen}(\mathrm{x})$$

$$e^{-ix} = \cos(\mathrm{x}) - i\operatorname{sen}(\mathrm{x})$$

Inicio del teorema del Coseno

Los Elementos de Euclides, que datan del siglo III a. C., contienen ya una aproximación geométrica de la generalización del teorema de Pitágoras: las proposiciones 12 y 13 del libro II, tratan separadamente el caso de un triángulo obtusángulo y el de un triángulo acutángulo. La formulación de la época con la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra obligó a razonar en términos de diferencias de áreas.[1] Por eso, la proposición 12 utiliza estos términos:

> «En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.»
>
> Euclides, *Elementos*.[2]

Siendo *ABC* el triángulo, cuyo ángulo obtuso está en *C*, y *BH* la altura respecto del vértice *B* (cf. Fig. 2 contigua), la notación moderna permite formular el enunciado así:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2\,CA\,CH$$

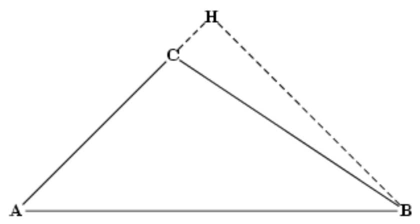


Fig. 2 - Triángulo *ABC* con altura *BH*.

Luego, con la trigonometría árabe-musulmana de la Edad Media el teorema evoluciona a su forma y en su alcance: el astrónomo y matemático al-Battani[3] generalizó el resultado de Euclides en la geometría esférica a principios del siglo X, lo que permitió efectuar los cálculos de la distancia angular entre el Sol y la Tierra.[4][5] Fue durante el mismo período cuando se establecieron las primeras tablas trigonométricas, para las funciones seno y coseno. Eso permitió a Ghiyath al-Kashi,[6] matemático de la escuela de Samarcanda, de poner el teorema bajo una forma utilizable para la triangulación durante el siglo XV. La propiedad fue popularizada en occidente por François Viète quien, al parecer, lo redescubrió independientemente.[7]

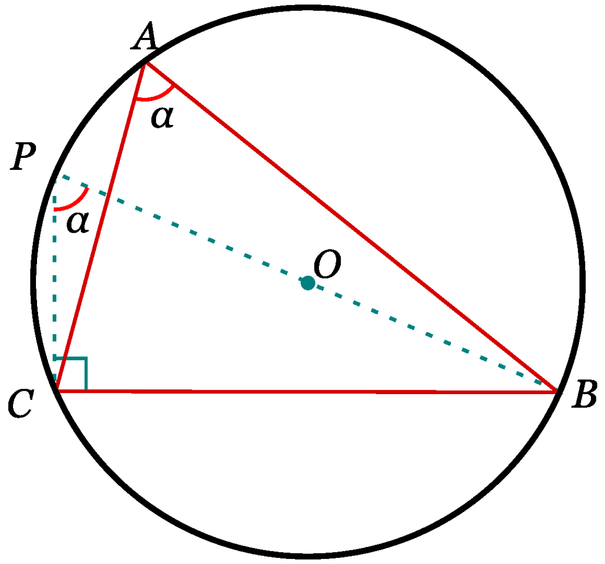
Fue a finales del siglo XVII cuando la notación algebraica moderna, aunada a la notación moderna de las funciones trigonométricas introducida por Euler en su libro *Introductio in analysin infinitorum*, permitieron escribir el teorema bajo su forma actual, extendiéndose el nombre de teorema (o ley) del coseno.[8]

Teorema del seno

En todo triángulo se da la siguiente relación entre la longitud de sus lados a, b y c y el seno de sus respectivos ángulos opuestos A, B y C

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Demostración



El teorema de los senos establece que *a/sin(A)* es constante.

Dado el triángulo *ABC*, denotamos por *O* su circuncentro y dibujamos su circunferencia circunscrita. Prolongando el segmento *BO* hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro *BP*.

Ahora, el triángulo *PBC* es recto, puesto que *BP* es un diámetro, y además los ángulos *A* y *P* son iguales, porque ambos son ángulos inscritos que abren el segmento *BC* (Véase definición de arco capaz). Por definición de la función trigonométrica seno, se tiene

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} P = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}$$

donde *R* es el radio de la circunferencia. Despejando *2R* obtenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$$

Repitiendo el procedimiento con un diámetro que pase por *A* y otro que pase por *C*, se llega a que las tres fracciones tienen el mismo valor *2R* y por tanto son iguales.

La conclusión que se obtiene suele llamarse teorema de los senos generalizado y establece:

Para un triángulo *ABC* donde *a, b, c* son los lados opuestos a los ángulos *A, B, C* respectivamente, si *R* denota el radio de la circunferencia circunscrita, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Puede enunciarse el teorema de una forma alternativa:

En un triángulo, el cociente entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.

Aplicación

El teorema del seno es usado con frecuencia para resolver problemas en los que se conoce un lado del triángulo y dos ángulos y se desea encontrar las medidas de los otros lados.

Definiciones exponenciales

Función	Función inversa
$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	$\arcsin x = -i \ln\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right)$
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$\arccos x = -i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
$\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$	$\arctan x = \frac{i \ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right)}{2}$
$\csc\theta = \frac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccsc} x = -i \ln\left(\frac{i}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$
$\sec\theta = \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arcsec} x = -i \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{i}{x^2}}\right)$
$\cot\theta = \frac{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccot} x = \frac{i \ln\left(\frac{i-x}{i+x}\right)}{2}$
$\operatorname{cis}\theta = e^{i\theta}$	$\operatorname{arccis} x = \frac{\ln x}{i}$

Referencias

[1] Heath, Sir Thomas (1921) (en inglés). *A history of Greek Mathematics vol. 1*. Londres, Inglaterra: Oxford University Press. OCLC 2014918 (http://worldcat.org/oclc/2014918).

[2] « Proposición 12 del libro II de Los Elementos de Euclides (http://www.euclides.org/menu/elements_esp/02/proposicioneslibro2.htm#12)».

[3] « Esquema del desarrollo histórico de la matemática (http://ing.unne.edu.ar/Matem_diccion/p1105_historia_de_ la_matematica.pdf)» págs. pág. 6. Universidad Nacional del Nordeste.

[4] J J O'Connor y E F Robertson. « Abu Abdallah Mohammad ibn Jabir Al-Battani (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Battani.html)» (en inglés) (html). Consultado el 08-06-2008.

[5] « La trigonometria àrab, Al-Battani, Abu'l-Wafa, Ibn Yunus, Nasir al-Tusi (http://www.mallorcaweb.net/mamaguena/arabs/trigo/trigo.html)» (en catalán) (html). Consultado el 08-06-2008.

[6] « Al-Kashi, Gamshid ibn Messaoud (http://serge.mehl.free.fr/chrono/Alkashi.html)» (en francés).

[7] Viète, François (1579). *Canon mathematicus seu ad triangula*. Lutetia Mettayer. OCLC 165919384 (http://worldcat.org/oclc/165919384).

[8] Boyer, Carl B.; Uta C. Merzbach (1968). *A History of Mathematics*. New York: Estados Unidos: John Wiley & Sons. pp. 439–445. ISBN 0-471-54397-7.

Enlaces externos

- Algunas identidades extras mas varios ejercicios resueltos. (http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Identidades_trigonométricas)
- Prueba visual del seno de la suma. Prueba visual del teorema del seno. (http://www.rinconmatematico.com)
- Trigonometría Fácil: El Hexágono Trigonométrico. (http://www.youtube.com/watch?v=uvSsFPLXCJw)
- Tabla de Identidades Trigonométricas **para IMPRIMIR**. (http://neoparaiso.com/imprimir/identidades-trigonometricas.html)

Función hiperbólica

Las **funciones hiperbólicas** son análogas a las funciones trigonométricas. Estas son:

El seno hiperbólico

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

El coseno hiperbólico

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

y otras líneas:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

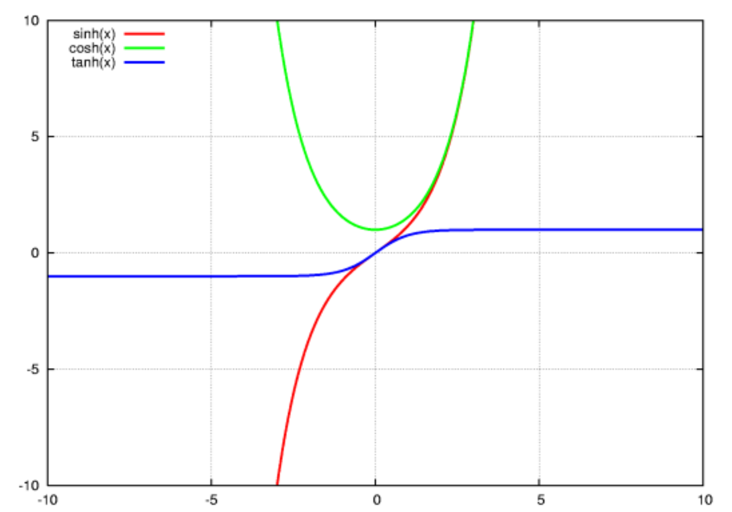
(*cotangente hiperbólica*)

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

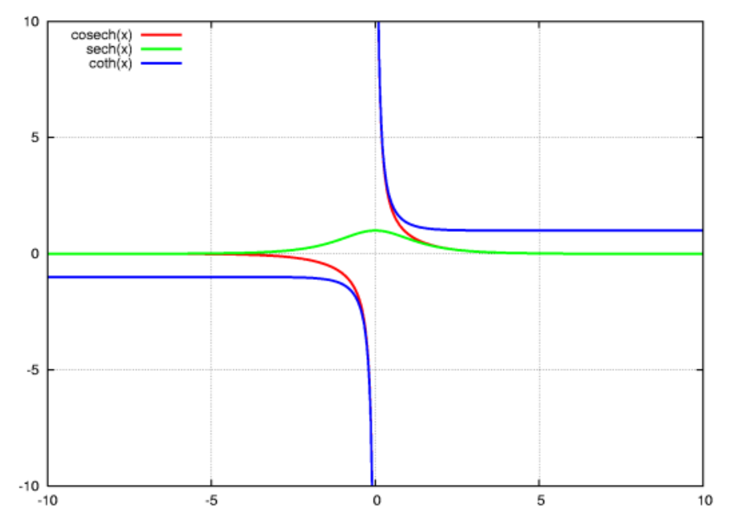
(*secante hiperbólica*)

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

(*cosecante hiperbólica*)



Curvas de la funciones hiperbólicas sinh, cosh y tanh



Curvas de las funciones hiperbólicas csch, sech y coth

Relación entre funciones hiperbólicas y funciones circulares

Las funciones trigonométricas sin(*t*) y cos(*t*) pueden ser las coordenadas cartesianas (*x*,*y*) de un punto *P* sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen, donde es *t* el ángulo, medido en radianes, comprendido entre el semieje positivo *X*, y el segmento *OP*, según las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

También puede interpretarse el parámetro *t* como la longitud del arco de circunferencia unitaria comprendido entre el punto (1,0) y el punto *P*, o como el doble del área del sector circular determinado por el semieje positivo *X*, el segmento *OP* y la circunferencia unitaria.

De modo análogo, podemos definir las funciones hiperbólicas, como las coordenadas cartesianas (*x*,*y*) de un punto *P* de la hipérbola equilátera, centrada en el origen, cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 = 1$$

siendo *t* el doble del área de la región comprendida entre el semieje positivo *X*, y el segmento *OP* y la hipérbola, según las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}$$

Sin embargo, también puede demostrarse que es válida la siguiente descripción de la hipérbola:

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
$$y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

dado que

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$$

De modo que el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico admiten una representación en términos de funciones exponenciales de variable real:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Relaciones

Ecuación fundamental

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Duplicación del argumento

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

Derivación e integración

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$$
$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

Además la integración al ser la operación inversa de la derivación es trivial en este caso.

La derivada de sinh(x) está dada por cosh(x) y la derivada de cosh(x) es sinh(x). El gráfico de la función cosh(x) se denomina catenaria.

Inversas de las funciones hiperbólicas

Las funciones recíprocas de las funciones hiperbólicas son:

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$$

$$\operatorname{arctanh}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{arccoth}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$\operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

Las series de Taylor de las funciones inversas de las funciones hiperbólicas vienen dadas por:

$$\operatorname{asinh}(x) = x - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^5}{5} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^7}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{asinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{acosh}(x) = \ln 2 - (\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-2}}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^{-4}}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^{-6}}{6} + \cdots) =$$

$$\operatorname{acosh}(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{-2n}}{(2n)}, x > 1$$

$$\operatorname{atanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{atanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{acsch}(x) = \operatorname{asinh}(x^{-1}) = x^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-3}}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^{-5}}{5} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^{-7}}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{acsch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{asech}(x) = \operatorname{acosh}(x^{-1}) = \ln 2 - (\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^4}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^6}{6} + \cdots) =$$

$$\operatorname{asech}(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n}}{(2n)}, 0 < x \le 1$$

$$\operatorname{acoth}(x) = \operatorname{atanh}(x^{-1}) = x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \frac{x^{-5}}{5} + \frac{x^{-7}}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{acoth}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)}, |x| > 1$$

Relación con la función exponencial

De la relación del coseno y seno hiperbólico se pueden derivar las siguientes relaciones:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

y

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$$

Estas expresiones son análogas a las que están en términos de senos y cosenos, basadas en la fórmula de Euler, como suma de exponenciales complejos.

Enlaces externos

- Teorema Fundamental de la Trigonometría Hiperbólica [1]

Referencias

[1] http://www.foro.resuelveproblemas.com/Matematicas-Teorema-Fundamental-de-la-Trigonometr%C3%ADa-Hiperb%C3%B3lica

Anexo:Integrales de funciones trigonométricas

La siguiente es una lista de integrales de funciones trigonométricas y su correspondiente simplificación.

Integrales que contienen solamente sen

$$\int \sin cx\;dx = -\frac{1}{c}\cos cx$$

$$\int \sin^n cx\;dx = -\frac{\sin^{n-1} cx\cos cx}{nc} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} cx\;dx \qquad \mbox{(para } n>0\mbox{)}$$

$$\int x\sin cx\;dx = \frac{\sin cx}{c^2}-\frac{x\cos cx}{c}$$

$$\int x^n\sin cx\;dx = -\frac{x^n}{c}\cos cx+\frac{n}{c}\int x^{n-1}\cos cx\;dx \qquad \mbox{(para } n>0\mbox{)}$$

$$\int\frac{\sin cx}{x} dx = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i\frac{(cx)^{2i+1}}{(2i+1)\cdot (2i+1)!}$$

$$\int\frac{\sin cx}{x^n} dx = -\frac{\sin cx}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{c}{n-1}\int\frac{\cos cx}{x^{n-1}} dx$$

$$\int\frac{dx}{\sin cx} = \frac{1}{c}\ln \left|\tan\frac{cx}{2}\right|$$

$$\int\frac{dx}{\sin^n cx} = \frac{\cos cx}{c(1-n) \sin^{n-1} cx}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}cx} \qquad \mbox{(para } n>1\mbox{)}$$

$$\int\frac{dx}{1\pm\sin cx} = \frac{1}{c}\tan\left(\frac{cx}{2}\mp\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int\frac{x\;dx}{1-\sin cx} = \frac{x}{c}\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2}\right)+\frac{2}{c^2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{cx}{2}\right)\right|$$

$$\int\frac{\sin cx\;dx}{1\pm\sin cx} = \pm x+\frac{1}{c}\tan\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{cx}{2}\right)$$

$$\int\sin c_1x\sin c_2x\;dx = \frac{\sin(c_1-c_2)x}{2(c_1-c_2)}-\frac{\sin(c_1+c_2)x}{2(c_1+c_2)} \qquad \mbox{(para } |c_1|\neq|c_2|\mbox{)}$$

Integrales que contienen solamente cos

$$\int \cos cx\;dx = \frac{1}{c}\sin cx$$

$$\int \cos^n cx\;dx = \frac{\cos^{n-1} cx \sin cx}{nc} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} cx\;dx \qquad \mbox{(para }n>0\mbox{)}$$

$$\int x\cos cx\;dx = \frac{\cos cx}{c^2} + \frac{x\sin cx}{c}$$

$$\int x^n\cos cx\;dx = \frac{x^n\sin cx}{c} - \frac{n}{c}\int x^{n-1}\sin cx\;dx$$

$$\int\frac{\cos cx}{x} dx = \ln|cx| + \sum_{i=1}^\infty (-1)^i\frac{(cx)^{2i}}{2i\cdot(2i)!}$$

$$\int\frac{\cos cx}{x^n} dx = -\frac{\cos cx}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{c}{n-1}\int\frac{\sin cx}{x^{n-1}} dx \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{dx}{\cos cx} = \frac{1}{c}\ln\left|\tan\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n cx} = \frac{\sin cx}{c(n-1) cos^{n-1} cx} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2} cx} \qquad \mbox{(para }n>1\mbox{)}$$

$$\int\frac{dx}{1+\cos cx} = \frac{1}{c}\tan\frac{cx}{2}$$

$$\int\frac{dx}{1-\cos cx} = -\frac{1}{c}\cot\frac{cx}{2}$$

$$\int\frac{x\;dx}{1+\cos cx} = \frac{x}{c}\tan cx2 + \frac{2}{c^2}\ln\left|\cos\frac{cx}{2}\right|$$

$$\int\frac{x\;dx}{1-\cos cx} = -\frac{x}{x}\cot cx2 + \frac{2}{c^2}\ln\left|\sin\frac{cx}{2}\right|$$

$$\int\frac{\cos cx\;dx}{1+\cos cx} = x - \frac{1}{c}\tan\frac{cx}{2}$$

$$\int\frac{\cos cx\;dx}{1-\cos cx} = -x - \frac{1}{c}\cot\frac{cx}{2}$$

$$\int\cos c_1x\cos c_2x\;dx = \frac{\sin(c_1-c_2)x}{2(c_1-c_2)} + \frac{\sin(c_1+c_2)x}{2(c_1+c_2)} \qquad \mbox{(para }|c_1|\neq|c_2|\mbox{)}$$

Integrales que contienen solamente tan

$$\int\tan cx\;dx = -\frac{1}{c}\ln|\cos cx|$$

$$\int\tan^n cx\;dx = \frac{1}{c(n-1)}\tan^{n-1} cx - \int\tan^{n-2} cx\;dx \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{dx}{\tan cx + 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$$

$$\int\frac{dx}{\tan cx - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$$

$$\int\frac{\tan cx\;dx}{\tan cx + 1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c}\ln|\sin cx + \cos cx|$$

$$\int\frac{\tan cx\;dx}{\tan cx - 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c}\ln|\sin cx - \cos cx|$$

Integrales que contienen solamente cot

$$\int \cot cx \; dx = \frac{1}{c} \ln |\sin cx|$$

$$\int \cot^n cx \; dx = -\frac{1}{c(n-1)} \cot^{n-1} cx - \int \cot^{n-2} cx \; dx \qquad (\text{para })n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{1+\cot cx} = \int \frac{\tan cx \; dx}{\tan cx + 1}$$

$$\int \frac{dx}{1-\cot cx} = \int \frac{\tan cx \; dx}{\tan cx - 1}$$

Integrales que contienen sen y cos

$$\int \frac{dx}{\cos cx \pm \sin cx} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \ln \left|\tan\left(\frac{cx}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{(\cos cx \pm \sin cx)^2} = \frac{1}{2c} \tan\left(cx \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int \frac{\cos cx \; dx}{\cos cx + \sin cx} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln |\sin cx + \cos cx|$$

$$\int \frac{\cos cx \; dx}{\cos cx - \sin cx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin cx - \cos cx|$$

$$\int \frac{\sin cx \; dx}{\cos cx + \sin cx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin cx + \cos cx|$$

$$\int \frac{\sin cx \; dx}{\cos cx - \sin cx} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin cx - \cos cx|$$

$$\int \frac{\cos cx \; dx}{\sin cx(1+\cos cx)} = -\frac{1}{4c} \tan^2 \frac{cx}{2} + \frac{1}{2c} \ln \left|\tan \frac{cx}{2}\right|$$

$$\int \frac{\cos cx \; dx}{\sin cx(1+-\cos cx)} = -\frac{1}{4c} \cot^2 \frac{cx}{2} - \frac{1}{2c} \ln \left|\tan \frac{cx}{2}\right|$$

$$\int \frac{\sin cx \; dx}{\cos cx(1+\sin cx)} = \frac{1}{4c} \cot^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2c} \ln \left|\tan\left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{\sin cx \; dx}{\cos cx(1-\sin cx)} = \frac{1}{4c} \tan^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2c} \ln \left|\tan\left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin cx \cos cx \; dx = \frac{1}{2c} \sin^2 cx$$

$$\int \sin c_1 x \cos c_2 x \; dx = -\frac{\cos(c_1+c_2)x}{2(c_1+c_2)} - \frac{\cos(c_1-c_2)x}{2(c_1-c_2)} \qquad (\text{para } |c_1| \neq |c_2|)$$

$$\int \sin^n cx \cos cx \; dx = \frac{1}{c(n+1)} \sin^{n+1} cx \qquad (\text{para } n \neq 1)$$

$$\int \sin cx \cos^n cx \; dx = -\frac{1}{c(n+1)} \cos^{n+1} cx \qquad (\text{para } n \neq 1)$$

$$\int \sin^n cx \cos^m cx \; dx = -\frac{\sin^{n-1} cx \cos^{m+1} cx}{c(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} cx \cos^m cx \; dx \qquad (\text{para } m, n > 0)$$

también:

$$\int \sin^n cx \cos^m cx \; dx = \frac{\sin^{n+1} cx \cos^{m-1} cx}{c(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n cx \cos^{m-2} cx \; dx \qquad (\text{para } m, n > 0)$$

$$\int\frac{dx}{\sin cx\cos cx} = \frac{1}{c}\ln\left|\tan cx\right|$$

$$\int\frac{dx}{\sin cx\cos^n cx} = \frac{1}{c(n-1)\cos^{n-1} cx}+\int\frac{dx}{\sin cx\cos^{n-2} cx} \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^n cx\cos cx} = -\frac{1}{c(n-1)\sin^{n-1} cx}+\int\frac{dx}{\sin^{n-2} cx\cos cx} \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\sin cx\;dx}{\cos^n cx} = \frac{1}{c(n-1)\cos^{n-1} cx} \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\sin^2 cx\;dx}{\cos cx} = -\frac{1}{c}\sin cx+\frac{1}{c}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{cx}{2}\right)\right|$$

$$\int\frac{\sin^2 cx\;dx}{\cos^n cx} = \frac{\sin cx}{c(n-1)\cos^{n-1}cx}-\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}cx} \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\sin^n cx\;dx}{\cos cx} = -\frac{\sin^{n-1} cx}{c(n-1)} + \int\frac{\sin^{n-2} cx\;dx}{\cos cx} \qquad \mbox{(for }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{sin^n cx\;dx}{\cos^m cx} = \frac{\sin^{n+1} cx}{c(m-1)\cos^{m-1} cx}-\frac{n-m+2}{m-1}\int\frac{\sin^n cx\;dx}{\cos^{m-2} cx} \qquad \mbox{(para }m\neq 1\mbox{)}$$

también: $$\int\frac{sin^n cx\;dx}{\cos^m cx} = -\frac{\sin^{n-1} cx}{c(n-m)\cos^{m-1} cx}+\frac{n-1}{n-m}\int\frac{\sin^{n-2} cx\;dx}{\cos^m cx} \qquad \mbox{(para }m\neq n\mbox{)}$$

también: $$\int\frac{sin^n cx\;dx}{\cos^m cx} = \frac{\sin^{n-1} cx}{c(m-1)\cos^{m-1} cx}-\frac{n-1}{n-1}\int\frac{\sin^{n-1} cx\;dx}{\cos^{m-2} cx} \qquad \mbox{(para }m\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\cos cx\;dx}{\sin^n cx} = -\frac{1}{c(n-1)\sin^{n-1} cx} \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\cos^2 cx\;dx}{\sin cx} = \frac{1}{c}\left(\cos cx+\ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|\right)$$

$$\int\frac{\cos^2 cx\;dx}{\sin^n cx} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos cx}{c\sin^{n-1} cx)}+\int\frac{dx}{\sin^{n-2} cx}\right) \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

$$\int\frac{\cos^n cx\;dx}{\sin^m cx} = -\frac{\cos^{n+1} cx}{c(m-1)\sin^{m-1} cx} - \frac{n-m-2}{m-1}\int\frac{cos^n cx\;dx}{\sin^{m-2} cx} \qquad \mbox{(para }m\neq 1\mbox{)}$$

también: $$\int\frac{\cos^n cx\;dx}{\sin^m cx} = \frac{\cos^{n-1} cx}{c(n-m)\sin^{m-1} cx} + \frac{n-1}{n-m}\int\frac{cos^{n-2} cx\;dx}{\sin^m cx} \qquad \mbox{(para }m\neq n\mbox{)}$$

también: $$\int\frac{\cos^n cx\;dx}{\sin^m cx} = -\frac{\cos^{n-1} cx}{c(m-1)\sin^{m-1} cx} - \frac{n-1}{m-1}\int\frac{cos^{n-2} cx\;dx}{\sin^{m-2} cx} \qquad \mbox{(para }m\neq 1\mbox{)}$$

Integrales que contienen sen y tan

$$\int \sin cx \tan cx\;dx = \frac{1}{c}(\ln|\sec cx + \tan cx| - \sin cx)$$

$$\int\frac{\tan^n cx\;dx}{\sin^2 cx} = \frac{1}{c(n-1)}\tan^{n-1} (cx) \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

Integrales que contienen cos y tan

$$\int\frac{\tan^n cx\;dx}{\cos^2 cx} = \frac{1}{c(n+1)}\tan^{n+1} cx \qquad \mbox{(para }n\neq -1\mbox{)}$$

Integrales que contienen sen y cot

$$\int \frac{\cot^n cx \; dx}{sin^2 cx} = \frac{1}{c(n+1)}\cot^{n+1} cx \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

Integrales que contienen cos y cot

$$\int \frac{\cot^n cx \; dx}{\cos^2 cx} = \frac{1}{c(1-n)}\tan^{1-n} cx \qquad \mbox{(para }n\neq 1\mbox{)}$$

Integrales que contienen tan y cot

$$\int \cot cx \tan cx \; dx = x$$

Integrales que contienen sec

$$\int \sec^2 x \; dx = \tan x + c$$

$$\int \sec x \; dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

Fuentes y contribuyentes del artículo

Historia de la trigonometría *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=58846750 *Contribuyentes*: Allforrous, Andreasmperu, Banfield, Jerowiki, Jkbw, Juan Mayordomo, Leonpolanco, Raulshc, Riveravaldez, SuperAs25, Technopat, UAwiki, 34 ediciones anónimas

Trigonometría *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=59375474 *Contribuyentes*: 194.158.88.xxx, 3damplified, Ale flashero, Alex Filth, Alexav8, AlfonsoERomero, Allforrous, Almendro, Amadís, Andreasmperu, Angelito7, Angus, Antur, Antón Francho, Aparejador, Armin76, Ascánder, Atlante, Azuladoconella, Açipni-Lovrij, Baiji, Balderai, Banfield, Belb, Belgrano, Beto29, BlackBeast, Blithfeorthelife, Bucephala, Bucho, Buenisimo, Cameri, Camilo, Camr, Charly genio, Chtristian, Cinabrium, Cobalttempest, Comae, Cookie, Dadidu 74, Daikixniimura, Daniel Carracelas, David0811, Deivi1753, DerHexer, Dermot, Devilman1, Dianai, Diegusjaimes, Diosa, Dnu72, Dodo, Dominguillo, Dominican, Draxtreme, Dreitmen, Eduardosalg, Elalumnocabron, Elisardojm, Elliniká, Emiduronte, Eocampos, Er Komandante, FAR, Farisori, Fernando Estel, Fiquei, Fmariluis, Foundling, FrancoGG, Fsd141, Galio, Gengiskanhg, Greek, Gsrdzl, Góngora, HiTe, House, Huhsunqu, Humbefa, Humberto, Interwiki, Isha, JMCC1, Jarisleif, Jcaraballo, Jerowiki, Jhoropopo, Jjafjjaf, Jkbw, Joelperez, JohnManuel, Johns, Jorge Ianis, JorgeGG, Joselarrucea, Josell2, Josher8a, Jsanchezes, Julian Mendez, Kakashi the best, Kenny Olivares, Khiari, Kiroh, Kismalac, Klystrode, Komputisto, Kristobal, Kved, LMLM, Larocka, Leonpolanco, Limbo@MX, Linkedark, Lucien leGrey, Lukillas, Mafores, Magister Mathematicae, Magnanimo, Mahadeva, Maldoror, Mansoncc, Manuel Gonzálvez, Manuelt15, Manwë, Mar del Sur, Marcela Corbalán, Marianov, Matdrodes, Math Master, Maveric149, Miguel Roldan, Milu, Moriel, Mparri, Muro de Aguas, Mushii, Mysthique, Netito, Netito777, Nicop, Ninrouter, Nioger, No sé qué nick poner, Otravolta, PACO, Paintman, Palica, Peejayem, Petruss, Pinzo, Prietoquilmes, Prometheus, Pólux, Qwertymith, Qwertyytrewqqwerty, Raulshc, RedTony, Reignerok, Ricardogpn, Rick.bass, Rimac, RitX, Rodriguillo, RoyFocker, Rubpe19, Sabbut, Saul2310, Sauron, Savh, Sebrev, Sergio Andres Segovia, Seth66, Sigmanexus6, SuperBraulio13, Taichi, Tano4595, Tartaglia, Technopat, Tegustamiculo, TheRandyAlex, Thingg, Tirithel, Tuncket, Txuspe, UDCONGO, Ugly, Urko1982, Veon, Vic Fede, Vitamine, Waka Waka, Wesisnay, Wilfredor, Xexito, Xsm34, Y0rx, YoaR, Youssefsan, Zeoroth, conversion script, 1095 ediciones anónimas

Función trigonométrica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=59438423 *Contribuyentes*: Alan1193, Andreasmperu, Angel GN, Antur, Açipni-Lovrij, Banfield, Barteik, Cesarsorm, David0811, Davius, Diego Sanguinetti, Diegusjaimes, Dnu72, Dominguillo, Dominic13qwe, Dusan, Edmenb, Edslov, Eduardosalg, Emijrp, Er Komandante, Farisori, Felipe Cruz G., Fer jenni, Gaianauta, GermanX, Greek, HUB, Halfdrag, Helmy oved, HiTe, Humberto, Igna, Isha, JMCC1, Jerowiki, Jkbw, Jmvkrecords, Josher8a, Juan Mayordomo, Laura Fiorucci, Leonpolanco, Lsdelrio, MadriCR, Magister Mathematicae, Mar del Sur, Marco Regueira, Matdrodes, Mel 23, Nixón, Oscar armando romero loreto, Pan con queso, Pello, Ppmch, Pólux, Raulshc, Ravave, Riveravaldez, Rovnet, RoyFocker, Rubpe19, Savh, Seasz, SuperBraulio13, Taichi, Tano4595, Tirithel, UA31, Waka Waka, Xavigivax, 322 ediciones anónimas

Identidades trigonométricas *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=59549163 *Contribuyentes*: .Sergio, 2800:270:D:2:4DCA:7A70:6BA2:7F6D, Acahelio, Ajraddatz, Aleivag, AlexFBP, Alvaro qc, Andreasmperu, AntBiel, Antonorsi, Açipni-Lovrij, Banfield, Belb, BetoYG, BlackBeast, Bostan Serai, BuenaGente, Camilo, Castrotec, Charly genio, Chzelada, Cobalttempest, Comae, D4gnu, Daniel Ajoy, Daniel De Leon Martinez, Daviberto, Diegusjaimes, Dodo, Dsparil, Eduardosalg, Emilyum, Er Komandante, Erfil, Erodrigufer, FAR, Fabermix, Fifilar, Fixertool, Fmariluis, Foundling, FrancoGG, GTAVCSA, GermanX, Hlnodovic, Humbefa, Humberto, Isha, JMCC1, Jarke, Jcmartin78, Jcniebla, Jerowiki, Jjafjjaf, Jkbw, Johny65, JorgeGG, Josema217, Juan Mayordomo, Julie, KELPER, Kismalac, Kody, Kved, Larocka, Leonpolanco, Linkedark, Lord of Dark, Lucien leGrey, Manuelt15, Manwë, Marianov, Marsal20, Matdrodes, Millars, Moriel, Mr. Moonlight, Mur alvaro, Nepenthes, Netito777, Nixón, OLM, OMenda, Oblongo, Omar rdz., Oscar ., PACO, Paul 14, Perky Pat, Pieter, Pino, Pinzo, Proferichardperez, Pólux, Raulshc, Raystorm, Riverxz, Roberpl, Rodri245, Rovnet, Sabbut, Sanbec, Savh, ShaggyStyle, Snakeeater, SuperBraulio13, Superzerocool, Taichi, Tano4595, Technopat, Thorcalder0n, Torbellino, Ulises Galicia Amaro, VanKleinen, Vic Fede, Walter Ceparo, Wilfredor, XalD, Yeza, ZrzlKing, 696 ediciones anónimas

Función hiperbólica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=56748087 *Contribuyentes*: Airunp, Açipni-Lovrij, Cdlfd, Cmx, Cohnan, Dhcp, FAR, GermanX, Ingenioso Hidalgo, Juan Mayordomo, Lsdelrio, Lucien leGrey, Magister Mathematicae, Marianov, Matdrodes, Mistwalker7, Mordecki, Moriel, Perky Pat, Raulshc, Ricardogpn, Tano4595, Thebiguserpratwiki, Txuspe, Zulucho, 70 ediciones anónimas

Anexo:Integrales de funciones trigonométricas *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=58254420 *Contribuyentes*: Alhen, Allforrous, Angela, Beto29, Diosa, Emmanuele, Figempa 2a, Garber, Götz, Hiro6634, Hosg, JMCC1, Johan uribe, JorgeGG, Mariano mario06, Matdrodes, Moriel, Mr. Moonlight, Platonides, Rodriguillo, Rondador, Tano4595, Txus.aparicio, Vivero, Xsm34, 98 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Plimpton 322.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Plimpton_322.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: photo author unknown

Archivo:Wiktionary-logo-es.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Wiktionary-logo-es.png *Licencia*: logo *Contribuyentes*: es:Usuario:Pybalo

Archivo:Trigonometria 02.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigonometria_02.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: HiTe

Archivo:STS-114 Steve Robinson on Canadarm2.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:STS-114_Steve_Robinson_on_Canadarm2.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: NASA

Archivo:Rhind Mathematical Papyrus.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Paul James Cowie (Pjamescowie)

Archivo:TransportadorR.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:TransportadorR.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:TransportadorG.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:TransportadorG.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:TransportadorC.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:TransportadorC.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono b00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_b00.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono d00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_d00.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RadiánCircunferencia.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RadiánCircunferencia.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Dnu72

Archivo:SexaCircunferencia.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:SexaCircunferencia.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Dnu72

Archivo:Angulo000.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Angulo000.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Angulo030.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Angulo030.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Angulo045.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Angulo045.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Angulo060.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Angulo060.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Angulo090.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Angulo090.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono c00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_c00.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 000.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_000.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 001.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_001.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 002.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_002.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 003.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_003.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 004.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_004.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 005.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_005.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 006.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_006.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 007.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_007.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 008.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_008.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 009.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_009.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 010.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_010.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 011.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_011.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono 012.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_012.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:FunTriR111.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FunTriR111.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-1.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-1.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-2.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-2.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-3.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-3.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-4.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-4.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-5.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-5.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-6.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-6.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-7.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-7.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:RelTri-8.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:RelTri-8.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Trigono a00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_a00.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Wikibooks-logo.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Wikibooks-logo.svg *Licencia*: logo *Contribuyentes*: User:Bastique, User:Ramac et al.

Archivo:Circle-trig6.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Circle-trig6.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: This is a vector graphic version of Image:Circle-trig6.png by user:Tttrung which was licensed under the GNU Free Documentation LicenseGFDL. Based on en:Image:Circle-trig6.png, which was donated to Wikipedia under GFDL by Steven G. Johnson.

Archivo:Identidades trigonométricas fundamentales.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Identidades_trigonométricas_fundamentales.gif *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: Germán (German)

Archivo:Trigono a10.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_a10.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:FunTriR333.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FunTriR333.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

File:Suma de Angulos.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Suma_de_Angulos.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Alan1193

Imagen:Circle-trig6.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Circle-trig6.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: This is a vector graphic version of Image:Circle-trig6.png by user:Tttrung which was licensed under the GNU Free Documentation LicenseGFDL. Based on en:Image:Circle-trig6.png, which was donated to Wikipedia under GFDL by Steven G. Johnson.

Archivo:obtuse-triangle-with-altitude.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Obtuse-triangle-with-altitude.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: EugeneZelenko, Explicit, Ilmari Karonen, Juliancolton, Régis Lachaume, Zscout370, 1 ediciones anónimas

Archivo:Ley de los senos-prueba.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ley_de_los_senos-prueba.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Drini

imagen:sinh cosh tanh.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sinh_cosh_tanh.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Cyp uploaded by Ckeen

imagen:csch sech coth.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Csch_sech_coth.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Cyp uploaded by Ckeen

Licencia